

The Series of Advanced Physics of Peking University

北京大学物理学丛书

等离子体理论基础

胡希伟　编著



北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

等离子体理论基础/胡希伟编著.—北京:北京大学出版社,2006.1

(北京大学物理学丛书)

ISBN 7-301-08921-X

Ⅰ.等…　Ⅱ.胡…　Ⅲ.等离子体物理学　Ⅳ.053

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 029799 号

书　　　名:等离子体理论基础
著作责任者:胡希伟　编著
责 任 编 辑:顾卫宇
标 准 书 号:ISBN 7-301-08921-X/O·0644
出 版 发 行:北京大学出版社
地　　　址:北京市海淀区中关村北京大学校内　100871
网　　　址:http://cbs.pku.edu.cn
电　　　话:邮购部 62752015　发行部 62750672　编辑部 62752021
电 子 信 箱:zpup@pup.pku.edu.cn
印　刷　者:北京宏伟双华印刷有限公司
经　销　者:新华书店
850mm×1168mm　32 开本　24.375 印张　630 千字
2006 年 1 月第 1 版　2006 年 1 月第 1 次印刷
定　　　价:42.00 元

内容简介

本书介绍了"经典理想等离子体"的两种主要理论描述方法:流体力学和动理学。共分四个部分,头两个部分属于三维坐标空间的流体描述,后两部分属于六维相空间(三维坐标空间加三维速度空间)的动理学描述。

第一部分"磁流体力学"主要介绍了"磁约束受控热核聚变"中磁化高温等离子体的平衡、线性波和不稳定性的理论,这时外加磁场对等离子体性质有最重要的影响。

第二部分"电磁流体应用专题"介绍了电场、磁场和电磁波场对等离子体性质都起重要作用的两个专题——"非中性等离子体激波"和"激光与等离子体相互作用",后一个专题通过"激光热核聚变"和"强激光与高密、高温等离子体相互作用"中的一些典型研究课题,介绍了电磁波和等离子体相互作用的流体理论。

第三部分"弗拉索夫波动理论"介绍了热等离子体的无碰撞波动性质。这一部分重点描述了各种特征的线性波模式以及波-粒子、波-波共振相互作用;也介绍了一般参考书中少见的弗拉索夫初值亦即弹道模问题;还对各种静电模不稳定性及湍动过程作了简单介绍。

第四部分"碰撞和输运"介绍了带电粒子间库仑碰撞以及由此而引起的各种输运过程的理论方法和结果;还通过"射频波驱动电流"这一课题,介绍了同时考虑"波-粒子共振"和"粒子-粒子碰撞"相互作用的理论描述方法;最后还比较系统地介绍了等离子体中的 BBGKY 理论。

本书是为具有大学物理学本科基础,并对等离子体物理学有初步了解的读者学习等离子体理论而写的。

前　言

物理学是自然科学的基础，是探讨物质结构和运动基本规律的前沿学科.几十年来，在生产技术发展的要求和推动下，人们对物理现象和物理学规律的探索研究不断取得新的突破.物理学的各分支学科有着突飞猛进的发展，丰富了人们对物质世界物理运动基本规律的认识和掌握，促进了许多和物理学紧密相关的交叉学科和技术学科的进步.物理学的发展是许多新兴学科、交叉学科和新技术学科产生、成长和发展的基础和前导.

为适应现代化建设的需要，为推动国内物理学的研究、提高物理教学水平，我们决定推出《北京大学物理学丛书》，请在物理学前沿进行科学研究和教学工作的著名物理学家和教授对现代物理学各分支领域的前沿发展做系统、全面的介绍，为广大物理学工作者和物理系的学生进一步开展物理学各分支领域的探索研究和学习，开展与物理学紧密相关的交叉学科和技术学科的研究和学习提供研究参考书、教学参考书和教材.

本丛书分两个层次.第一个层次是物理系本科生的基础课教材，这一教材系列，将几十年来几代教师，特别是在北京大学教师的教学实践和教学经验积累的基础上，力求深入浅出、删繁就简，以适于全国大多数院校的物理系使用.它既吸收以往经典的物理教材的精华，尽可

能系统地、完整地、准确地讲解有关的物理学基本知识、基本概念、基本规律、基本方法；同时又注入科技发展的新观点和方法，介绍物理学的现代发展，使学生不仅能掌握物理学的基础知识，还能了解本学科的前沿课题和研究动向，提高学生的科学素质. 第二个层次是研究生教材、研究生教学参考书和专题学术著作. 这一系列将集中于一些发展迅速、已有开拓性进展、国际上活跃的学科方向和专题，介绍该学科方向的基本内容，力求充分反映该学科方向国内外前沿最新进展和研究成果. 学术专著首先着眼于物理学的各分支学科，然后再扩展到与物理学紧密相关的交叉学科.

愿这套丛书的出版既能使国内著名物理学家和教授有机会将他们的累累硕果奉献给广大读者，又能对物理的教学和科学研究起到促进和推动作用.

《北京大学物理学丛书》编辑委员会

1997 年 3 月

前　言

等离子体是由处在非束缚态的带电粒子组成的多粒子体系。它和气体、液体、固体一起构成了自然界物质在同一层次上的四大基本形态。等离子体可以单独存在，也可以与其他的物质形态共存。如在晶体中的电子气，电解液中的正负离子团和未完全电离的放电气体。这时，等离子体一方面仍保持着自己的基本特性，另一方面又会与其他物质形态相互影响，演变出丰富多彩的性质。与其他三态所组成的混合物不同，等离子体和它们可以实现无界面的融合，从而与它们有细致到粒子对粒子的更紧密的相互作用。

人类对等离子体的实验研究是从气体放电开始的。相比起其他三态来说，要晚了许多。但从 20 世纪 50 年代开始，在受控热核聚变研究和空间技术发展的推动下，人们对等离子体的认识有了长足的进步。从 20 世纪 70 年代末起，等离子体物理学已经成长为现代物理学中的一支独立的二级学科。

等离子体属于多粒子体系，因此以往对中性多粒子体系发展出的各种描述方法对它也适用，只是要作相应的改造和发展。与中性粒子组成体系相比，等离子体最主要的不同是：它的带电粒子间存在着长程库仑作用。这使得等离子体除了具有中性多粒子系统的许多整体性质（这是由粒子间短程相互作用——如碰撞——而引发的）外，还具有由库仑作用的长程部分而产生的大量集体运动，也即自洽生成的电磁场，通常把它们称为各种各样的等离子体“波”。从这个意义来讲，等离子体是由大量带电粒子和各种波元（plasmons，类似在晶体中的各种元激发）组成的自洽体系。等离子

体的另一个特点是：它处在非束缚态的带电粒子极易受到各种内部自洽电磁场和外部所加电磁场的影响，从而作出很强的响应。这使得等离子体的介质电磁性质与其他三态显著不同，不能通过简单的电极化和磁化强度来描述。因此，在等离子体的各种描述方法中，一般都需要将其状态演化方程组直接和麦克斯韦方程组相耦合。在由等离子体与其他三态组成的混合物中，麦克斯韦方程组也将会通过带电粒子系与中性粒子系间的耦合而影响到中性粒子系的行为。

自然界和实验室的等离子体在密度上可以跨越近三十个数量级（从星际空间的<1 cm^{-3}到白矮星中的 10^{30} cm^{-3}），在温度上可以跨越近十个数量级（从金属中电子气的 10^{-3} eV 到脉冲星磁层中等离子体的 10^{6} eV），其中的电磁场在强度上也会跨越十几个量级（如磁场强度可从太阳风中的 10^{-5} Gs①到强激光产生的等离子体中的 10^{8} Gs，在中子星发生“星振”时所产生的电子云中磁场甚至可达 10^{15} Gs）。这是其他三种物质形态所不曾遇到的。因此，描写等离子体的理论方法就必然是多元化的。在本书中介绍的是对所谓的“理想、经典等离子体”的理论描述方法。这时粒子的平均动能大于平均（库仑）势能，而粒子的运动服从牛顿力学规律。这类等离子体覆盖了目前研究的大多数实验室和空间等离子体。而且我们对这类等离子体的性质已经了解得比较清楚，对它的理论描述也比较成功。

在本书第一章的开始，就从繁至简地（正好与物理学史的时序相反）介绍了描述“理想经典等离子体”的各种理论方法。但本书给出的是其中最主要的两类描述法：流体力学和动理学。本书就是由著者前几年所写的“磁流体力学”和“等离子体动理学”两本讲义合并而成的。在成书时，还补写了本书第二部分“电磁流体力学”的一部分章节（“双流体方程组”，“激光与等离子体相互作用”，和“非中

① 1 Gs $=10^{-4}$ T.

性等离子体激波”）。但是，原计划列入这部分的“非中性等离子体”和“气体放电等离子体”这次仍付阙如，颇令人遗憾。因此本书的描述对象主要是高温、完全电离的等离子体。读者是具有大学物理学本科基础、并对“等离子体物理”有初步了解的研究生和同等学历者。在下面附上了原讲义的两个序，一个跋，和一段对“plasma”这一英文词来历的介绍，希望对读者有所帮助。

作 者

2003 年 8 月于华中科技大学

原 序 一
（电磁流体力学）

等离子体的流体描述是等离子体两大基本描述方法之一，另一种就是所谓的动理学(kinetic)描述。这两门课构成了中国科学技术大学近代物理系等离子体专业研究生班的等离子体物理理论课程。原来的等离子体流体课程只有(单)磁流体力学，并以磁约束高温等离子体为主要的描述对象。近年来，随着非磁约束等离子体应用和研究的逐步发展，以及我专业研究领域的不断拓宽，此课程的内容也在不断充实，将非中性等离子体、低温等离子体及激光-等离子体相互作用的一些内容包含了进来。由于涉及了带电流体的描述，所以本课程的名称也相应改成“电磁流体力学”。本讲义只给出了这门课程第一部分——“磁流体力学”的内容。

本课程是为研究生开设的，要求读者有大学物理系本科的学历，并有“等离子体物理学”的基础。没有学过“等离子体物理学”的硕士生，在修读本课程时，必须同时选修本专业的大学生课程“等离子体物理导论”。

等离子体是由处在非束缚态的大量带电粒子组成的多粒子体系，和对其他多粒子体系的描述一样，对等离子体的理论描述也是通过对所研究的具体问题建立“物理模型”，并对此模型作定量(解析、数值或粒子模拟)的描述而完成的。因此要学好一门理论课程，首先要弄清所用数学公式的目的，也即需要读者在学习过程中建立清晰的物理图像：了解要解决的是什么问题，用的是什么物理模型，此模型的长处和短处，可以描述的和无法描述的等离子体性质……。物理模型或物理图像通常由几何模型、坐标系、所涉及的基本状态量及其初始值、一些有通用性质的“基本概念”，以及所用的基本方程组等构成。这些内容一般并不占很大篇幅，往往又很分散，甚至在课文中并没有被明显地指出，所以常被初学者忽略，这

就需要读者自己细心梳理、归纳。理论课程的另一个重要目的是使读者掌握一定的数学技巧，即定量地描述所讨论问题的能力。在本课程里，主要给出的是解析处理的方法和过程，而解析处理往往离不开各种“近似”方法。这就要求读者对各种近似方法的目的、适用条件和范围有清楚的了解，并会通过各种方式检验所用近似的合理性。最后，作者强烈地希望读者能在课本及参考资料的引导下，不厌其烦地、完整地推导书中的每一个结果，因为只有这样才能真正掌握其中的数学技巧。这对将来从事理论研究的读者来说是必不可少的，就是对从事实验研究的人来说也是有利而无害的。

在磁流体的描述中，所使用的许多方法和思路往往是其他物理理论的教科书中不常见的。例如，讨论二维磁流体平衡时所用的磁通坐标、平衡磁通所应满足的微分和积分方程，讨论磁流体稳定性时所用的变分方法，处理奇异微分方程的一些办法等。因此通过本课程的学习，可以使得这类数学技巧得到比较充分的训练。希望有的同学不要因为自己不是从事磁约束高温等离子体研究的就轻视了以上内容，“它山之石，可以攻玉”，各种数学处理方法往往有着比物理模型更广阔的应用范围。此外，虽然近十多年来非磁约束等离子体的研究有了长足的进步，但是磁约束等离子体的研究仍然处于等离子体研究的前沿，带动着等离子体物理学整个学科的发展。经受过磁约束等离子体研究训练的理论或实验工作者往往比较容易进入其他的等离子体研究领域，反之则要困难得多。所以，从学习和训练的角度来看，“磁流体力学”也是很好的入门课程，值得每个初学者下功夫去学好。

本课程是 4 个学分的课，即每周 4 学时、一学期 80 学时(包括复习、考试)。所以本讲义只选择了适宜于课堂讲授的一些内容，这些内容往往在数学处理上比较简单，而又可以给出鲜明的物理图像。一些和当前研究前沿有关的资料，已尽可能在文中合适的地方列出，供有兴趣的读者参考。

作　者

1997 年 8 月于中国科学技术大学

原　序　二
（等离子体动理学）

“等离子体动理学（kinetic theory）”是“等离子体电磁流体力学”的姐妹篇，它们一起构成了中国科学技术大学近代物理系等离子体专业研究生班的等离子体物理理论课程。一般在学了电磁流体力学之后开设，周学时 4，总学时 80。以往把 kinetic theory 译为动力学，结果和力学中的 dynamic theory 无法区分，而两者的处理对象和处理方法均有明显差别；这里采用的，是新版物理学名词给出的标准译名——动理学。

动理学方法和流体力学方法都是研究多粒子体系（气体、液体、固体和等离子体）物理性质的理论工具，但动理学方法和流体力学的三维坐标空间描述不同，它通常是在六维的坐标-速度空间来描述等离子体，而且还可以扩展到在 $6n(n=1,2,\cdots)$ 维空间作描述。之所以需要用速度空间来描述，是因为有些多粒子体系的行为和它们粒子的速度状态有密切关系，因此仅仅在坐标空间作描述就不够了。多粒子体系中最常见的动理学问题是粒子间的相互作用对其速度状态，以至于空间状态的影响。当体系是由中性粒子组成时，粒子间只有接近到原子或分子的半径范围内时才会发生相互作用，而且是激烈的相互作用——在物理上通常用碰撞这种图像来描述它。因此碰撞及其引起的输运过程是动理学方法最早也是最主要的研究对象。但是如果组成体系的粒子是带电的电子和离子时（如等离子体体系），它们之间通过库仑力相互作用，而库仑力是长程的。即使考虑了多体造成的屏蔽影响，带电粒子间屏蔽库仑力的力程仍然远大于粒子间距。于是当带电粒子相互接近时，在发生激烈的、碰撞型的相互作用前，就经受了长时间、远距离的较弱相互作用——这类相互作用就不能用碰撞图像来描述，自然

这种长程相互作用所引起的物理现象也和输运大不相同，但它们仍然可以用动理学方法进行描述。这样等离子体的动理学理论也就比物质前三态（气、液、固）的要丰富得多。

为了描述的方便，往往把等离子体带电粒子间的相互作用以屏蔽库仑势中的德拜长度为界，在定性上分成两部分：粒子间距小于德拜长度的短程相互作用和粒子间距大于德拜长度的长程相互作用。对短程相互作用仍沿用中性粒子情况下的碰撞图像，但其定量描述要作一定的修改；而大量粒子参与的长程相互作用，则用自洽场（也称集体运动或波）的图像来描述。在许多等离子体中这两类物理过程的特征时间尺度和空间尺度往往相去甚远，因此可以分别加以研究。这样就形成了等离子体动理学理论的两大部分：碰撞和输运理论及自洽场的弗拉索夫理论。但对于某些等离子体现象，这两类相互作用无法在时间和空间尺度上加以区分，这时就需要把它们的影响一起加以考虑——这是一类比较复杂的动理学研究对象。在本课程的第一部分介绍了线性的弗拉索夫理论，在物理上所谓线性是指自洽场能量远小于粒子平均热能的情况。非线性的弗拉索夫理论不但定量描述起来很复杂，而且目前尚不成熟，只在第一部分的最后一章作了简单介绍。本课程的第二部分则介绍了碰撞和输运理论，并用其中的第十章（“电流驱动”）介绍了同时处理两种动理学效应的一个例子。

与流体描述相比，等离子体的动理学描述尤其是弗拉索夫线性理论的参考书非常多，内容也十分繁复。可以说，几乎所有的线性弗拉索夫本征值的色散方程都已被求出，剩下的工作就是根据研究对象从这些色散方程中找出合适的本征模（等离子体波），然后加以合理的解释。然而，这最后的一步却是最困难的一步，同时也是物理学家得以显示身手的地方。因此本教程试图以较少的篇幅介绍线性弗拉索夫问题可能提供的几种典型的解及其物理意义，详细给出若干常用的求解本征值问题的数学方法，以及一些具有代表性的、在研究工作中常遇到的稳定、阻尼及不稳定本征模的

性质。一些有意义、但数学处理过于繁重的本征值问题，本教程虽不予详细介绍，但也给出了参考文献。当然，这都是以本人有限的知识和经历来评价的，一定会有严重的疏漏之处。但根据以往的经验，在认真地学习了本教程后，读者应该具有足够的知识基础和自学能力，只要假以时日，就可以解决任何线性弗拉索夫问题。

对于等离子体中普遍存在、处理十分困难，而且有重要实际应用价值的湍动问题，本教程采取了有点实用主义的介绍方法。即回避了这些湍动的产生机制，而着眼于讨论以下的问题：对一个已经存在的湍动可能采取哪些数学方法去进行处理，然后又怎样从中得出有用的、反映湍动等离子体内部参量特性的定性和半定量的信息。这种介绍方式对大多数人来说可能效果更好。对等离子体湍动机制有兴趣的读者也可以在教材中找到入门的参考资料。

与物质的其他三态相比，等离子体还是一个十分年轻的研究领域，因此新的实验结果和理论方法还在不断涌现，希望教过和学过这本教材的同行们，能向作者指出其中错误、提出改进意见，使它能够跟上时代的步伐。

作　者

1999 年 3 月 1 日于中国科学技术大学

原　跋

（电磁流体力学）

作为等离子体物理理论的研究和教学工作者，与物理学其他分支的理论工作者相比，总是缺乏成就感。这是因为，等离子体理论尽管做得十分辛苦，但结果总是和实验相差甚远；在最好的情况下也只能作到半定量（相差一个几倍的数值因子）的符合，一般能做到定性相符就算很成功了。而在动理学和电磁流体力学的两种描述中，后者和实验的相符程度又强于前者。

这种情况对于等离子体的实验工作者也一样存在，由于难以对等离子体内部物理状态做直接测量，也由于等离子体的相关物理量（自由度）远远多于其他多粒子体系（如固体、液体或气体）；所以很难对它的状态做全面的测定，而能做的一些测量其精度又都不高，故等离子体的实验中往往用（医学中的）诊断而不是（其他物理分支中通用的）测量来命名其所得结果。另外，同一种类型的不同等离子体实验装置其结果往往不能完全重复，就是同一装置在相同的控制参数下得出的结果也不尽相同。因此，等离子体的实验研究也缺乏其他物理学分支的精确度。

这一切都使得人们在对等离子体性质的研究中付出的多而得到的少。但也正因为如此，从事等离子体物理研究的人们受到了更多的训练，比从事物理学其他分支研究的工作者，更善于在所得信息量不足和不准的情况下，尽可能精确地理解一个复杂体系的性质。而这种本领在 21 世纪的科学研究中却有可能是最具重要意义的。

人类对自然界和人类社会本身的认识过程，是一个从定性描述到定量描述的进步过程。近代科学研究，其实就是对研究对象作定量化描述。但是，在一定的历史阶段，适于定量描述的研究领域

往往只有一两个。在近代科学发展史上,最先被定量化的学科是力学及数学本身,然后是物理学;这并不是人类的偏爱,而是因为它们的研究对象比其他学科要简单,从而更容易成为精确研究的样本。然而到 20 世纪末,人类用来了解自然的工具及知识储备都已经能够定量化地描述更为复杂的学科。物理学作为领头学科的风光不再,新的重大科学发现愈来愈多地出现在生物、化学以及信息科学、环境科学的领域中。这些学科正从只能作定性或半定量描述的状态渐渐转入可以作定量描述的状态,因而得到愈来愈多的人力和物力投入。

但是,能对这些更加复杂的体系做定量描述,是得到了人类在数学、力学及物理学的研究中所积累的物质力量(包含各种先进的仪器、设备、计算能力)和知识(例如定量处理复杂体系的方法)的有力支持的。在物理学的各分支中,等离子体物理是最具可能来提供这种支持的学科。因为目前困惑等离子体物理研究的问题,也就是 21 世纪领头学科在定量化描述时将会面临的问题。所以,当前在等离子体物理理论和实验中所积累的知识和经验就是一种宝贵的财富,可以被借鉴到广阔的科学研究领域中去。例如等离子体理论描述中广泛采用的"模型"法,就是在对复杂体系作定量描述时的一种有巨大潜力的研究方法。

在这样一种全新的观念下,我们对等离子体物理理论的学习一定会有全新的收获。

丁丑年处暑后二日秋虫啁哳之夜

名称"plasma(等离子体)"的由来[①]

下面是一段对"plasma"这一英文词来历的介绍。其中文译名"等离子体"的本意是指这种物质形态中的正、负电荷大体相等,从而整体呈现准中性。但实际上,由大量非束缚带电粒子组成的、整体上呈正电性或负电性(如纯粹由正电子或电子组成)的多粒子体系也具有准中性体系相似的特性。本书所介绍的理论方法对描述这种"非中性等离子体"的行为也一样适用。因此"plasma"的上述中文译名就不但长了点,而且也不很贴切。目前家电业用"等离子电视"取代"等离子体电视"来作市场宣传,这个词虽不规范,但社会影响却不小。因此重新考虑一个合适的"plasma"中文译名已经刻不容缓。通过对"plasma"英文词源的了解,也许会对起个更加合适的中文译名有所启发。

等离子体(plasma)一词源于希腊语的 πλασμα,若译成英语就是"to mold",意味着像加工塑料制品那样将流体注入模具来实现成型。朗缪尔(Irving Langmuir,1932 年诺贝尔化学奖得主)注意到,辉光放电产生的电离气体也有这种成型特性,并于 1928 年把这种电离气体命名为"plasma"。他的合作者 Tonks 在他的一篇论文(Am. J. Phys.,35 (1967),857 页)中,这样生动地讲述了这个名词的由来:

Langmuir came into my room in the General Electric Research Laboratory one day and said "Say, Tonks, I'm looking for a word. In these gas discharges we call the region in the immediate neighborhood of the wall or an electrode a sheath, and

① 摘自:〔日〕菅井秀郎,《等离子体电子工程学》,科学出版社,2002,北京,第 4 页。

that seems to be quite appropriate; but what should we call the main part of the discharge? … there is complete space-charge neutralization. I don't want to invent a word, but it must be descriptive of this kind of region as distinct from a sheath. What do you suggest?"

My reply was classic "I'll think about it, Dr. Langmuir."

The next day Langmuir breezed in and announced, "I know what we'll call it, the plasma." The image of blood plasma immediately came to mind; I think Langmuir even mentioned blood.

像该文提及的那样，当时在医学界 plasma 已经被用于指代血浆(blood plasma)，而朗缪尔的这一命名与此毫无关系。通晓希腊语的朗缪尔应该是看到放电气体发光部分会随着放电管形状而变化，于是根据上述希腊词源将其命名为等离子体的。大家想想，霓虹灯广告牌，不论其文字、图形多么复杂，不都可以通过细长的放电管而绚丽发光吗？

目　录

第一部分　磁流体力学

第二部分 电磁流体应用专题

第三部分 弗拉索夫波动理论

第四部分　碰撞和输运

第一部分

磁流体力学

第一章　磁流体力学方程组及其基本性质

1.1　磁流体力学(MHD)描述及其适用条件

1.1.1　磁流体描述

等离子体和固、液、气体一样是多粒子体系，在物理学中对多粒子体系的基本描述方法有以下几种.

(1) $6N$ 维空间的动力学描述(相当于力学中的多粒子轨道描述)

状态量：$\{\boldsymbol{r}_\alpha(t)\},\{\boldsymbol{v}_\alpha(t)\}$, $\alpha=1,2,\cdots,N$.

方程：$m_\alpha \mathrm{d}\boldsymbol{v}_\alpha(t)/\mathrm{d}t=\boldsymbol{F}_\alpha(\{\boldsymbol{r}_\alpha(t)\},\{\boldsymbol{v}_\alpha(t)\},t)$.

初始条件：$\{\boldsymbol{r}_\alpha(0)\},\{\boldsymbol{v}_\alpha(0)\}$.

实现方法：粒子运动的计算机模拟方法.

(2) $6N$ 维空间的统计物理描述

对多粒子体系由于初条件往往不能确定给出，所以 $6N$ 条轨道从一开始就不能分辨. 物理上因此发展了不用辨别轨道的统计描述法.

状态量：$f^{(\alpha)}(\{\boldsymbol{r}_\alpha(t)\},\{\boldsymbol{v}_\alpha(t)\},t)$, $\alpha=1,2,\cdots,N$.

方程：BBGKY 链式方程组(从略，参见本书第四部分).

实现方法：一般只取最低阶统计分布函数 $f^{(1)}\equiv f(\boldsymbol{r}_\alpha(t),\boldsymbol{v}_\alpha(t),t)$，其相应的动理学方程是 $6N$ 维空间的弗拉索夫(Vlasov)(无碰撞)方程或玻尔兹曼(福克尔-普朗克(Fokker-Planck)或朗道等碰撞)型方程(从略，参见本书第三部分).

(3) 流体力学描述(双流体力学描述及磁流体力学描述)

由于等离子体含有两种或更多种带电粒子,故对速度空间平均后首先得到的是双(多)流体力学描述.

状态量:$n(\boldsymbol{r}_\alpha(t))$,$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}_\alpha(t))$,$T(\boldsymbol{r}_\alpha(t))$,其中

$$n_\alpha(\boldsymbol{r}_\alpha(t),t)=\int f(\boldsymbol{r}_\alpha(t),\boldsymbol{v}_\alpha(t),t)\mathrm{d}\boldsymbol{v}_\alpha,$$

$$\boldsymbol{u}_\alpha(\boldsymbol{r}_\alpha(t),t)=\int \boldsymbol{v}f(\boldsymbol{r}_\alpha(t),\boldsymbol{v}_\alpha(t),t)\mathrm{d}\boldsymbol{v}_\alpha,$$

$$T_\alpha(\boldsymbol{r}_\alpha(t),t)=\int (m_\alpha w_\alpha^2/2)f(\boldsymbol{r}_\alpha(t),\boldsymbol{v}_\alpha(t),t)\mathrm{d}\boldsymbol{v}_\alpha,\quad \boldsymbol{w}_\alpha=\boldsymbol{v}_\alpha-\boldsymbol{u}_\alpha.$$

方程:双流体力学方程组(从略,参见本书第二部分第五章).

在不必区分电子流体和离子流体时,可以把它们加起来.这时流体元是中性的,有(单)磁流体力学描述.

状态量:

$$\rho(\boldsymbol{r},t)=\sum_{\alpha=\mathrm{e,i}}m_\alpha n_\alpha,$$

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r},t)=\sum_{\alpha=\mathrm{e,i}}m_\alpha n_\alpha\boldsymbol{u}_\alpha/\rho(\boldsymbol{r},t),$$

$$T(\boldsymbol{r},t)=\sum_{\alpha=\mathrm{e,i}}m_\alpha n_\alpha T_\alpha/\rho(\boldsymbol{r},t).$$

方程:磁流体力学方程组(见本章下面的详细介绍).

(4) 热力学描述

对于大多数宏观呈电中性的等离子体来说,其热力学性质与中性气体体系相似.因此在热力学描述层面上,等离子体大量借鉴了中性气体体系的热力学的结果,有时几乎把理想气体的许多结论直接搬用过来(例如物态方程和绝热压缩方程等).在本书第五章的后半部分,作为一个例子,还直接从热力学第一定律导出了双流体能量守恒方程.因此,读者需要的话,可以参考一些热力学的教程及参考书(例如在第五章中给出的参考书).直接讨论等离子体热力学描述的参考文献见文献[1],[2].

1.1.2 磁流体力学描述成立的条件及局限

先讨论普通流体描述成立条件.为了使一个流体元中的绝大多数中性粒子在某一段(特征的)时间内能保持在坐标空间的某一(特征的)区域内,只有依靠粒子间足够频繁的碰撞.这就要求流体元的特征长度 l 远大于中性粒子碰撞平均自由程 λ_c:$l\gg\lambda_\mathrm{c}$,以及流体元变化的特征时间$(\partial/\partial t)^{-1}$远大于中性粒子碰撞平均时间 ν_c^{-1}:$(\partial/\partial t)^{-1}\gg\nu_\mathrm{c}^{-1}$(或 $\partial/\partial t\ll\nu_\mathrm{c}$).

而为了使流体元的速度能表征流体元中的绝大多数粒子的速度,就要求这些粒子的速度分布函数处于热力学平衡态也即麦克斯韦分布.如果一个多粒子体系远离热力学平衡态,用流体描述往往不能很好地表征它的性质,这时就需要动理学的描述了.

磁流体描述也需要满足上述条件,但由带电粒子组成的流体元往往有更有利的成团条件,其中最主要的因素为:

(i) 带电粒子间的碰撞频率远大于中性粒子间的碰撞频率(因而有更短的碰撞平均自由程).这是由于带电粒子间的作用力是长程的库仑力,故带电粒子间的相互作用(耦合)要比中性粒子间的强得多.

(ii) 当存在磁场时,磁场对带电粒子有横向约束作用.洛伦兹力使带电粒子在垂直磁场方向上只能保持在回旋半径的范围内.这样只要磁化流体元的横向(垂直于磁场的方向)特征长度远大于回旋半径(r_c)就可以用流体描述了.

因此等离子体、尤其是磁化等离子体,往往可以在比中性粒子系更低的密度和更高的温度下仍能用流体方法来描述.但是随着温度的升高或磁流体元随时间变化频率 ω 的升高(例如使得 $\omega\geqslant\partial/\partial t$),上述流体描述成立条件将不复成立,这时就需要用动理学方法来描述.另外如果等离子体的参量(密度、温度和速度场)随空间有显著的变化,则粒子的漂移运动和输运现象不可忽略,这时电

子和离子流体的行为是不同的，(单)磁流体力学描述就要让位给双流体力学描述.

1.2　磁流体力学方程组

1.2.1　理想磁流体力学方程组

1. 连续性方程

$$\frac{\partial \rho(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r},t))=0. \tag{1.1}$$

其意义是系统的质量守恒，如将(1.1)式对任一体积 ΔV 积分(图1.1)，则有

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\Delta V}\rho(\boldsymbol{r},t)\mathrm{d}\boldsymbol{V}+\int_{\Delta V}\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r},t))\mathrm{d}\boldsymbol{V}=0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}M(\boldsymbol{r},t)+\oint_S\rho(\boldsymbol{r},t)\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r},t)\cdot\boldsymbol{e}_n\mathrm{d}S=0.$$

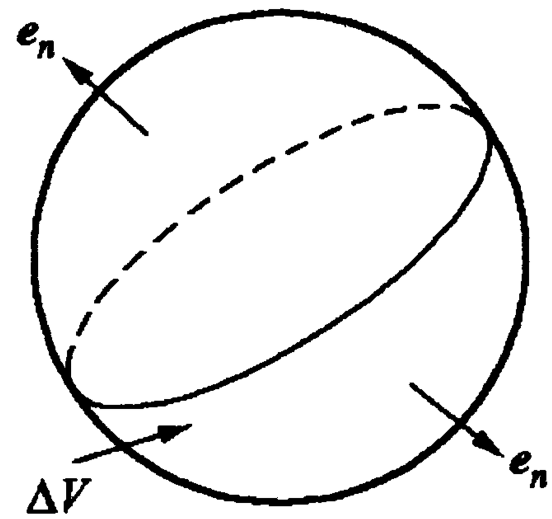


图 1.1　质量守恒示意图

这表明在体积 ΔV 中质量 M 的变化率由流过包围此体积的封闭表面的净质量流决定. 如果积分是对整个体系进行而体系又是孤立的，则通过体系外表面进出的质量流为零，于是上式就表示整个体系的质量不变.

2. 流体运动方程(欧拉方程)

假若流速是非相对论的，则可将牛顿第二定律用于流体元

$$\rho\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}(t),t)}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{F}_{\mathrm{tot}}(\boldsymbol{r}(t),t). \tag{1.2}$$

其中

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}(t),t)}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}+\boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r},t)$$

是在随流体元一起运动的拉格朗日坐标系中看到的流体元所受到

的加速度；而方程式右面第一项则是在实验室坐标系(也即欧拉坐标系)中看到的流体元受到的加速度，右面第二项是由于流速的空间不均匀而产生的加速度. $\mathrm{d}/\mathrm{d}t$ 被称为全导数、随流(体)导数或实质导数，而 $\partial/\partial t$ 则被称为偏导数、当地导数，$\boldsymbol{u}\cdot\nabla$ 被称为迁移导数.

运动方程右边的 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{tot}}$ 是作用于流体元的总力. 对于“理想的磁流体”，可能施加于流体元的外力有

热压力：$-\nabla P$，

洛伦兹力：$\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{B}$，

其中 $\boldsymbol{J}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 分别为电流和磁场. 对有明显流动的磁流体、特别是其流速场有明显剪切的磁流体，还需计入

黏性力：$-\nabla\cdot\overleftrightarrow{\Pi}$，

其中 $\overleftrightarrow{\Pi}$ 是黏性(二阶)张量(详细的讨论请参考文献[2]). 黏性力是由粒子间碰撞而引起的一种耗散(因而是非理想的)效应，因此计入了黏性力的磁流体是“非理想”的磁流体. 对磁流体元的作用力中无静电力，这是因为流体元是电中性的. 于是磁化流体元的运动方程最后可写成

$$\rho(\boldsymbol{r},t)\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}(t),t)}{\mathrm{d}t}=-\nabla P-\nabla\cdot\overleftrightarrow{\Pi}+\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{B}. \tag{1.3}$$

由于在这个方程式中新引进三个新量 $\boldsymbol{J}$，$\boldsymbol{B}$ 及 P，就需要给出相应的方程组来描述它们的时间行为.

3. 电磁方程组(给出 $\boldsymbol{J}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的行为)

安培定律

$$\boldsymbol{J}=\frac{1}{\mu_0}\nabla\times\boldsymbol{B}. \tag{1.4}$$

法拉第定律

$$\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}=-\nabla\times\boldsymbol{E}. \tag{1.5}$$

广义欧姆定律(无电阻的“理想磁流体”情况)

$$\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{B}. \tag{1.6}$$

及

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0. \tag{1.7}$$

4. 能量守恒方程

由于磁流体方程式着重于描述平衡(静止)的和变化缓慢的等离子体行为,而且对于无电阻的理想 MHD 体系,又无焦耳热 ,所以往往采用绝热近似下的理想气体状态方程来描述其压强和密度的相互依赖关系(请见本书第五章(5.29)式的详细推导):

$$P\rho^{-\gamma} = 常数, \tag{1.8}$$

式中的常数是指它是不随时间和空间而变化的常数,通常将 γ 取成理想气体的气体常数值 5/3.

最后给出完整和封闭的理想磁流体力学方程组:

$$\frac{\partial \rho(\boldsymbol{r},t)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{u}(\boldsymbol{r},t)) = 0,$$

$$\rho(\boldsymbol{r},t)\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}(t),t)}{\mathrm{d}t} = -\nabla P + \boldsymbol{J} \times \boldsymbol{B},$$

$$P\rho^{-\gamma} = 常数,$$

$$\boldsymbol{J} = \frac{1}{\mu_0}\nabla \times \boldsymbol{B},$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = -\nabla \times \boldsymbol{E},$$

$$\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{B},$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0.$$

对于一个物理问题的完整求解,除了微分方程组外、还需要合适与足够的边界(或连接)条件. 理想磁流体的一些典型边界(连接)条件见附录 A.

1.2.2 非理想磁流体力学方程组

对于电阻 MHD 体系需要用下面的两个方程式来代替上面的

能量守恒方程及广义欧姆定律(请见本书第五章(5.31)式的详细推导或文献[3]),

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(P\rho^{-\gamma}) = (\gamma - 1)\rho^{-\gamma}\eta J^2, \tag{1.9}$$

$$\boldsymbol{E} + \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{B} = \eta \boldsymbol{J}, \tag{1.10}$$

其中 η 是等离子体电阻,而 ηJ^2 是焦耳热. 在讨论由电阻在磁场有理面附近引起的磁流体撕裂模时,往往只须用到二维几何位形,这时由上面的电阻磁流体方程可以导出一组简化的封闭方程组——即有名的约化(reduced) MHD 方程组. 我们将在第四章最后一节介绍.

除了电阻,黏性是另一重要的非理想效应,这往往是在磁流体具有可观的流速或流速场剪切时需要考虑的重要因素. 一般是通过在欧拉(运动)方程中加入黏性力项($-\nabla \cdot \overleftrightarrow{\Pi}$)来计算这种非理想效应的,见(1.3)式.

1.3 理想磁流体方程组的基本性质

1.3.1 守恒定律

1. 质量守恒

由上面对连续性方程作体积分可以看出这种形式的微分方程就是守恒律的微分形式

$$\frac{\partial \rho(\boldsymbol{r},t)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{u}(\boldsymbol{r},t)) = 0.$$

2. 动量守恒

由连续性方程、运动方程及安培定律,可以最后导出流体元动量守恒的微分形式

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \boldsymbol{u}) + \nabla \cdot \overleftrightarrow{T} = 0. \tag{1.11}$$

其中$\overleftrightarrow{T}$是一个二阶张量，具有“动量流”的物理意义：

$$\overleftrightarrow{T} = \rho \boldsymbol{uu} + \left(\frac{B^2}{8\pi}\overleftrightarrow{I} - \frac{\boldsymbol{BB}}{4\pi}\right) + P\overleftrightarrow{I}. \tag{1.12}$$

其中 $\rho\boldsymbol{uu}$ 是普通流体的动量流——即所谓的雷诺张量，而 $P\overleftrightarrow{I}$则是热压强单位张量(这实际上是一个标量)——是普通流体动量流中的无规部分. 中间项则代表磁压强张力张量，属于电磁场麦克斯韦张力张量中的一部分，是磁流体所特有的.

下面给出动量守恒方程(1.11)及(1.12)的推导过程，由

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \boldsymbol{u}) = \rho\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + \boldsymbol{u}\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

出发，代入式(1.1)和(1.3)后，得

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \boldsymbol{u}) = -\rho(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{u}) + \frac{1}{\mu}(\nabla\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{B} - \nabla P.$$

其中

$$\nabla P = \nabla\cdot(P\overleftrightarrow{I}),$$

$$\rho(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{u}) = \nabla\cdot(\rho\boldsymbol{uu}).$$

再利用

$$\nabla(B^2) = 2\boldsymbol{B}\times(\nabla\times\boldsymbol{B}) + 2(\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{B},$$

可得

$$(\nabla\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{B} = \nabla\cdot\left(-\frac{1}{2}B^2\overleftrightarrow{I} + \boldsymbol{BB}\right).$$

于是最后得证

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\boldsymbol{u}) = -\nabla\cdot\overleftrightarrow{T},$$

$$\overleftrightarrow{T} = \rho\boldsymbol{uu} + \left(\frac{B^2}{2\mu}\overleftrightarrow{I} - \frac{\boldsymbol{BB}}{\mu}\right) + P\overleftrightarrow{I}.$$

3. 能量守恒

定义流体元的能量密度：

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\rho u^2 + \frac{B^2}{8\pi} + \frac{P}{\gamma-1},$$

则有能量守恒方程

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \nabla\cdot\boldsymbol{Q} = 0. \tag{1.13}$$

其中 $\boldsymbol{Q}$ 是总能流：

$$\boldsymbol{Q} = \frac{1}{2}\rho u^2\boldsymbol{u} + \boldsymbol{B}\times(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B}) + \frac{\gamma}{\gamma-1}P\boldsymbol{u}, \tag{1.14}$$

上式右面第一项是普通流体的动能流；第二项则是电磁能流(即坡印亭矢量：$\boldsymbol{B}\times(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B}) = -\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}$)；而第三项可进一步分解成(取 $\gamma=5/3$)

$$\frac{\gamma}{\gamma-1}P\boldsymbol{u} = \frac{5}{2}P\boldsymbol{u} = \frac{3}{2}P\boldsymbol{u} + P\boldsymbol{u},$$

也即由热(能)流和压强所作功率组成. 下面给出式(1.13)及(1.14)的证明. 用 $\boldsymbol{u}$ 点乘运动方程，得

$$\rho\boldsymbol{u}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial t} = -\rho\boldsymbol{u}\cdot(\boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{u}) + \frac{1}{\mu}\boldsymbol{u}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{B} - \boldsymbol{u}\cdot\nabla P. \tag{1.15}$$

其中左面第一项可写作

$$\rho\boldsymbol{u}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho u^2}{2}\right) + \frac{u^2}{2}\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{u}),$$

上式中的最后一项在移到(1.15)式的右面后，与原右面第一项可合成为$-\nabla\cdot(\rho u^2\boldsymbol{u}/2)$. 而(1.15)式右面第二项可以改写成

$$\frac{1}{\mu}\boldsymbol{u}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{B} = -\frac{1}{2\mu}\frac{\partial B^2}{\partial t} - \frac{1}{\mu}\nabla\cdot[\boldsymbol{B}\times(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B})].$$

为推导上式，首先用 $\boldsymbol{B}\cdot(1.5)$式，得

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\mu}\frac{\partial B^2}{\partial t} &= \frac{1}{\mu}\boldsymbol{B}\cdot[\nabla\times(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B})]\\ &= \frac{1}{\mu}\nabla\cdot[(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{B}] + \frac{1}{\mu}(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B})\cdot\nabla\times\boldsymbol{B}\\ &= -\frac{1}{\mu}\nabla\cdot[\boldsymbol{B}\times(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B})] - \frac{1}{\mu}\boldsymbol{u}\cdot[(\nabla\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{B}],\end{aligned}$$

于是前式得证. (1.15)式右面最后一项可变成

$$-\boldsymbol{u}\cdot\nabla P=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{P}{\gamma-1}\right)-\nabla\cdot\left(\frac{\gamma P\boldsymbol{u}}{\gamma-1}\right).$$

上式是从(1.8)式的一般形式 $\mathrm{d}(P\rho^{-\gamma})/\mathrm{d}t=0$ 推出的：

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}&=\gamma P\rho^{-1}\frac{\partial\rho}{\partial t}\\&=-\gamma P\rho^{-1}\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{u})\\&=-\gamma P[\nabla\cdot\boldsymbol{u}+\boldsymbol{u}\cdot\nabla\rho/\rho]\\&=-\gamma P[\nabla\cdot\boldsymbol{u}+\gamma^{-1}\boldsymbol{u}\cdot\nabla P/P]\\&=-\gamma\nabla\cdot(P\boldsymbol{u})+(\gamma-1)\boldsymbol{u}\cdot\nabla P,\end{aligned}$$

这就是前式的变形. 把(1.15)式的所有变形都代入，就成了

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho u^2}{2}\right)=-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{B^2}{2\mu}\right)-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{P}{\gamma-1}\right)-\frac{1}{\mu}\nabla\cdot[\boldsymbol{B}\times(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B})]$$
$$-\nabla\cdot\left(\frac{\gamma}{\gamma-1}P\boldsymbol{u}\right)-\nabla\cdot(\rho u^2\boldsymbol{u}).$$

经过简单整理，上式就变成(1.13)和 (1.14)式.

4. 角动量守恒(不独立)

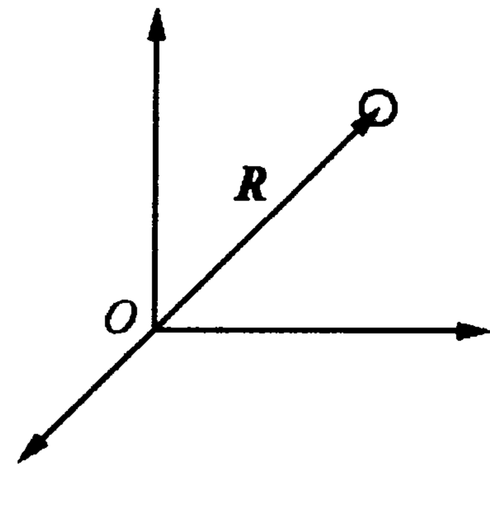


图 1.2　角动量定义图

定义以坐标原点为中心，某一空间点 $\boldsymbol{R}$ 处流体元的角动量密度 $M=\boldsymbol{R}\times(\rho\boldsymbol{u})$（见图1.2），将 $\boldsymbol{R}\times$(1.11)式后，通过方程的积分形式，可得角动量守恒方程(例如参考文献[4])：

$$\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{R}\times\rho\boldsymbol{u})+\nabla\cdot(\boldsymbol{R}\times\overleftrightarrow{T})=0,$$

$$\frac{\partial\boldsymbol{M}}{\partial t}+\nabla\cdot(\boldsymbol{R}\times\overleftrightarrow{T})=0.\qquad(1.16)$$

5. 螺旋性及守恒律

定义局部螺旋性(helicity)密度

$$K=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B},\quad \boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A},\quad \boldsymbol{E}=-\nabla\phi-\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t},\qquad(1.17)$$

其中 $\boldsymbol{B}$ 是磁场强度，而 $\boldsymbol{A}$ 则是矢势. 由法拉第定律，可导出

$$\frac{\partial K}{\partial t}+\nabla\cdot\boldsymbol{O}=-2\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{B},$$

其中 $\boldsymbol{O}=2\phi\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\times\partial\boldsymbol{A}/\partial t$，代入广义欧姆定律 $\boldsymbol{E}=\eta\boldsymbol{J}-\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B}$，可最后得出关于 K 的演化方程

$$\frac{\partial K}{\partial t}+\nabla\cdot\boldsymbol{O}=-2\eta\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{B}.\qquad(1.18)$$

下面是上式的证明过程. 按 K 的定义，有

$$\begin{aligned}\frac{\partial K}{\partial t}&=\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\\&=\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})+\boldsymbol{A}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\\&=\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}\cdot\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{E}).\end{aligned}$$

而按 $\boldsymbol{O}$ 的定义，有

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\boldsymbol{O}&=\nabla\cdot\left(2\phi\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\times\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}\right)\\&=2\nabla\phi\cdot\boldsymbol{B}+2\phi\nabla\cdot\boldsymbol{B}+\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}\cdot\nabla\times\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}\cdot\nabla\times\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}\\&=-2\left(\boldsymbol{E}+\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}\right)\cdot\boldsymbol{B}+\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}\cdot\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{E})\\&=-2\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{B}-\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}\cdot\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{E}).\end{aligned}$$

将上面两式相加即可得(1.18)式. 对于理想磁流体，由于电阻为零，上式具有微分守恒律形式——即局部螺旋性密度守恒

$$\frac{\partial K}{\partial t}+\nabla\cdot\boldsymbol{O}=0,\qquad(1.19)$$

如果将上式对全空间积分，会因 $\int_V\nabla\cdot\boldsymbol{O}\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\oint_S\boldsymbol{O}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=0$，而有

$$\frac{\partial\mathscr{K}}{\partial t}=0.\qquad(1.20)$$

于是可定义磁流体的整体螺旋性 $\mathscr{K}=\int_V\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}\mathrm{d}\boldsymbol{r}$，它在理想磁流体中是一个守恒量. 上式中的面积分为零可以从下面的推导中看出

$$\oint_S\boldsymbol{O}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=2\oint\phi\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}+\oint\left(\boldsymbol{A}\times\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}\right)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

$$= 2\oint\phi(\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}) + \oint\boldsymbol{A}\cdot\left(\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}\times\mathrm{d}\boldsymbol{S}\right).$$

考察上面等式最后得到的两项，对于理想磁流体来说，由于其流体元不带电，故第一项为零($\phi=0$)．又由于这时 $\boldsymbol{E}=-\partial\boldsymbol{A}/\partial t$，故第二项中 $\partial\boldsymbol{A}/\partial t\times\mathrm{d}\boldsymbol{S}=-\boldsymbol{E}\times\mathrm{d}\boldsymbol{S}$；而在理想磁流体的完全导体的界面($S$)上，电场 $\boldsymbol{E}$ 只能有垂直表面的分量(见附录 A)，所以被积函数 $\boldsymbol{E}\times\mathrm{d}\boldsymbol{S}=0$，从而第二项也为零．在物理上，整体螺旋性 $\mathscr{K}$ 代表一个磁场在不同方向上磁通间的耦合(交连)程度．例如图 1.3 中的两个封闭而交连的磁力线管，其螺旋性值为

$$\mathscr{K} = \int_V \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_{V_1}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}\mathrm{d}\boldsymbol{r} + \int_{V_2}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}\mathrm{d}\boldsymbol{r} = 2\psi_1\psi_2.$$

这是因为其中第一个积分

$$\begin{aligned}\int_{V_1}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}\mathrm{d}\boldsymbol{r} &= \int_{V_1}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}(\mathrm{d}\sigma_1\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}_1)\\ &= \int_{V_1}(\mathrm{d}\sigma_1\cdot\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}_1) + \int_{V_1}(\mathrm{d}\sigma_1\times\boldsymbol{A})\cdot(\mathrm{d}\boldsymbol{l}_1\times\boldsymbol{B})\\ &= \int\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\sigma_1\int\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}_1\\ &= \psi_1\int_{S_1}\nabla\times\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}_1\\ &= \psi_1\psi_2.\end{aligned}$$

而第二个积分与它相同．

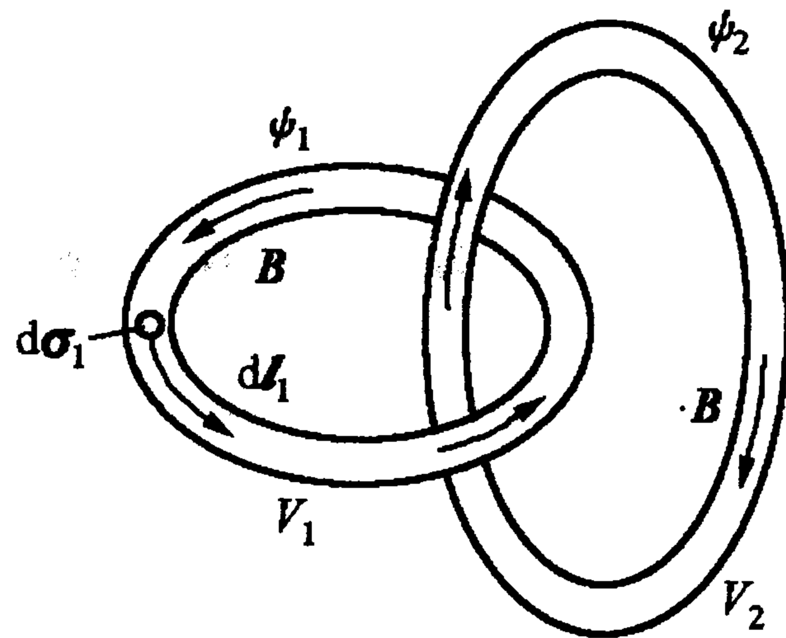


图 1.3　磁通交连图

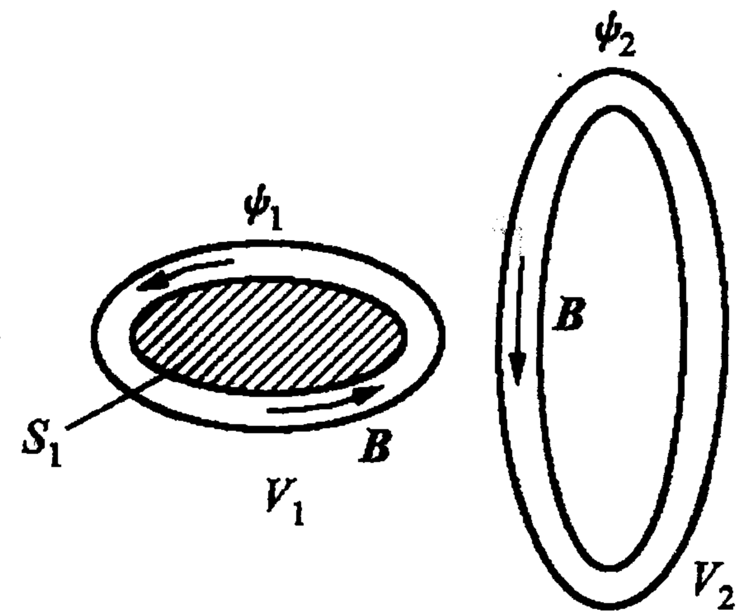


图 1.4　磁通不交连

而对于二根不耦合的螺旋管(见图 1.4)，因为通过 S_1 面无磁通 $\int_{S_1}\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}_1=0$，故

$$\mathscr{K} = 0.$$

因此 $\mathscr{K}$ 的值和磁场的拓扑结构有关．如图 1.5 的两类交连的磁通管就分别具有 $\mathscr{K}=-3\psi^2$ 和 $\mathscr{K}=+3\psi^2$．

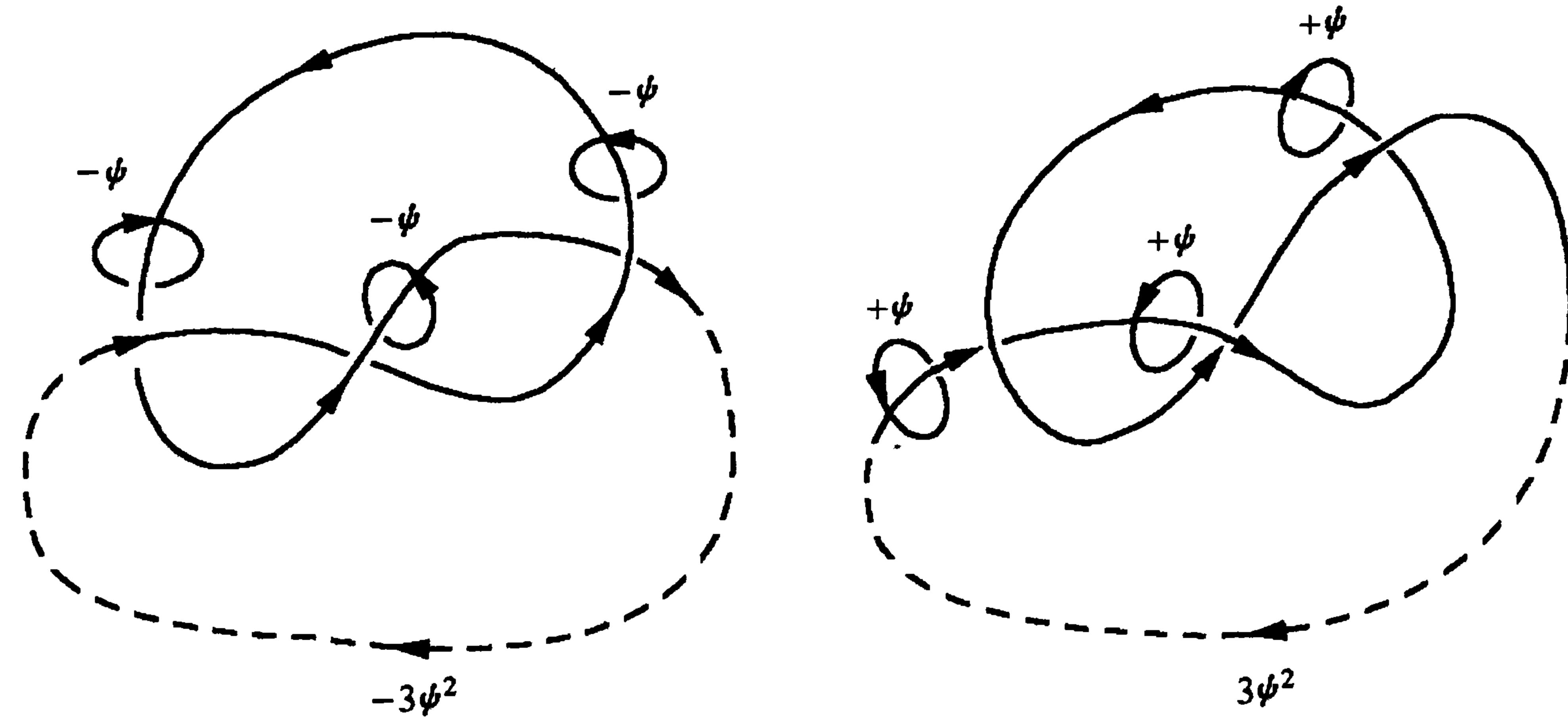


图 1.5　磁通多次交连

$\mathscr{K}$ 在理想磁流体中是不变量，其意义和磁力线冻结等价，即这时在某个磁面内的磁力线在随时间变化时不会跑出磁面，也不会增加或减少其缠绕的程度，因而磁场的拓扑结构不会因时间而变．但是对电阻磁流体，$\mathscr{K}$ 就会因欧姆耗散而随时间衰减．

当对磁流体外加一个和磁场平行的外电场时，方程(1.18)等号右面将增加相应的一项．这项等价于从外面向磁流体输入了一个外磁螺旋性，结果它可以补充磁流体内部因电阻而衰减了的磁螺旋性和等离子体电流．这个外电场可以是直流的，也可以是交变的．当加一个不随时间而改变方向的电场时，这就是所谓的用外加直流螺旋性的注入来驱动电流．而利用外加微波场也能补充由电阻而引起的直流螺旋性的衰减，同样达到维持或驱动等离子体电流的目的，这就称为非共振的射频螺旋性注入．这时令

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}_0 + \widetilde{\boldsymbol{B}},\quad \boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 + \widetilde{\boldsymbol{E}},\quad \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_0 + \widetilde{\boldsymbol{A}},$$

其中 $\widetilde{\boldsymbol{E}}=-\nabla\tilde{\phi}-\partial\widetilde{\boldsymbol{A}}/\partial t$. 在对快变(波场)的时间和空间尺度作平均后，局部螺旋密度的演化方程(1.18)中会多出一个由波场的平均螺旋性组成的附加项，即

$$\frac{\partial K_0}{\partial t}+\nabla\cdot\boldsymbol{O}_0=-2\eta\boldsymbol{J}_0\cdot\boldsymbol{B}_0-\left[\frac{\partial}{\partial t}\langle\widetilde{\boldsymbol{A}}\cdot\widetilde{\boldsymbol{B}}\rangle+\nabla\cdot\left(2\langle\tilde{\phi}\widetilde{\boldsymbol{B}}\rangle+\langle\widetilde{\boldsymbol{A}}\times\frac{\partial\widetilde{\boldsymbol{A}}}{\partial t}\rangle\right)+2\langle\widetilde{\boldsymbol{E}}\cdot\widetilde{\boldsymbol{B}}\rangle\right]. \tag{1.21}$$

在合适地调配了波场后可以使此等式右面大于或者等于零. 当等号右面等于零时，波所注入的正螺旋性正巧抵消了电阻所造成的螺旋性的衰退，而使磁流体的磁场拓扑保持不变，同时原来因电阻而在减少的电流会因此而维持一个恒定值. 而当上式右面大于零时，磁流体中的电流和磁场交连度还会不断增大. 因此，通过外加螺旋性的注入，可以在磁化等离子体中维持或驱动出一个稳态的电流.

另外，还有所谓的交叉螺旋性(cross-helicity)

$$K_c=\int_V\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{B}\mathrm{d}\boldsymbol{r},$$

对于不可压缩的理想磁流体来说，它也是一个守恒量. 下面是它的证明. 利用不可压缩性 $\partial\rho/\partial t=0$，从连续性方程可得 $\nabla\rho=0$，所以下面将取 $\rho=1$. 按定义

$$\begin{aligned}\frac{\partial K_c}{\partial t}&=\int_V\left(\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial t}\cdot\boldsymbol{B}+\boldsymbol{u}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\right)\mathrm{d}\boldsymbol{r}\\&=\int_V\{[-\boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{u}-\nabla P+\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{B}]\cdot\boldsymbol{B}\\&\quad+\boldsymbol{u}\cdot\nabla\times(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B})\}\mathrm{d}\boldsymbol{r}\\&=\int_V[-(\boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{u})\cdot\boldsymbol{B}+\boldsymbol{u}\cdot\nabla\times(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B})-\nabla P\cdot\boldsymbol{B}]\mathrm{d}\boldsymbol{r},\end{aligned}$$

其中 $-\nabla P\cdot\boldsymbol{B}=-\nabla\cdot(P\boldsymbol{B})$，而

$$\begin{aligned}-(\boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{u})\cdot\boldsymbol{B}&=[\boldsymbol{u}\times(\nabla\times\boldsymbol{u})-\nabla u^2/2]\cdot\boldsymbol{B}\\&=-[(\nabla\times\boldsymbol{u})\times\boldsymbol{u}]\cdot\boldsymbol{B}-\nabla(u^2\boldsymbol{B})/2\\&=-(\nabla\times\boldsymbol{u})\cdot(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B})-\nabla(u^2\boldsymbol{B})/2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}\cdot\nabla\times(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B})&=-\nabla\cdot[\boldsymbol{u}\times(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B})]+(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B})\cdot\nabla\times\boldsymbol{u}\\&=-\nabla\cdot[\boldsymbol{u}(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{B})-u^2\boldsymbol{B}]+\nabla\times\boldsymbol{u}\cdot(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B}).\end{aligned}$$

所以最后有

$$\begin{aligned}\frac{\partial K_c}{\partial t}&=\int_V\nabla\cdot[-P\boldsymbol{B}-(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{u}+u^2\boldsymbol{B}/2]\mathrm{d}\boldsymbol{r}\\&=-\oint_S(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}-u^2\boldsymbol{B}/2+P\boldsymbol{B})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}.\end{aligned}$$

若在边界面上无流体和磁场脱出 $u_n=B_n=0$，则有交叉螺旋性守恒 $\mathrm{d}K_c/\mathrm{d}t=0$.

交叉螺旋性可以看作普通流体力学中动理学螺旋性(kinetic helicity) $H^u=\int\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\omega}\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 的对应. 那里 $\boldsymbol{\omega}=\nabla\times\boldsymbol{u}$ 代表流体涡旋，由流体的运动方程及流体体系边界面上的 $u_n=\omega_n=0$，可证 H^u 是个守恒量. 而普通流体中关于涡旋的运动方程

$$\frac{\partial\omega}{\partial t}=\nabla\times(\boldsymbol{u}\times\omega)$$

正好和磁流体中磁场的演化方程(见下面关于磁冻结的讨论)

$$\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}=\nabla\times(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B})$$

相当.

1.3.2 位力(virial)定理

位力定理是克劳修斯于 1870 年对统计(多粒子)体系引进的，但为了理解其物理意义我们先从力学体系开始.

1. 经典力学体系 (参照文献[5])

若势能是坐标的齐次函数 $U=U(\boldsymbol{r}_1^k,\boldsymbol{r}_2^k,\cdots,\boldsymbol{r}_N^k)=U(\{\boldsymbol{r}_i^k\})$，则一定有

$$U(\{(\alpha\boldsymbol{r}_i)^k\})=\alpha^kU(\{\boldsymbol{r}_i^k\}).$$

位力定理指出，一个在这样势场中运动的粒子系如果处于平衡状态的话，则应当有

$$2\overline{K}=k\overline{U},\tag{1.22}$$

其中 $\overline{K}$ 是作了时间平均的体系动能，而 $\overline{U}$ 则是对时间平均了的体系势能. 上式的具体的推导如下，由牛顿方程出发

$$m_i\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}_i}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{F}_i=-\frac{\partial U_i}{\partial \boldsymbol{r}_i},$$

用 $\boldsymbol{r}_i$ 同时点乘上式

$$m_i\boldsymbol{r}_i\cdot\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}_i}{\mathrm{d}t^2}=-\boldsymbol{r}_i\cdot\frac{\partial U_i}{\partial\boldsymbol{r}_i},$$

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(m_ir_i^2)-m_iu_i^2=-\boldsymbol{r}_i\cdot\frac{U_i}{r_i^k}k\boldsymbol{r}_i^{k-1},$$

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(m_ir_i^2)-2K_i=-kU_i.$$

令某量 A 的时间平均为

$$\overline{A}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T A\mathrm{d}t,$$

则

$$\overline{\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(m_ir_i^2)}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m_ir_i^2)\Big|_0^\infty.$$

对于平衡态来说，上式右端两个积分限处的值是相等的，故上式左端平均值应当为零. 这样

$$2\,\overline{K_i}=k\,\overline{U_i},$$

然后对所有粒子求和，令 $\sum_i\overline{K_i}=\overline{K}$，$\sum_i\overline{U_i}=\overline{U}$，就可以得出(1.22)式，其中 $-k\overline{U}$ 就是力学体系的位力，因为从证明过程可知 $\boldsymbol{F}_i=-\partial U_i/\partial\boldsymbol{r}_i=-kU_i/\boldsymbol{r}_i$，故位力(以 V 表示)也可以写成

$$V=-k\overline{U}=\sum_i^N\overline{\boldsymbol{r}_i\cdot\boldsymbol{F}_i},$$

而位力定理也可以写成更一般的形式

$$2\overline{K}+V=0.$$

下面举几个例子.

(i) 重力场. 其势能为

$$U_i=-\frac{Gm_i}{|\boldsymbol{r}_i|},\quad k=-1,$$

故位力为

$$V=-k\overline{U}=-\sum_i\overline{\frac{Gm_i}{|\boldsymbol{r}_i|}}.\tag{1.23}$$

由上式可知位力总是负的，故它与动能之和可以为零，满足位力定理. 因此在重力场中的粒子体系可以处在平衡态.

(ii) 同种带电粒子间的库仑斥力场. 这时库仑势及位力分别为

$$U_i=\sum_j\frac{q^2}{|\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}_j|},\quad k=-1,$$

$$V=-k\overline{U}=\sum_{i\neq j}\overline{\frac{q^2}{|\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}_j|}}.$$

于是此时的位力永远为正，加上永为正的动能后，不可能为零，也即位力定理永远不会被满足. 这样由同种电荷的粒子组成的体系，除非存在约束它们的外场，是不可能处于平衡状态的.

(iii) 弹性振子系. 弹性势能及位力为

$$U_i=\alpha r_i^2,\quad k=2,\quad V=-k\overline{U}=-2\sum_i\alpha\,\overline{r_i^2},$$

这时位力为负，故位力定理可以被满足. 因此弹性振子组成的多粒子体系有平衡位形存在.

相对论力学体系中的位力定理，请参见文献[6].

2. 量子力学体系(参考文献[7])

这时仍有位力定理

$$2\overline{K}+V=0,\quad V=-k\overline{U}.$$

只是要定义

$$\overline{K}=\int\frac{\hbar^2}{2m}|\nabla\psi(\boldsymbol{r}')|^2\mathrm{d}\boldsymbol{r}',$$

$$\overline{U}=\int U(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^k)|\psi(\boldsymbol{r}')|^2\mathrm{d}\boldsymbol{r}'.$$

3. 经典统计物理体系(参见文献[8])

在经过足够长的时间后,如果有限空间体系能达到热力学平衡,则应满足位力定理

$$2\overline{K} + V = 0.$$

其中

$$2\overline{K} = \sum_i m_i v_i^2 = \int m v^2 f_M(v^2, \boldsymbol{r}) \mathrm{d}\boldsymbol{r} \mathrm{d}\boldsymbol{v},$$

而 f_M 是麦克斯韦速度分布函数,归一到粒子密度 $\int f_M \mathrm{d}\boldsymbol{v} = n(\boldsymbol{r})$.

令

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{w}, \quad n\boldsymbol{u} = \int \boldsymbol{v} f_M(v^2) \mathrm{d}\boldsymbol{v}, \quad \int \boldsymbol{w} f_M \mathrm{d}\boldsymbol{v} = 0,$$

则可证

$$\begin{aligned} 2\overline{K} &= \int nm\mathrm{d}\boldsymbol{r} \int (u^2 + 2\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{w} + w^2) f_M \mathrm{d}\boldsymbol{v} \\ &= \int \rho(u^2 + 3T)\mathrm{d}\boldsymbol{r} \\ &= \int (\rho u^2 + 3P)\mathrm{d}\boldsymbol{r}. \end{aligned}$$

而位力定义为

$$V = \sum_i \boldsymbol{r}_i \cdot \boldsymbol{F}_i.$$

其中 $\boldsymbol{F}_i$ 由分子相互作用力和壁对分子的作用力两部分组成,

$$\boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{F}_i^{\mathrm{I}} + \boldsymbol{F}_i^{\mathrm{w}},$$

而上式中的 $\boldsymbol{F}_i^{\mathrm{I}}$ 就是分子间相互作用势产生的力,$\boldsymbol{F}_i^{\mathrm{w}}$ 则是器壁对分子体系的作用力.

$$\sum_i \boldsymbol{r}_i \cdot \frac{\partial U_i}{\partial \boldsymbol{r}_i} = -k\sum_i U_i.$$

令 $\sum_i U_i = -\sum_i m_i\phi_i = \int \rho\phi \mathrm{d}\boldsymbol{r}$,故相互作用的位力可写成

$$V^{\mathrm{I}} = -k\int \rho\phi \mathrm{d}\boldsymbol{r}. \tag{1.24}$$

当无器壁时,$\boldsymbol{F}_i^{\mathrm{w}}$ 及相应的位力 V^{w} 也为零. 当存在器壁时,粒子系对壁的总作用力是 $\int P\mathrm{d}\boldsymbol{S}$,其方向由体系内指向壁外;相应的反作用力(壁对体系的总作用力)则是 $-\int P\mathrm{d}\boldsymbol{S}$. 平均到每个粒子上,其所受到的作用力是

$$\boldsymbol{F}_i^{\mathrm{w}} = -\frac{1}{N}\int P\mathrm{d}\boldsymbol{S}.$$

这样相应的位力为

$$\begin{aligned} V^{\mathrm{w}} &= -\frac{1}{N}\sum_i \int_S P\boldsymbol{r}_i \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \\ &= -\frac{1}{N}\sum_i \int_V P\,\nabla\cdot\boldsymbol{r}_i \mathrm{d}\boldsymbol{r} \\ &= -\frac{1}{N}\sum_i \int 3P\mathrm{d}\boldsymbol{r} = -3\int P\mathrm{d}\boldsymbol{r}, \end{aligned}$$

其中用到了高斯定理及在体系达到平衡后

$$P(r) = \begin{cases} \text{常数}, & \text{在壁内}, \\ 0, & \text{在壁上}. \end{cases}$$

最后对有壁体系有位力定理

$$2\overline{K} + V = 0 = \int (\rho u^2 + 3P)\mathrm{d}\boldsymbol{r} + \int (-k\rho\phi - 3P)\mathrm{d}\boldsymbol{r},$$

即

$$\int (\rho u^2 - k\rho\phi)\mathrm{d}\boldsymbol{r} = 0. \tag{1.25}$$

对于重力势有 $\phi<0$,且 $k=-1$,则上面的位力定理变成

$$\int (\rho u^2 + \rho\phi)\mathrm{d}\boldsymbol{r} = 0.$$

当 $u=0$ 时,对无重力作用($\phi=0$)的体系,位力定理能满足;而当 $u\neq 0$ 时,合适的重力势($\phi<0$)也能使位力定理得到满足;在这两种情况下粒子系的平衡位形都能达到.

对无壁的体系,位力定理可写作

$$2\overline{K} + V = \int (\rho u^2 + 3P - k\rho\phi)\mathrm{d}\boldsymbol{r} = 0. \tag{1.26}$$

当位势是重力势时，位力定理变成

$$\int (\rho u^2 + 3P + \rho\phi)\mathrm{d}\boldsymbol{r} = 0.$$

对地球大气这样的体系 $u=0$，热运动为重力势($\phi<0$)所平衡，故可以达到平衡位形；但对小得多的实验室粒子系，其 $\rho\phi\approx 0$，不足以抵消热运动，即使 $u=0$，体系的平衡也不能自行达到，这时体系的平衡状态必须要靠器壁来维持.

4. 带电粒子系

这时

$$\boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{F}_i^{\mathrm{I}} + \boldsymbol{F}_i^{\mathrm{w}} + \boldsymbol{F}_i^{\mathrm{em}}.$$

因此位力中出现新的电磁能项，对于电中性的磁流体来说

$$V^{\mathrm{em}} = \int \frac{B^2}{2\mu}\mathrm{d}\boldsymbol{r}, \tag{1.27}$$

故总的磁流体位力定理(在无器壁时)可写成为

$$\int \left(\rho u^2 + \frac{B^2}{2\mu} + 3P + \rho\phi \right) \mathrm{d}\boldsymbol{r} = 0. \tag{1.28}$$

由于上式中的前三项总是大于等于零，只有最后一项才可能为负. 故只有像太阳那样巨大的等离子体体系才能具有足够大的 $\rho\phi<0$，以使上式(位力定理)得到满足而保有平衡位形. 对地球实验室中的等离子体，其重力势能 $\rho\phi\approx 0$，因此即使 $u=0$ 时其磁能和热能也会使无约束的等离子体体系飞散.

下面利用理想磁流体方程组来给出相应位力定理的严格推导. 定义惯性矩

$$\overleftrightarrow{\mathscr{I}}_V = \int_V \rho \boldsymbol{r}\boldsymbol{r}\mathrm{d}\boldsymbol{r}, \tag{1.29}$$

其中 $\boldsymbol{r}$ 是流体元到惯性中心的距离. 上式的时间导数为

$$\frac{\mathrm{d}\overleftrightarrow{\mathscr{I}}_V}{\mathrm{d}t} = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t}\boldsymbol{r}\boldsymbol{r}\mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

$$= -\int_V \nabla\cdot(\rho\boldsymbol{u})\boldsymbol{r}\boldsymbol{r}\mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

$$= \int_V (\rho\boldsymbol{u}\boldsymbol{r} + \boldsymbol{r}\rho\boldsymbol{u})\mathrm{d}\boldsymbol{r},$$

上式的最后一步用到了分部积分及 $\boldsymbol{u}\cdot\nabla(\boldsymbol{r}\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{u}\boldsymbol{r} + \boldsymbol{r}\boldsymbol{u}$. 对上式再作一次时间导数

$$\frac{\mathrm{d}^2\overleftrightarrow{\mathscr{I}}_V}{\mathrm{d}t^2} = \int_V \left(\frac{\partial \rho\boldsymbol{u}}{\partial t}\boldsymbol{r} + \boldsymbol{r}\frac{\partial \rho\boldsymbol{u}}{\partial t} \right)\mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

$$= -\int_V [(\nabla\cdot\overleftrightarrow{T})\boldsymbol{r} + \boldsymbol{r}(\nabla\cdot\overleftrightarrow{T})]\mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

$$= 2\int_V \overleftrightarrow{T}\mathrm{d}\boldsymbol{r},$$

其中 $\overleftrightarrow{T}$ 是磁流体的动量流，在推导中用到了分部积分及动量守恒方程(1.11). 对上式作长时间平均，当时间足够长、使体系达到平衡态后，可证其等号左面为零

$$\overline{\frac{\mathrm{d}^2\overleftrightarrow{\mathscr{I}}_V}{\mathrm{d}t^2}} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\left.\frac{\mathrm{d}\overleftrightarrow{\mathscr{I}}_V}{\mathrm{d}t}\right|_0^\infty = 0,$$

则等号右面的长时间平均也必须为零(为了方便，下面用 $\langle A\rangle$ 来代替 $\overline{A}$)，

$$\left\langle \int_V \overleftrightarrow{T}\mathrm{d}\boldsymbol{r} \right\rangle = 0.$$

这是一个张量关系，通常只用它的一个标量关系——取其迹

$$\mathrm{tr}\left[\left\langle \int \overleftrightarrow{T}\mathrm{d}\boldsymbol{r} \right\rangle \right] = 0,$$

这就是磁流体的位力定理

$$\left\langle \int_V \left(\rho u^2 + \frac{B^2}{2\mu} + 3P + 3\rho\phi \right)\mathrm{d}\boldsymbol{r} \right\rangle = 0. \tag{1.30}$$

1.3.3 磁压力和磁张力

1.3.1 小节中定义的张力张量 $\overleftrightarrow{T}$ 中的磁场部分称为磁张力张量

$$\overleftrightarrow{T}_{\mathrm{M}} = \frac{B^2}{2\mu}\overleftrightarrow{I} - \frac{1}{\mu}\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}, \tag{1.31}$$

由此相应的磁力为

$$\boldsymbol{F} = -\nabla\cdot\overset{=}{T}_{\mathrm{M}} = \nabla\cdot\frac{\boldsymbol{BB}}{\mu} - \nabla\cdot\left(\frac{B^2}{2\mu}\overset{=}{I}\right).$$

一般取 $\mu=\mu_0=$ 常数，因此上式右面第二项

$$\nabla\cdot\left(\frac{B^2}{2\mu}\overset{=}{I}\right) = \frac{1}{2\mu}\nabla B^2$$

被称为磁压力，是热压力的对应量. 磁压力的方向从磁场强处指向磁场弱处(见图 1.6)，它和热压力一样可以使磁场的疏密(即磁场的强弱)扰动向外传播，这时所产生的波和声波一样是纵波，称为(慢)磁声波. 如果热压力和磁压力同时驱动磁流体的扰动向外传播，就会产生波速更快的快磁声波.

而另一项 $\nabla\cdot\frac{\boldsymbol{BB}}{\mu}$ 则称为磁张力，它可以进一步改写成物理意义更清楚的形式

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\frac{\boldsymbol{BB}}{\mu} &= \frac{1}{\mu}(\nabla\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{B} + \frac{1}{\mu}\boldsymbol{B}\cdot\nabla\boldsymbol{B}\\ &= \frac{1}{\mu}B(\boldsymbol{b}\cdot\nabla)B\boldsymbol{b}\\ &= B[(\boldsymbol{b}\cdot\nabla)B]\boldsymbol{b} + B[B(\boldsymbol{b}\cdot\nabla)\boldsymbol{b}]\\ &= \frac{1}{2}\boldsymbol{bb}\cdot\nabla B^2 + B^2\boldsymbol{\kappa}.\end{aligned}$$

其中 $\boldsymbol{b}$ 是 $\boldsymbol{B}$ 方向上的单位矢量，$\boldsymbol{\kappa}=\boldsymbol{b}\cdot\nabla\boldsymbol{b}$ 是磁力线上某点的曲率，其绝对值为 $\kappa=|\mathrm{d}\boldsymbol{b}/\mathrm{d}l_{\parallel}|$，而方向则指向磁力线上此点的曲率中心(见图 1.7). 当磁力线是一根直线时，其上各处的曲率 $\boldsymbol{\kappa}$ 均为

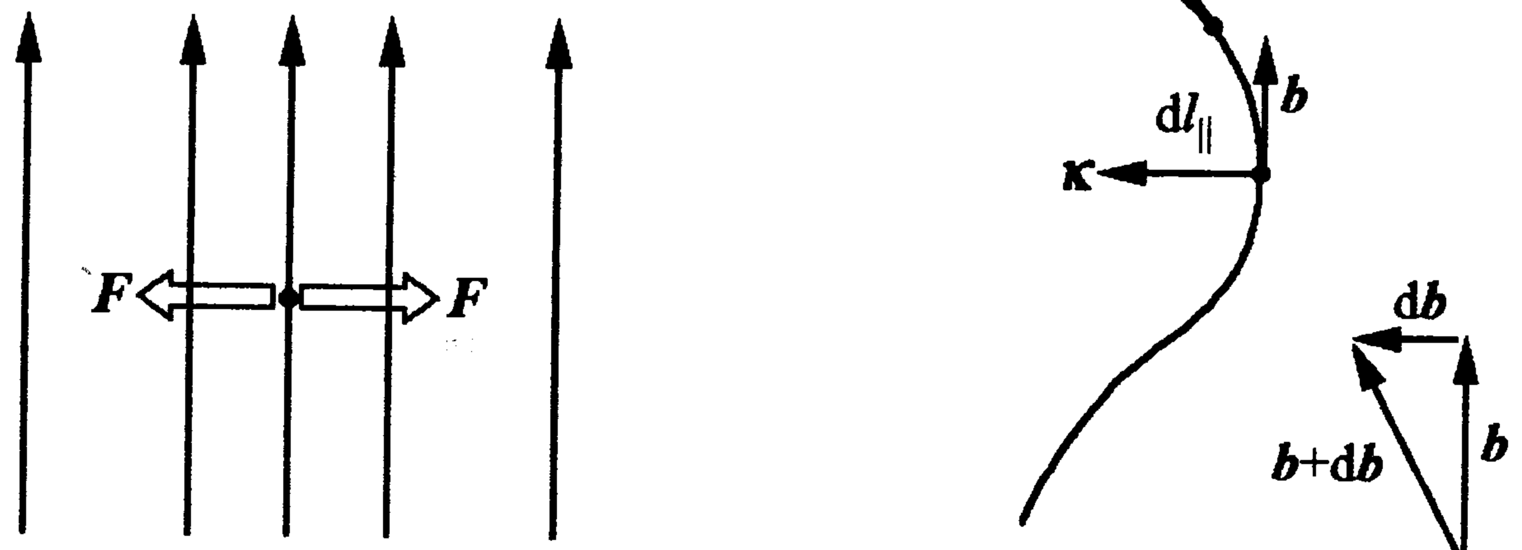


图 1.6　磁压力

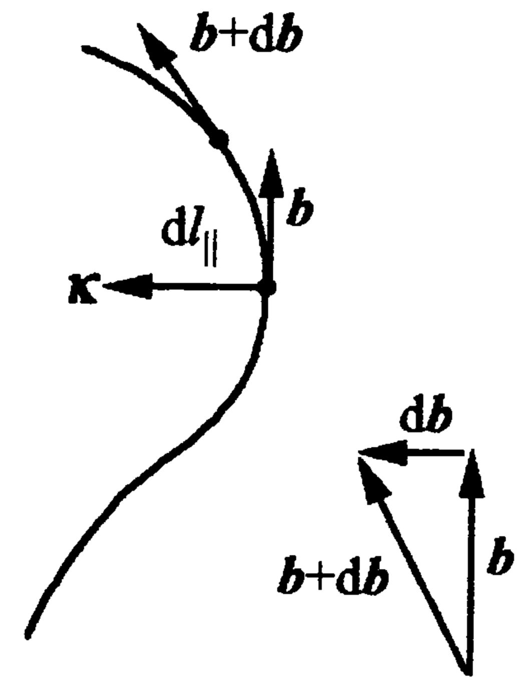


图 1.7　磁力线的曲率

零，因此磁张力也处处为零，和磁场的强弱无关，这是和磁压力不同的. 当磁场(力线)是弯曲的时候，例如从图 1.8 中的 $z_0/2$ 处来看，这时指向曲率中心的磁张力可以看成由两个沿着磁力线正、反方向的分力合成的合力，因此称为磁张力. 它和橡皮筋在横向弹拉时产生的弹性张力相似，因此许多人把磁力线描述成弹性的橡皮筋，但这只是反映了磁张力的性质，而没有包括磁压力的性质在内. 磁张力由于和弹性力相似，所以可以在沿磁带线方向上驱动出横向的磁流体波. 对于理想磁流体，由于流体和磁力线冻结在一起，故此波既是电磁的横波也是流体的横波，称为阿尔文(Alfvén)波或者剪切阿尔文波.

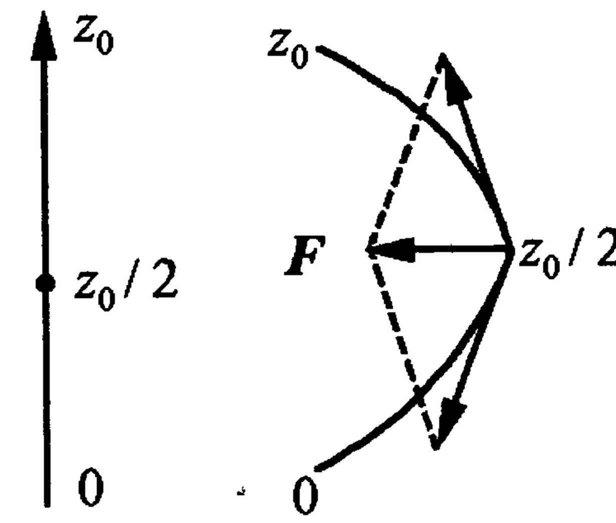


图 1.8　磁张力

下面给出磁张力和磁压力在磁力线坐标

$$(\boldsymbol{e}_{\perp 1},\boldsymbol{e}_{\perp 2},\boldsymbol{b})$$

中的表达式

$$\boldsymbol{F} = \frac{1}{\mu}B^2\boldsymbol{\kappa} + \frac{1}{2\mu}[\boldsymbol{bb}\cdot\nabla B^2 - \nabla B^2].$$

在此坐标系中

$$\nabla = \boldsymbol{b}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}l_{\parallel}} + \boldsymbol{e}_{\perp 1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}l_{\perp 1}} + \boldsymbol{e}_{\perp 2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}l_{\perp 2}},$$

故

$$\begin{aligned}\boldsymbol{bb}\cdot\nabla - \nabla &= \boldsymbol{b}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}l_{\parallel}} - \nabla\\ &= -\boldsymbol{e}_{\perp 1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}l_{\perp 1}} - \boldsymbol{e}_{\perp 2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}l_{\perp 2}}\\ &= -\nabla_{\perp}.\end{aligned}$$

所以最后有

$$\boldsymbol{F} = \frac{1}{\mu}B^2\boldsymbol{\kappa} - \frac{1}{2\mu}\nabla_{\perp}B^2. \tag{1.32}$$

(1.32)式表明，磁压力只作用在垂直于磁场的方向上，在平行于磁

场的方向上并不存在磁压力. 和磁张力能驱动出沿磁力线传播的磁流体力学横波不同,磁压力能驱动出横越磁力线传播的磁流体力学纵波.

1.4 磁场的描述

1.4.1 力线方程

按定义,力线的方向就是磁场的方向,即

$$\frac{d\boldsymbol{l}}{dl} = \frac{\boldsymbol{B}}{B}.$$

在直角坐标系中为

$$\frac{dl_x}{B_x} = \frac{dl_y}{B_y} = \frac{dl_z}{B_z} = \frac{dl}{B}.$$

在一般的正交坐标系($\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$)中,$d\boldsymbol{l}=(dl_1,dl_2,dl_3)$,$\boldsymbol{B}=(B_1,B_2,B_3)$;则相应的磁力线方程为

$$\frac{dl_1}{B_1} = \frac{dl_2}{B_2} = \frac{dl_3}{B_3}.$$

例如,对柱坐标系(r,θ,z),其力线方程式为

$$\frac{dr}{B_r} = \frac{rd\theta}{B_\theta} = \frac{dl_z}{B_z}.$$

对于一根盘旋在 $r=r_0$ 柱面上的磁力线,从上式可得关于其螺距的方程

$$\frac{d\theta}{dz} = \frac{B_0}{rB_z},$$

积分后可得

$$\delta\theta = \int d\theta = \int_0^{\delta z} \frac{B_\theta}{rB_z} dz.$$

通常我们常用直柱来近似代替环形磁场位形,这时 $\boldsymbol{e}_z$ 就相当于环向 $\boldsymbol{e}_\phi$,当磁力线环绕大环一周时相当于在直柱的 z 向前进了 $\Delta z=$

$2\pi R$(R 是大环半径),而同时在柱面的 θ 方向上转过了(按上面的积分公式)

$$\Delta\theta = \frac{2\pi R}{r}\frac{B_\theta}{B_z}.$$

由此可以定义磁力线的"回转变换角"

$$\iota = \frac{\Delta\theta}{2\pi} = \frac{R}{r}\frac{B_\theta}{B_z}, \tag{1.33}$$

及它的倒数——"安全因子"

$$q = \iota^{-1} = \frac{r}{R}\frac{B_z}{B_\theta}. \tag{1.34}$$

这两个量将在后面的讨论中频繁使用,其导出正是利用了磁力线方程.

1.4.2 磁力线的标量场表示法

现在来看力线方程的通解,从直角坐标系中的力线方程可以得出两个独立的微分方程

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B_y}{B_x}, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{B_z}{B_x},$$

它们的通解是两组空间曲面

$$\alpha(x,y,z) = C_1, \quad \beta(x,y,z) = C_2,$$

其中 C_1,C_2 分别是两组常数,每取一个具体值就对应一个空间曲面. 改变它们的值就得到了两组空间曲面. 而每根磁力线就是其中两个空间曲面 $\alpha=C_1$ 及 $\beta=C_2$ 的交线:

$$\boldsymbol{B} = \nabla\alpha \times \nabla\beta, \tag{1.35}$$

其中 $\nabla\alpha,\nabla\beta$ 则分别是这两个曲面的法线方向. 这就是说可以用两个标量场 $\alpha(\boldsymbol{r}),\beta(\boldsymbol{r})$来表示一个矢量场 $\boldsymbol{B}$. 而且这个矢量场还能满足

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B} = 0,$$

故上述对磁场的定义(1.35)式合理. 但对应于一个确定的磁场 $\boldsymbol{B}$，表示它的标量场(α,β) 并不唯一. 例如$(\alpha'=\alpha+f(\beta),\beta)$ 和$(\alpha,\beta'=\beta+g(\alpha))$就都描述同一磁场(其中 $f(\beta)$, $g(\alpha)$分别是各自变量的任意函数)，这只需注意到 $\nabla\alpha\times\nabla\alpha=\nabla\beta\times\nabla\beta=0$ 即可. 下面来讨论表示同一磁场的两组标量场(α,β)和(α',β')间的关系. 因为

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})=\nabla\alpha(\boldsymbol{r})\times\nabla\beta(\boldsymbol{r})=\nabla\alpha'(\boldsymbol{r})\times\nabla\beta'(\boldsymbol{r}),$$

由后一个等式可以知道原则上可以用(α,β)作自变量来表示出(α',β')(或相反)，

$$\alpha'=\alpha'(\alpha,\beta),\quad \beta'=\beta'(\alpha,\beta).$$

于是

$$\nabla\alpha'(\boldsymbol{r})\times\nabla\beta'(\boldsymbol{r})=\left(\frac{\partial\alpha'}{\partial\alpha}\nabla\alpha+\frac{\partial\alpha'}{\partial\beta}\nabla\beta\right)\times\left(\frac{\partial\beta'}{\partial\alpha}\nabla\alpha+\frac{\partial\beta'}{\partial\beta}\nabla\beta\right)$$
$$=(\nabla\alpha\times\nabla\beta)\left(\frac{\partial\alpha'}{\partial\alpha}\frac{\partial\beta'}{\partial\beta}-\frac{\partial\alpha'}{\partial\beta}\frac{\partial\beta'}{\partial\alpha}\right).$$

结果应当有条件

$$\left(\frac{\partial\alpha'}{\partial\alpha}\frac{\partial\beta'}{\partial\beta}-\frac{\partial\alpha'}{\partial\beta}\frac{\partial\beta'}{\partial\alpha}\right)=1. \tag{1.36}$$

从另一方面来看，即如果把(α,β)和(α',β')当成两组广义坐标时，则上面的条件表示它们间的变换雅可比矩阵应该为 1，或者说相应变换必须是一种等面积变换.

1.4.3 轴对称下的磁面和磁面坐标

1. 当磁场存在对称性时

例如在某个(α,β,γ)坐标系中若有 $\partial/\partial\gamma=0$，则只需一个标量场就可以描述磁场了，这是因为

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=\nabla_\alpha B_\alpha+\nabla_\beta B_\beta+\nabla_\gamma B_\gamma=\nabla_\alpha B_\alpha+\nabla_\beta B_\beta=0,$$

故如果取一个标量函数 ψ，使 $B_\alpha=\nabla_\beta\psi$, $B_\beta=-\nabla_\alpha\psi$，即可满足 $\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$. 例如，当柱坐标系$(r,\theta,z)$中存在角向对称 $\partial/\partial\theta=0$ 时，可取

$\psi=\psi(r,z)$，并令

$$\boldsymbol{B}=\frac{1}{r}\nabla\psi\times\boldsymbol{e}_\theta, \tag{1.37}$$

即

$$B_z=\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r},\quad B_r=-\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial z}.$$

2. 环形磁场

这是一种实验室中常见的磁场形态，但一般教科书上很少介绍. 为了给出它的表达式，下面来看几种磁场.

(i) 无限长载流导线所产生的磁场(见图 1.9).

通常采用两种柱坐标系统，为了区别，也将它们各称为大柱坐标系(R,ϕ,Z)和小柱坐标系(r,θ,ϕ)，详见 2.2 节. 取大柱坐标系(R,ϕ,Z)，若有 Z 向电流 $\boldsymbol{I}=I\boldsymbol{e}_\phi$，则会产生一个环向$(\boldsymbol{e}_\phi)$的磁场

$$\boldsymbol{B}_\phi=\frac{\mu}{2\pi}\frac{I}{R}\boldsymbol{e}_\phi.$$

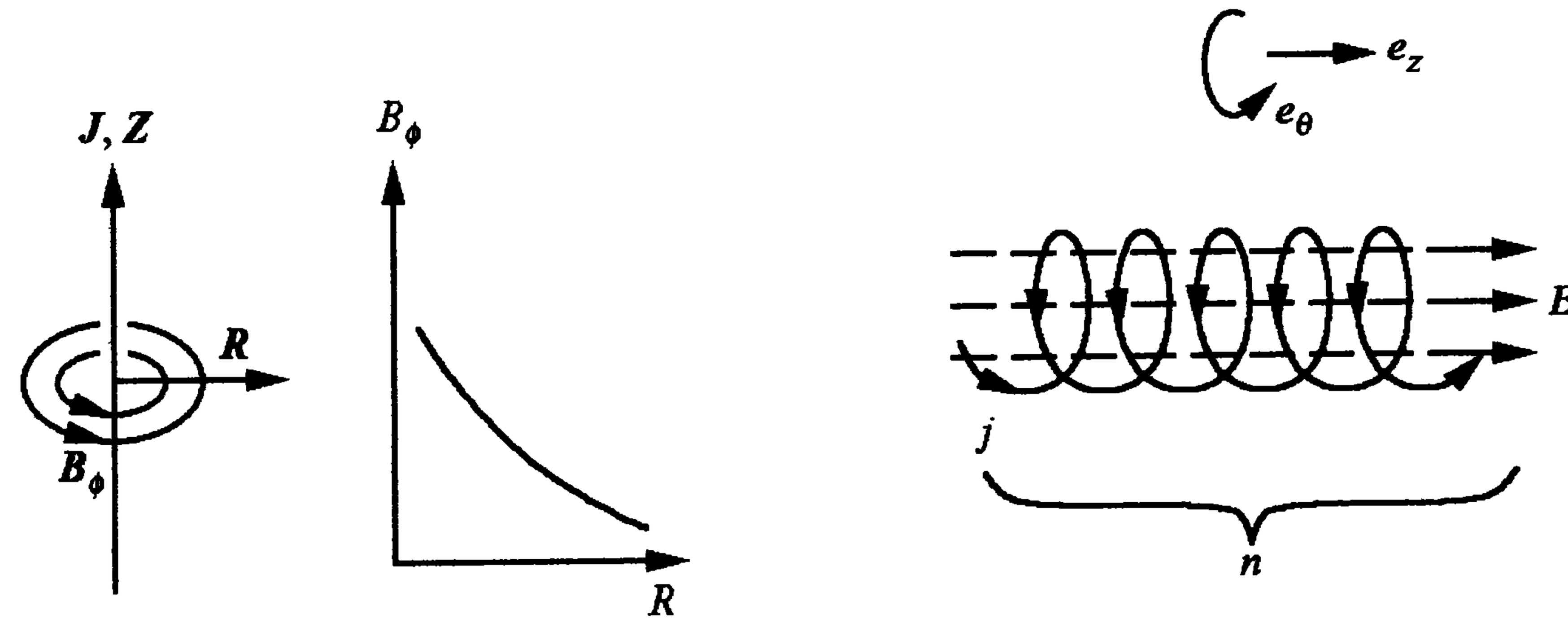


图 1.9 无限长载流导线所产生的磁场

图 1.10 无限长载流螺管所产生的磁场

(ii) 无限长载流螺管所产生的磁场(图 1.10).

取(θ,z)坐标系，如图 1.10，设线圈中每匝上流过的电流是 j，单位长度上的线圈数为 n，则产生的磁场在 z 方向，并且只存在于螺管之中(螺管外磁场为零)：

$$\boldsymbol{B}=\mu nj\boldsymbol{e}_z=\mu I\boldsymbol{e}_z.$$

(iii) 载流环形螺管(或环形排列的分立线圈)所产生的磁场(见图1.11).

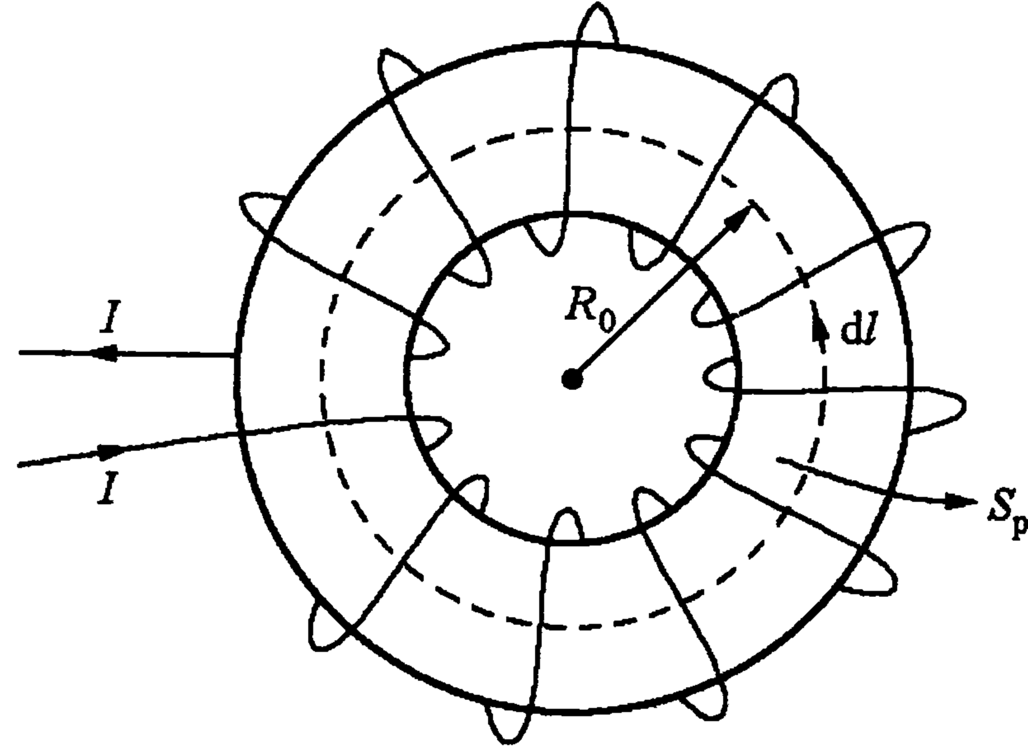


图 1.11 载流环形螺管(或环形排列的分立线圈)所产生的磁场

设有 n 个在环向(等间角)均匀排列的电流圈,它们的中心位于大半径为 R_0 的大环上,每个电流圈的小半径是 a. 这些电流圈在空间形成了一个沿大环方向的磁场. 在电流圈数 n 足够大时,可以证明:环向磁场的强度随大半径(空间某点离对称轴的距离)R 而单调下降.

设每个电流圈中流过的电流密度和电流分别为 $\boldsymbol{j},\boldsymbol{i}$,由安培定律

$$\int_{S_p} \nabla\times\boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}_p = \mu\int_{S_p}\boldsymbol{j}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}_p,$$

$$\oint \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \mu n i,$$

$$2\pi R B_\phi(R) = \mu I \quad (I = ni),$$

其中 S_p 是过空间任意点(R,Z)、半径为 R、垂直于对称轴 $\boldsymbol{Z}$ 的圆面(其面积元的法线方向在 Z 向). 利用

$$2\pi R_0 B_\phi(R_0) = \mu I,$$

可得

$$\boldsymbol{B}_\phi(R) = B_0\frac{R_0}{R}\boldsymbol{e}_\phi = B_0\frac{R_0}{R_0 + r\cos\theta}\boldsymbol{e}_\phi. \tag{1.38}$$

可见,环形电流圈所产生的磁场像无限长载流导线所产生的磁场,其方向在环向而大小反比于大半径(见图 1.9 和图 1.12).

(iv) 环形电流圈所产生的磁场(见图 1.13).

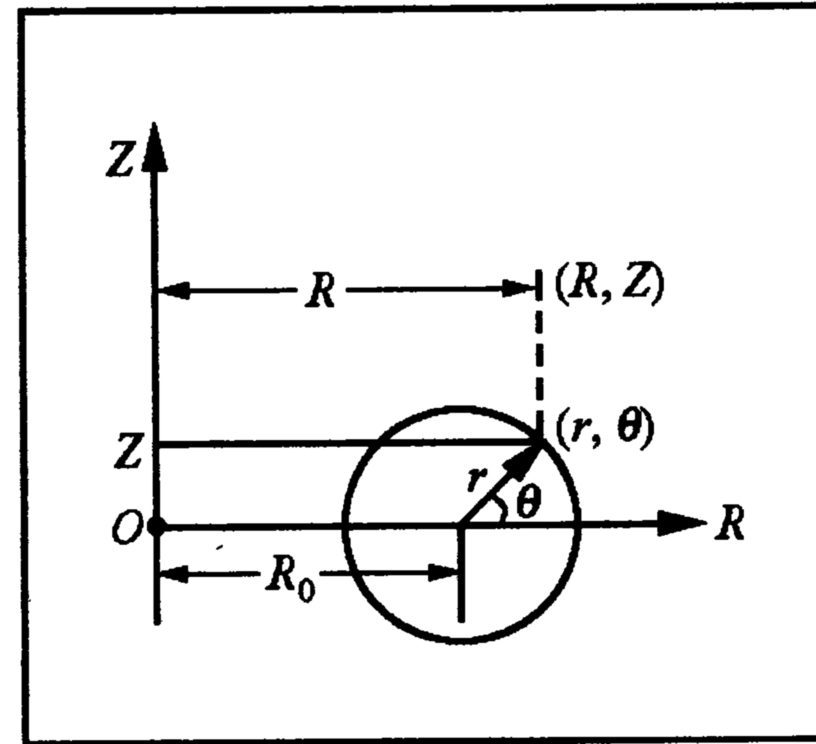


图 1.12 环形磁场强度

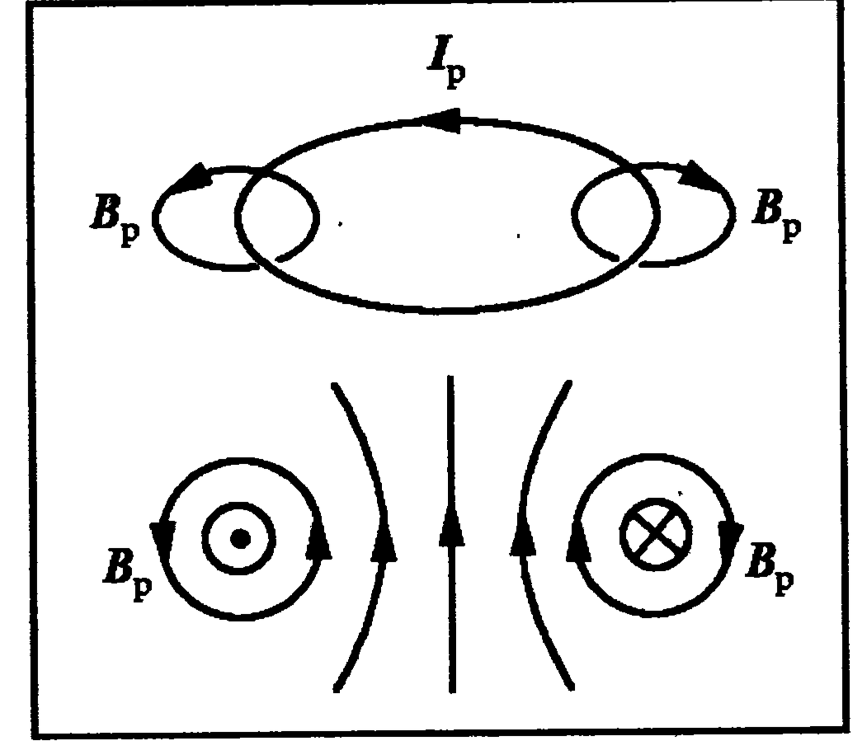


图 1.13 环形电流圈所产生的磁场

设电流沿着环向 $\boldsymbol{e}_\phi$,由于有 $\partial/\partial\phi=0$,故可以引入角向磁通 ψ 来表示此磁场

$$\boldsymbol{B}_p = \frac{1}{2\pi R}\nabla\psi\times\boldsymbol{e}_\phi = \frac{1}{2\pi}\nabla\psi\times\nabla\phi. \tag{1.39}$$

对于大柱坐标系(R,ϕ,Z),有分量

$$B_R = -\frac{1}{2\pi R}\frac{\partial\psi}{\partial Z},\quad B_Z = \frac{1}{2\pi R}\frac{\partial\psi}{\partial R}. \tag{1.40}$$

而如取小柱坐标系(r,θ,ϕ),有分量

$$B_r = -\frac{1}{2\pi R}\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta},\quad B_\theta = \frac{1}{2\pi R}\frac{\partial\psi}{\partial r}. \tag{1.41}$$

(v) 最后讨论 tokamak 等离子体中的磁面(见图 1.14).

tokamak 中存在一个外加的环向磁场,其等离子体中又有环向电流产生的角向磁场,因此总磁场是两者的叠加:

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}_\phi + \boldsymbol{B}_p = \boldsymbol{B}_\phi + \frac{1}{2\pi R}\nabla\psi\times\boldsymbol{e}_\phi.$$

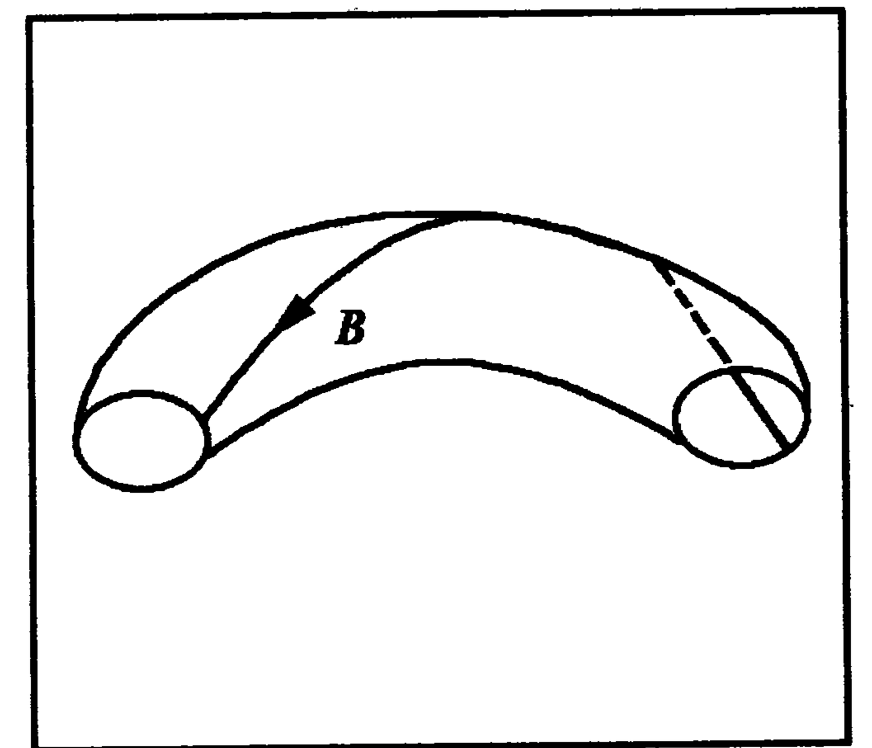


图 1.14 tokamak 等离子体中的磁面

这种磁场的磁力线会沿环面绕行,反复穿过同一小截面,最后形成磁面(见图 1.15). 设磁力线绕大环 n 圈时绕小环 m 圈,则当 $n/m=$有理

数时，磁力线最后闭合，所形成的磁面称为有理磁面；而当 n/m=无理数时，磁力线永不闭合，形成了一个致密的磁面，即无理磁面. 这一个个闭合的环形磁面在 tokamak 中是相互嵌套的，形成一个致密的磁网(见图 1.16).

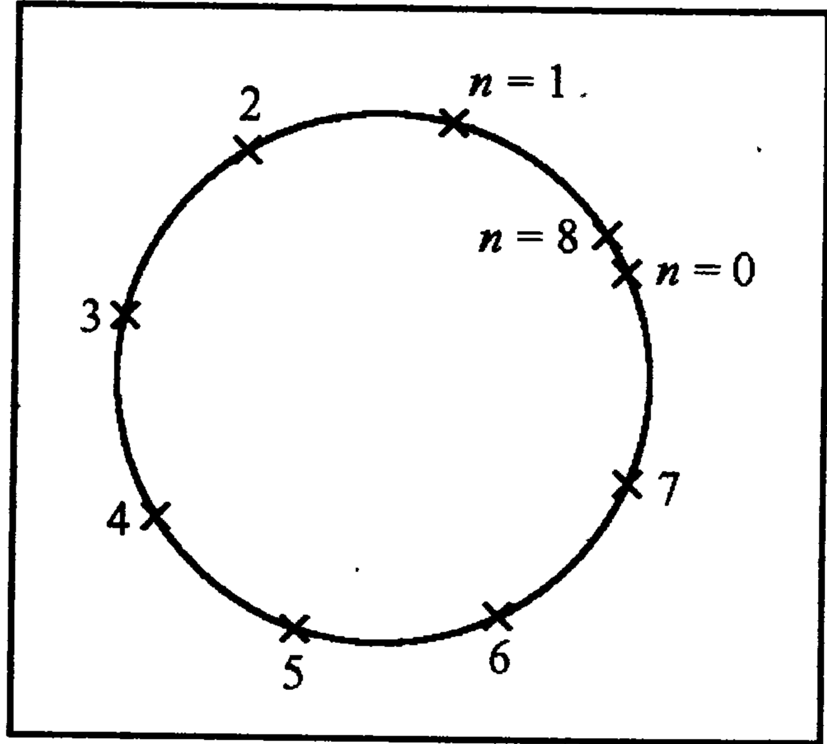


图 1.15 磁力线缠绕成磁面

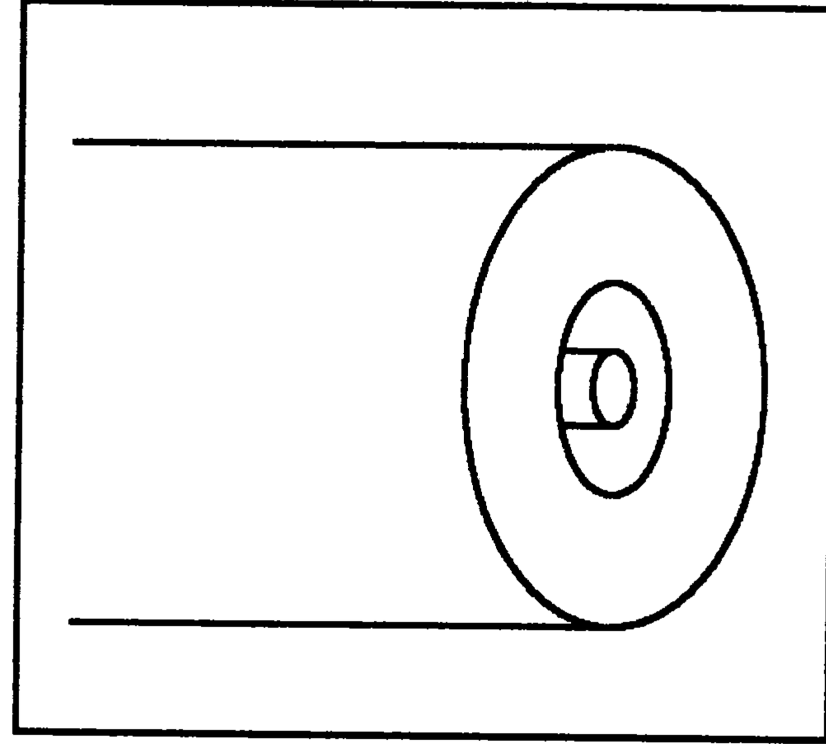


图 1.16 嵌套的环形磁面

图 1.17 角向磁通和环向磁通

对穿过(和某一磁面对应的)截面 S_p 的磁场积分(图 1.17)，就得到和此磁面相对应的角向磁通

$$\int_{S_p} \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{S}_p = \int_{S_p} B_p dS_p = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^R B_Z R dR = \int_0^R \partial\psi/\partial R dR = \psi.$$

上式中的截面取的是磁面外、从对称轴($R=0$)处到磁面内侧间的部分 S_p，这样得出的角向磁通是 ψ；截面也可以取磁面内部、从磁轴到磁面外侧间的部分 S_p'，这样得出的是 ψ'. 但由于 $\psi+\psi'$=常数(只和总电流有关)，知道了其中一个就等于知道了另一个. 通常在用(R,Z)坐标系时，采用 ψ 比较方便；而在用(r,θ)坐标系时，则用 ψ' 比较方便.

不同的磁面，其内侧到对称轴的距离 R 不同，角向磁通 ψ 也不同. 因此可以用 ψ 代替(R,Z)作为空间的一个坐标，凡是用 ψ 作为坐标系一个分量的坐标系均称为磁面坐标系.

除了角向磁通外还可以引入纵(环)向磁通

$$\psi_t = \int_{S_t} \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{S}_t = \int_{S_t} B_\phi dS_t \sim B_\phi \pi r^2,$$

以及角向电流通量

$$I_\theta(\phi) = \int_{S_p} \boldsymbol{J} \cdot d\boldsymbol{S}_p = \int J_\theta dS_p,$$

和纵(环)向电流通量

$$I_t(\phi) = \int_{S_t} \boldsymbol{J} \cdot d\boldsymbol{S}_t = \int J_t dS_t.$$

它们在各种磁面坐标中都会有不同程度的应用.

1.5 磁冻结和磁扩散

现在来讨论磁场随时间变化的规律，由

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = -\nabla \times \boldsymbol{E}, \quad \boldsymbol{E} + (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{B}) = \eta \boldsymbol{J}, \quad \nabla \times \boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{J},$$

可得

$$\begin{aligned}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} &= -\nabla \times [-\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{B} + \eta \boldsymbol{J}] \\ &= \nabla \times (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{B}) - \nabla \times \left(\frac{\eta}{\mu} \nabla \times \boldsymbol{B}\right) \\ &= \nabla \times (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{B}) + \frac{\eta}{\mu} \nabla^2 \boldsymbol{B} - \nabla\left(\frac{\eta}{\mu}\right) \times (\nabla \times \boldsymbol{B}).\end{aligned}$$

如果设 η/μ=常数，则有

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = \nabla \times (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{B}) + \frac{\eta}{\mu} \nabla^2 \boldsymbol{B}. \tag{1.42}$$

此式还可以写成无量纲的形式

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial \hat{t}} = \hat{\nabla} \times (\hat{\boldsymbol{u}} \times \boldsymbol{B}) + \frac{1}{Rm} \hat{\nabla}^2 \boldsymbol{B},$$

其中 $\hat{t}=tV_A/L$，$\hat{\nabla}=L\nabla$（V_A 是阿尔文波速，L 是所讨论系统的特征尺度），$\hat{\boldsymbol{u}}=\boldsymbol{u}/V_A$. 而 $Rm=\mu LV_A/\eta$ 是一个无量纲的参量，被称为磁雷诺数. 当 $Rm\to 0$ 时，系统呈现所谓的磁扩散现象，而当 $Rm\to\infty$ 时，系统呈现所谓的磁冻结现象.

1.5.1 磁 扩 散

当 $\boldsymbol{u}=0$（即 $Rm\to 0$）时，

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = \frac{\eta}{\mu} \nabla^2 \boldsymbol{B}.$$

这是一个扩散型的方程，表示磁场将从强场区向弱场区移动，而 $\eta/\mu=D_m$ 是磁扩散系数. 为了定性上描述磁场的扩散行为，引入磁场扩散的特征时间 τ 和（磁场梯度的）特征长度 L，则扩散方程可以近似表示成

$$\frac{\boldsymbol{B}}{\tau} = \frac{\eta}{\mu}\frac{\boldsymbol{B}}{L^2},$$

从中可以得出

$$\tau \sim \frac{\mu L^2}{\eta} = \mu\sigma L^2,$$

或反过来，趋肤深度为

$$L^2 = \frac{\tau}{\mu\sigma}.$$

当取 L 为实际等离子体的长度时，可从前式估计出其中磁场的扩散（逃逸）时间. 如果所讨论问题的特征时间尺度远小于 τ 时，则扩散的影响可以忽略不计. 否则磁扩散的影响不可忽略. 例如对于地核（按铁的电阻来计算），取 $L=R_e=$地球半径，则 $\tau\sim 10^4$ a（a 为年的符号）；而对于实验室中常用的铜壳，如果取 $L=1$ m，$\tau\sim 10$ s，如果 $L=10$ cm，$\tau\sim 0.1$ s，$L=1$ cm，$\tau\sim 1$ ms. 如果已知磁场变化的特征时间，则也可以用类似的方法估算出这变化磁场的趋肤（穿透）

深度.

1.5.2 磁 冻 结

当电阻 $\eta\sim 0$（即 $Rm\to\infty$）时，磁运动方程变成

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = \nabla \times (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{B}). \tag{1.43}$$

其物理意义通常解释为磁力线的冻结，有着几种不同的解释，但是下面将给出的是比较严格的一种.

可以证明，表示磁场的标量场 α 和 β 是随流体元一起流动的. 由(1.43)式可得

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\alpha \times \nabla\beta) = \nabla \times [\boldsymbol{u} \times (\nabla\alpha \times \nabla\beta)],$$

$$\nabla\frac{\partial\alpha}{\partial t} \times \nabla\beta + \nabla\alpha \times \nabla\frac{\partial\beta}{\partial t} = \nabla \times [\nabla\alpha(\boldsymbol{u}\cdot\nabla\beta) - \nabla\beta(\boldsymbol{u}\cdot\nabla\alpha)],$$

$$\nabla \times \left(\frac{\partial\alpha}{\partial t}\nabla\beta - \frac{\partial\beta}{\partial t}\nabla\alpha\right) = \nabla \times [\nabla\alpha(\boldsymbol{u}\cdot\nabla\beta) - \nabla\beta(\boldsymbol{u}\cdot\nabla\alpha)],$$

其中用到了矢量公式 $\nabla A\times\boldsymbol{a}=\nabla\times(A\boldsymbol{a})-A\nabla\times\boldsymbol{a}$. 将上式的右面移到左面后可得

$$\nabla \times \left\{\left[\frac{\partial\alpha}{\partial t} + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla\alpha)\right]\nabla\beta - \left[\frac{\partial\beta}{\partial t} + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla\beta)\right]\nabla\alpha\right\} = 0,$$

即

$$\nabla \times \left[\frac{d\alpha}{dt}\nabla\beta - \frac{d\beta}{dt}\nabla\alpha\right] = 0.$$

也可以写成

$$\frac{d\alpha}{dt}\nabla\beta - \frac{d\beta}{dt}\nabla\alpha = \nabla\varphi, \tag{1.44}$$

其中 φ 是任意的标量. 满足这方程的一个特解是 $\nabla\varphi=0$，及

$$\frac{d\alpha}{dt} = 0, \quad \frac{d\beta}{dt} = 0.$$

这两个全微商为零，在物理上就是表示标量场 α 和 β 是随流体元

一起运动的，所以它们的交界线——磁力线也和流体元一同运动．这时，初始给定的磁力线其时间演化是可以辨识的，即初始骑在某一流体元上的磁力线以后也永远骑在此流体元之上．

但上面的解并不是唯一的．因为当 $\mathrm{d}\alpha/\mathrm{d}t\neq0$，$\mathrm{d}\beta/\mathrm{d}t\neq0$ 时，只要选择合适的 $\nabla\varphi\neq0$，也能满足方程(1.44)．这时我们无法通过跟踪某根流(体元组成的)线的方法来确切地跟踪一根磁力线(应该注意到，磁力线并不是可观测的实体)，所以只能说磁场的拓扑结构和流体的拓扑结构相同．如若把任意标量场 φ 用 α,β 表示的话 $\varphi=\varphi(\alpha,\beta,t)$，就有

$$\nabla\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\nabla\alpha+\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}\nabla\beta,$$

于是可将方程(1.44)改写成

$$\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}\nabla\beta-\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}t}\nabla\alpha-\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\nabla\alpha-\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}\nabla\beta=0. \qquad (1.45)$$

这时若有

$$\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial\varphi}{\partial\beta},\quad \frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}t}=-\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha},$$

方程(1.44)就能满足．这样 φ 就相当于以 α 为广义坐标、β 为广义动量的哈密顿量，而标量场 α,β 的时间演化方程也就成了力学中的哈密顿型运动方程．

参考文献

[1] Brinkman R P. Phys. Fluids, **B1**(1989)987; Aly J J. Phys. Fluids, **B5**(No. 2)(1993)281

[2] Landau, Lifshitz. Fluid Mechanics, 2nd edition. Pergamon Press, 1987. 44

[3] T. J. M. 玻依德，J. J. 桑德森．等离子体动力学．北京：科学出版社，1977. 60

Boyd T J M, Sanderson J J. The Physics of Plasmas. Cambridge University Press，北京：世界图书出版公司，2003. 57

[4] Kulsrud R M. Handbook of Plasma Physics, Vol. 1, ed. Rosenbluth M N, Sagdeev R Z. North-Holland Publishing Company, 1983. 135

[5] Landau L D, Lifshitz E M. Mechanics. Pergamon Press, Oxford, 1976. 23

[6] Landau L D, Lifshitz E M. The Classical Theory of Fields. Pergamon Press, Oxford, 1975. 84

[7] D. 特哈尔．量子力学习题集．北京：高等教育出版社，1965. § 7.18, 34

[8] 王竹溪．统计物理学．北京：高等教育出版社，1956. § 23, 113

第二章　磁流体力学平衡

2.1　基本方程，一维磁流体位形的平衡问题

2.1.1　平衡方程及位力定理

1. 平衡方程

按照运动方程

$$\rho\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}\equiv\rho\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial t}+\rho(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}=-\nabla P+\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{B},$$

当体系处于静态、即 $\partial\boldsymbol{u}/\partial t=0$ 时，可得平衡方程

$$\rho(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}=-\nabla P+\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{B}. \tag{2.1}$$

在实验室磁约束等离子体中，一般取 $u=0$ 的近似，故平衡方程组可以进一步简化成：

$$\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{B}=\nabla P, \tag{2.2}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{J}, \tag{2.3}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0. \tag{2.4}$$

由此方程组，可以直接得到两个不依赖于具体平衡位形的结论：

$$\boldsymbol{B}\cdot\nabla P=0, \tag{2.5}$$

$$\boldsymbol{J}\cdot\nabla P=0. \tag{2.6}$$

在存在磁面时，$\boldsymbol{B}$ 在磁面上，因此磁面也就是磁通 $\psi=$ 常数的面. 由(2.5)式可知

$$\nabla_{\parallel}P=0.$$

这就是说沿着磁力线压强为常数，但因为磁力线可以达到磁面上的任一点，故整个磁面上各点的压强都一样，即 $\nabla_s P=0$. 这样可

以令

$$P=P(\psi),$$

即磁面也是平衡位形的等压面.

由(2.6)式可知 $\boldsymbol{J}$ 也完全在磁面上. 因为，如果当 $\boldsymbol{J}\parallel\boldsymbol{B}$ 时，不用说 $\boldsymbol{J}$ 一定在磁面上；而若 $\boldsymbol{J}\perp\boldsymbol{B}$ 时，则可以把 $\boldsymbol{J}$ 分成两部分

$$\boldsymbol{J}_{\perp}=\boldsymbol{J}_s+\boldsymbol{J}_n.$$

其中 $\boldsymbol{J}_s$ 是在磁面上而和磁场垂直的电流分量，而 $\boldsymbol{J}_n$ 是既垂直于磁场又垂直于磁面的分量. 按(2.6)式

$$\boldsymbol{J}\cdot\nabla P=\boldsymbol{J}_s\cdot\nabla_s P+\boldsymbol{J}_n\cdot\nabla_n P=0.$$

其中 $\nabla_s P$ 为零；而在其后一项中，一般总有 $\nabla_n P\neq 0$，故 $\boldsymbol{J}_n\equiv 0$. 这表示电流 $\boldsymbol{J}$ 只有在磁面上的分量，所以它也是磁面的函数，即

$$\boldsymbol{J}=\boldsymbol{J}(\psi).$$

由(1.11)和(1.12)式可以得到平衡方程的另一种形式

$$\nabla\cdot\overleftrightarrow{T}\equiv\nabla\cdot\left(\frac{B^2}{2\mu}\overleftrightarrow{I}-\frac{\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}}{\mu}+P\overleftrightarrow{I}\right)=0, \tag{2.7}$$

其中已利用了 $\boldsymbol{u}=0$. 因为在由 $\boldsymbol{e}_{\parallel}=\boldsymbol{B}/B$ 及 $\boldsymbol{e}_{\perp 1},\boldsymbol{e}_{\perp 2}$ 构成的直角坐标系中，$\overleftrightarrow{I}=\boldsymbol{e}_{\parallel}\boldsymbol{e}_{\parallel}+\boldsymbol{e}_{\perp 1}\boldsymbol{e}_{\perp 1}+\boldsymbol{e}_{\perp 2}\boldsymbol{e}_{\perp 2}$，故(2.7)式可以进一步表示成

$$\nabla_{\parallel}P_{\parallel}+\nabla_{\perp 1}P_{\perp}+\nabla_{\perp 2}P_{\perp}=0,$$

其中

$$P_{\parallel}=P-\frac{B^2}{2\mu},\quad P_{\perp}=P+\frac{B^2}{2\mu},$$

$P_{\parallel}$，$P_{\perp}$ 分别是平行（磁力线）方向及垂直方向的总压强. 因为 $\nabla_{\parallel}P_{\parallel}=\nabla_{\parallel}(B^2/2\mu)=0$，故最后可得平衡方程

$$\nabla_{\perp 1}P_{\perp}+\nabla_{\perp 2}P_{\perp}=0.$$

当磁流体存在对称性 $\partial/\partial\theta=0$ 时，有更简单的平衡方程

$$\frac{\partial}{\partial r}P_{\perp}=0.$$

上两式的物理意义是：磁流体处在平衡态时，其中的热压力和磁压力相互抵消. 由于在一个有限体积的热磁流体中，中心压强总是高

于边缘压强,即总有 $\nabla_{\perp}P<0$;因此为了能保持磁流体的平衡就要求有 $\nabla(B^2/2\mu)>0$. 这种形状的磁场形态就称为“磁阱”,在用磁场来约束等离子体的各种装置中,就是想方设法地去设计各种各样形状的磁阱来达到约束等离子体的目的.

应该指出,上面讨论的只是静态($\boldsymbol{u}=0$)磁流体的平衡位形. 但实际上,存在着 $\boldsymbol{u}\neq0$ 的磁流体. 例如在磁约束装置 tokamak 中,等离子体在沿大环和小环方向上都有相当大的流速. 而且在对 tokamak 先进运行模式的研究中发现,其中流动速度的大小及速度剪切的大小会对 tokamak 等离子体的平衡位形、从而对其运行模式(它又与等离子体的约束好坏密切相关)有重要的影响. 这种 $\boldsymbol{u}\neq0$ 磁流体的平衡应该服从方程(2.1),同时广义欧姆定律及关于电场的方程也要耦合进平衡方程组. 方程(2.1)等号左面的流速非线性项代表着由于有(大、小)环向转动而出现的惯性离心力,它一般是使 tokamak 磁流体在大、小半径方向上向外扩张,因此是破坏磁流体平衡的. 这一点从 $\boldsymbol{u}\neq0$ 的位力定理(1.28)和(1.30)式中也可以看出: 其中的 ρu^2 项与热压强项一样,总是正的,所以也需要由负的磁场压力来平衡. 这一项加入所引起的最明显后果是: tokamak 等离子体的平衡磁面不再是等压面,电流也不完全沿磁面流动. 但包含了惯性离心力的平衡方程(2.1)很难作进一步的解析分析,而其数值研究迄今为止也没有得出令人信服的、具有普适意义的结论. 所以,在探索 tokamak 先进运行模式的研究中,这仍是一个有待解决的前沿课题.

在本章的余下部分,我们将只讨论 $\boldsymbol{u}=0$ 情况下的磁流体平衡问题.

2. $\boldsymbol{u}=0$ 时的位力定理

从一般的位力定理(1.30)可知: 一个孤立的磁流体体系,当不存在边界的约束及重力势时,是不可能满足位力定理的. 下面将推导 $\boldsymbol{u}=0$ 的平衡所需满足的位力定理. 利用等式(其中已用到了动量守恒方程(1.11))

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{r}\cdot\overset{\Rightarrow}{T})=\boldsymbol{r}\cdot(\nabla\cdot\overset{\Rightarrow}{T})+\mathrm{tr}(\overset{\Rightarrow}{T})=\mathrm{tr}(\overset{\Rightarrow}{T})=3P+\frac{B^2}{2\mu},$$

可将位力定理作以下变化

$$\langle\int\mathrm{tr}(\overset{\Rightarrow}{T})\mathrm{d}\boldsymbol{r}\rangle=\int\mathrm{tr}(\overset{\Rightarrow}{T})\mathrm{d}\boldsymbol{r},$$

$$\int\nabla\cdot(\boldsymbol{r}\cdot\overset{\Rightarrow}{T})\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int\left(3P+\frac{B^2}{2\mu}\right)\mathrm{d}\boldsymbol{r}.$$

上式等号的左面,利用高斯定理可化为 $\oint_S\boldsymbol{r}\cdot\overset{\Rightarrow}{T}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S$,其中 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\boldsymbol{n}\mathrm{d}S$ 是磁流体体系表面的面积元矢量,而面积分中的被积函数则可进一步变成

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}\cdot\overset{\Rightarrow}{T}\cdot\boldsymbol{n}&=\left(P+\frac{B^2}{2\mu}\right)(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{e}_{\perp1})(\boldsymbol{e}_{\perp1}\cdot\boldsymbol{n})\\&\quad+\left(P+\frac{B^2}{2\mu}\right)(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{e}_{\perp2})(\boldsymbol{e}_{\perp2}\cdot\boldsymbol{n})\\&\quad+\left(P-\frac{B^2}{2\mu}\right)(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{e}_{\parallel})(\boldsymbol{e}_{\parallel}\cdot\boldsymbol{n})\\&=\left(P+\frac{B^2}{2\mu}\right)[(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{e}_{\perp1})(\boldsymbol{e}_{\perp1}\cdot\boldsymbol{n})+(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{e}_{\perp2})(\boldsymbol{e}_{\perp2}\cdot\boldsymbol{n})\\&\quad+(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{e}_{\parallel})(\boldsymbol{e}_{\parallel}\cdot\boldsymbol{n})]-\frac{B^2}{\mu}(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{e}_{\parallel})(\boldsymbol{e}_{\parallel}\cdot\boldsymbol{n})\\&=\left(P+\frac{B^2}{2\mu}\right)(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n})-\frac{B^2}{\mu}(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{e}_{\parallel})(\boldsymbol{e}_{\parallel}\cdot\boldsymbol{n}).\end{aligned}$$

将上式代入面积分后,就得出适合我们需要的位力定理

$$\int\left(3P+\frac{B^2}{2\mu}\right)\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\oint_S\left[\left(P+\frac{B^2}{2\mu}\right)(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n})-\frac{B^2}{\mu}(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{e}_{\parallel})(\boldsymbol{e}_{\parallel}\cdot\boldsymbol{n})\right]\mathrm{d}S.\tag{2.8}$$

当 $S\to\infty$ 时,若无外导体电流产生的磁场,则内电流所产生的磁场在界面上一定趋于零,同样在界面上也有 $P(S)\to0$,因而方程的右面也趋于零;但是左面总是大于零. 这样,位力定理不可能满足. 只有存在外磁场(因而外导体)时,有可能使体系边界附近磁场大于零,从而使方程等号右面的表面积分大于零,才有可能使位力定

理成立. 从物理上来看这意味着必须要有外磁场(由外加电流产生)形成的"磁阱"才能抵消等离子体的热压强而保持平衡位形.

2.1.2 平衡时的电流——Pfirsch-Schluter 电流

由平衡方程(2.2)可知,对平衡起作用的是垂直(于磁场的)电流——也即所谓的逆磁电流

$$\boldsymbol{J}_{\perp}=-\frac{1}{B^2}\nabla P\times\boldsymbol{B}. \tag{2.9}$$

逆磁电流的作用是产生一个和原有磁场方向相反的反向磁场,使磁流体内部的磁场变弱,从而使磁流体边界处磁场的磁压能抵消内部的磁压与热压之和而达到保持静态平衡的目的. 总电流

$$\boldsymbol{J}=\boldsymbol{J}_{\parallel}+\boldsymbol{J}_{\perp}$$

中的平行(磁场方向)电流 $\boldsymbol{J}_{\parallel}$,虽然对磁流体的平衡不起作用,但并不是无足轻重的. 由电荷守恒定律

$$\frac{\partial\rho_q}{\partial t}+\nabla\cdot\boldsymbol{J}=0,$$

考虑到磁流体元中空间电荷为零即 $\rho_q=0$,有 $\nabla\cdot\boldsymbol{J}=\nabla_{\parallel}\boldsymbol{J}_{\parallel}+\nabla_{\perp}\boldsymbol{J}_{\perp}=0$. 于是

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}l_{\parallel}}J_{\parallel}=-\nabla_{\perp}J_{\perp}=\nabla\cdot\left(\frac{1}{B^2}\nabla P\times\boldsymbol{B}\right);$$

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\left(\frac{1}{B^2}\nabla P\times\boldsymbol{B}\right)&=\frac{1}{B^2}\nabla\cdot(\nabla P\times\boldsymbol{B})+\nabla\left(\frac{1}{B^2}\right)\cdot(\nabla P\times\boldsymbol{B})\\&=\frac{1}{B^2}\{\boldsymbol{B}\cdot(\nabla\times\nabla P)-[\nabla P\cdot(\nabla\times\boldsymbol{B})]\}\\&\quad-\frac{2}{B^3}\nabla B\cdot(\nabla P\times\boldsymbol{B})\\&=\frac{2}{B^3}\nabla P\cdot(\nabla B\times\boldsymbol{B}).\end{aligned}$$

其中用到了 $\nabla\times\nabla P=0$ 及 $\nabla P\cdot(\nabla\times\boldsymbol{B})=\nabla P\cdot\boldsymbol{J}=0$. 将上式代入上式前一式后得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}l_{\parallel}}J_{\parallel}=\frac{2}{B^3}\nabla P\cdot(\nabla B\times\boldsymbol{B}).$$

对环形体系(如 tokamak 等离子体),在用小柱坐标(r,θ,ϕ)时,磁场可表示成

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}_{\phi}+\boldsymbol{B}_{\theta}=B_0\left(1-\frac{r}{R_0}\cos\theta\right)\boldsymbol{e}_{\phi}+B_{\theta}\boldsymbol{e}_{\theta},$$

故 $(\nabla B\times\boldsymbol{B})_r=(\nabla_{\theta}B)B_{\phi}=(B_0^2/R_0)\sin\theta$(其中近似取 $B_{\phi}\sim B_0$). 再考虑到 $\nabla P=(\mathrm{d}p/\mathrm{d}r)\boldsymbol{e}_r$,则有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}l_{\parallel}}J_{\parallel}=\frac{2}{B^3}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}r}\frac{B_0^2}{R_0}\sin\theta\approx\frac{2}{BR}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}r}\sin\theta.$$

$$J_{\parallel}=C+\int_{l_0}^{l}\frac{2}{BR}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}r}\sin\theta\mathrm{d}l_{\parallel},$$

其中 C 是积分常数,一般可能是积分初值 l_0 依赖的. 但下面可以证明,它可写做 kB,而 k 与路径无关. 这是因为 $\nabla P=0$ 时,平衡方程就变成 $\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{B}=0$,这种平衡称为无力平衡. 于是有 $\boldsymbol{J}\parallel\boldsymbol{B}$,因此一般可以用 $\boldsymbol{B}$ 来表示出这个电流 $J_{\parallel}=k(l)\boldsymbol{B}(l)$,其中 l 是沿磁力线的路径. 但根据电荷守恒,有

$$\nabla\cdot\boldsymbol{J}=\nabla\cdot(k(l)\boldsymbol{B}(l))=k(l)\nabla\cdot\boldsymbol{B}+(\boldsymbol{B}\cdot\nabla)k(l)=0;$$

因为 $\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$,所以最后得出

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}l}k(l)=0.$$

这表示 $k=$常数,和 l 无关.

下面我们将完成积分,以求出 tokamak 中的平行电流表达式. 将上式中的线积分元化成

$$\mathrm{d}l_{\parallel}=\frac{\mathrm{d}l_{\parallel}}{\mathrm{d}\theta}\mathrm{d}\theta,$$

再利用柱坐标下的磁力线方程: $\mathrm{d}l_{\parallel}/\mathrm{d}\theta\equiv\mathrm{d}z/\mathrm{d}\theta=Rq$($q$ 即是安全因子),可以容易地完成积分

$$J_{\parallel}=kB(\theta_0)+\int_{\theta_0}^{\theta}\frac{2q}{B}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}r}\sin\theta\mathrm{d}\theta$$

$$= kB(\pi/2) + \frac{2q}{B}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}r}\cos\theta.$$

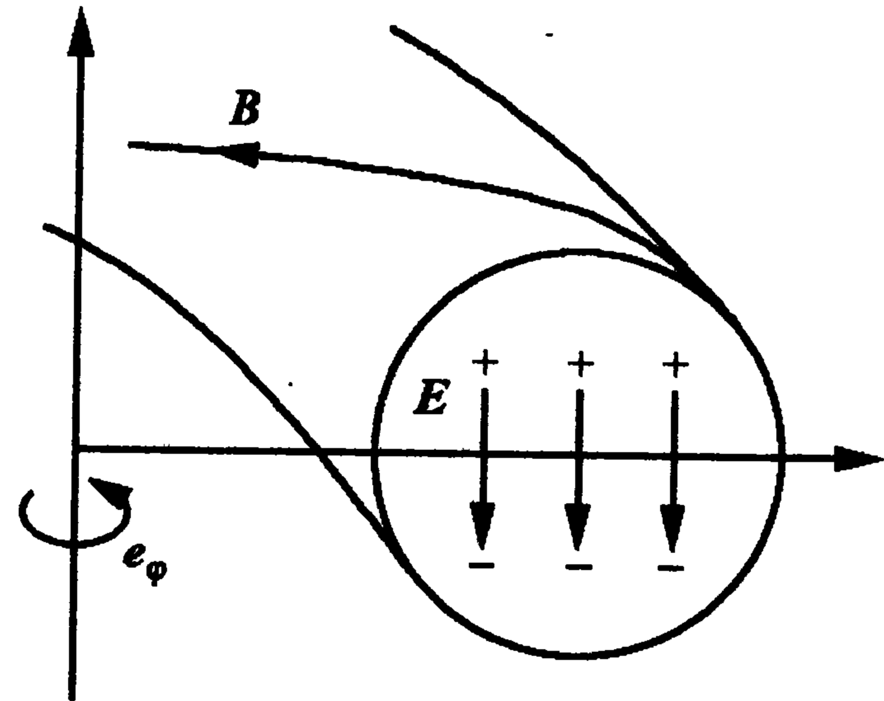


图 2.1　环形磁场引起的电荷分离

上式的最后一步已取了 $\theta_0=\pi/2$. 上式表明平行电流由无力电流（等号右面第一项）和压力驱动的电流（第二项）两部分组成. 后一项又称为 Pfirsch-Schluter 电流，它的方向在 tokamak 大环的内外侧相反（取决于其中 $\cos\theta$ 的符号变化）. 这个电流可以沿磁力线迅速传导电荷从而抵消由于环漂移而引起的正负电荷在环上下方向上的分离（见图 2.1）.

当磁流体中电阻不可忽略时，由欧姆定律 $J_\parallel=\sigma_\parallel E_\parallel$，可知在环上、下的正、负电荷，不会被这个平行电流完全抵消，因而仍存在一个虽被大大削弱、但不为零的平行（总磁场方向的）静电场 $E_\parallel$. 这个电场仍能造成所有带电粒子的静电漂移. 下面就通过计算这个剩余电场来估算带电粒子的平均径向扩散粒子流. 因为这个静电场是由 tokamak 中环漂移所分离的正负电荷所产生的，因此它应该躺在 tokamak 的小截面内，一般由两个方向的分电场组成，

$$\boldsymbol{E} = -\nabla\Phi(r,\theta) = -\nabla_r\Phi\boldsymbol{e}_r - \nabla_\theta\Phi\boldsymbol{e}_\theta = \boldsymbol{E}_r + \boldsymbol{E}_\theta,$$

于是有

$$E_\parallel = \frac{\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{B}}{B} = \frac{(\boldsymbol{E}_r+\boldsymbol{E}_\theta)\cdot(\boldsymbol{B}_\phi+\boldsymbol{B}_\theta)}{B} = \frac{E_\theta B_\theta}{B}.$$

故反过来可得角向电场

$$E_\theta = \frac{B_0}{B_\theta}E_\parallel = \frac{B_0}{B_\theta}\frac{J_\parallel}{\sigma_\parallel} = \frac{2}{\sigma_\parallel}\frac{R}{r}\frac{q^2}{B_0}\frac{\partial P}{\partial r}\cos\theta,$$

它会和环向磁场一起引起一个沿小半径方向的、等离子体带电粒子整体（电子和离子在同一方向）电漂移，这相当于等离子体粒子的径向双极扩散流

$$\Gamma_r \equiv nV_r = -n\frac{E_\theta}{B}.$$

将前式的 E_θ 代入，并取 $P=nT_e$（假定 T_e=常数）及 $B^{-1}=(1+r\cos\theta/R)/B$ 后，得

$$\Gamma_r = -\frac{Rq^2}{r\sigma_\parallel}\frac{2nT_e}{B_0}\frac{\partial n}{\partial r}\cos\theta\frac{1}{B_0}\left(1+\frac{r}{R}\cos\theta\right). \quad (2.10)$$

将上式对 θ 角求平均后，最后可以得出对磁面作了平均的径向扩散粒子流

$$\langle\Gamma_r\rangle \equiv \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Gamma_r\mathrm{d}\theta = -q^2\frac{2nT_e}{\sigma_\parallel B_0^2}\frac{\partial n}{\partial r} = -D_{\mathrm{p.s.}}\frac{\partial n}{\partial r},$$

其中的

$$D_{\mathrm{p.s.}} = q^2 D_c \quad (2.11)$$

就是考虑了环效应后的横向扩散系数，又称 Pfirsch-Schluter 扩散系数. 它比直柱位形下的经典横向扩散系数 $D_c=2nT_e/\sigma_\parallel B_0^2$ 要大一个因子 q^2.

2.1.3　θ 箍　缩

图 2.2 是 θ 箍缩（pinch）的示意图. 取柱坐标系 (r,θ,z)，由外源加在铜壳上的 θ 向电流在等离子体表面感应出的电流也在 θ 向；而按安培定律 $J_\theta=-(1/\mu)\mathrm{d}B_z/\mathrm{d}r$，这个电流所产生的磁场在 z 向：

$$\boldsymbol{B} = (0,0,B_z(r)),$$

$$\boldsymbol{J} = (0,J_\theta(r),0),$$

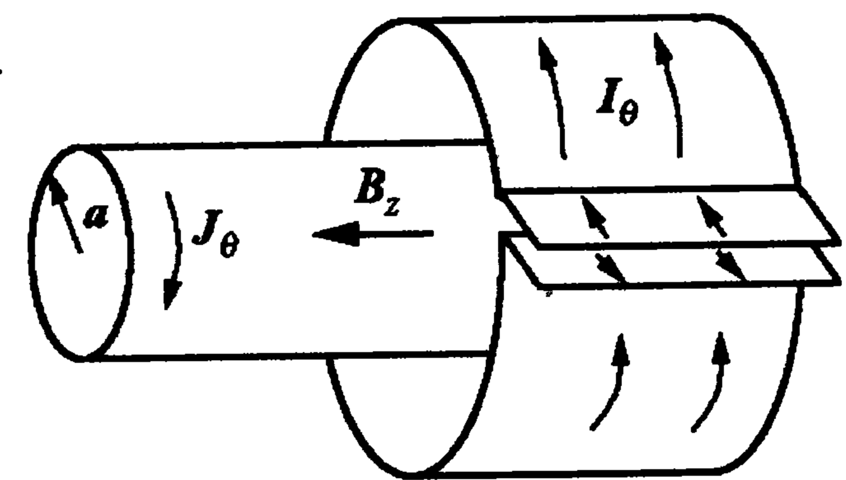


图 2.2　θ 箍缩示意图

故平衡方程可写作 $J_\theta B_z=(\nabla P)_r$. 代入安培定律后得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(P+\frac{1}{2\mu}B_z^2\right)=0, \quad \Rightarrow \quad P_\perp = P+\frac{B_z^2}{2\mu}=C, \quad (2.12)$$

其中 C=常数.

由于在等离子体之外 $P=0$，故上式右面的常数可取界面 $r=a$ 处的值，即

$$\frac{1}{2\mu}B_z^2(a) = C \equiv \frac{1}{2\mu}B_0^2,$$

其中 B_0 是界面上的外磁场值，它所产生的磁压和磁流体内部的内磁压与热压强之和相平衡.

θ 箍缩的运行过程如下：一开始在外壳上快速地加上一强电流 I_θ，于是在经由气体放电产生的初始等离子体表面产生感应电流 J_θ 及磁场 B_z；此电流和磁场产生的洛伦兹力是一径向箍缩力，它使等离子体柱向中心压缩，一直到内部热压力增大到它和内磁压之和可以抵消外磁压为止. 这时 θ 箍缩就达到了平衡状态. 平衡时等离子体中的电流密度 J_θ、磁场 B_z 及热压强 P 的径向剖面(分布)如图 2.3. 这样只要外壳中的放电电流维持，外磁场也会维持，θ 箍缩位形的径向平衡原则上是可以一直保持的. 但实际上由于柱形等离子体的两端是开口的，所以在径向被压缩的等离子体很快就从轴(z)向逃逸了，所以 θ 箍缩中较高密度(可达 $n_e \approx 10^{16}\ \mathrm{cm}^{-3}$)的等离子体只能保持很短的一段时间(约为 μs 量级).

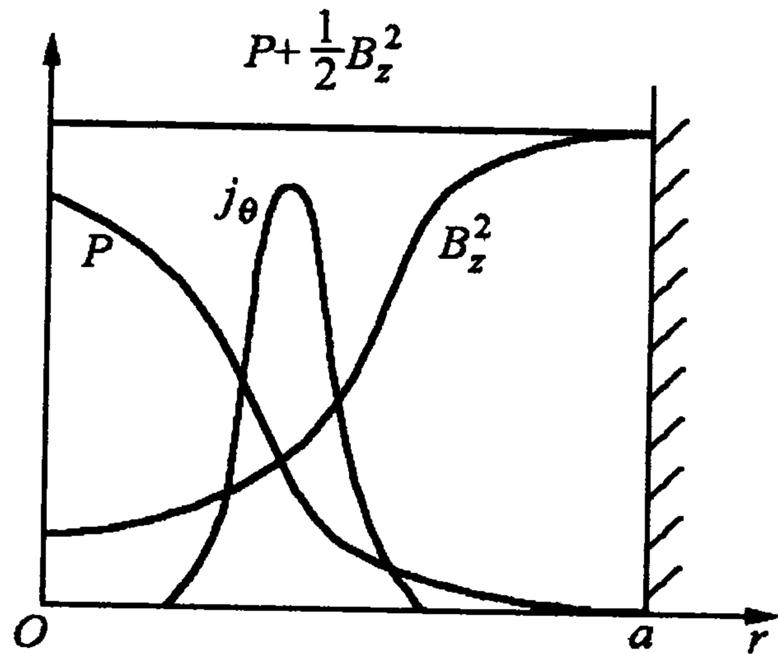


图 2.3 θ 箍缩平衡时的各参数径向剖面图

在讨论磁约束等离子体的平衡时我们关心的另一个重要问题是约束的效率，也即约束一定热压强的等离子体需要多强的磁场(也即多大的外加电流)才行. 为此定义约束效率为

$$\beta(r) = \frac{P(r)}{P(r) + B_z^2(r)/2\mu}, \tag{2.13}$$

其中 β 一般是半径 r 的函数. 对 θ 箍缩，当 $r\to 0$ 时，$P(0)$ 最大，而 $B(0)\geqslant 0$，故 $\beta(0)\leqslant 1$；当 $r\to a$ 时，$P(a)\to 0$，$B(a)\approx B_0$，故 $\beta(a)\approx 0$；所以

$$0 \leqslant \beta(r) \leqslant 1.$$

通常认为 β 值愈大，约束就愈好. 对 θ 箍缩，$\beta_{\max}\approx 1$，是所有磁约束装置中效率最高的.

2.1.4 Z 箍缩

这时等离子体是由两个电极的极间放电形成的，设放电电流在柱坐标的 Z 向，则所产生的磁场在角向 θ. 平衡方程化为

$$-J_z B_\theta = (\nabla P)_r,$$

将安培定律

$$J_z = \frac{1}{\mu}\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(rB_\theta)$$

代入平衡方程后，有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(P + \frac{B_\theta^2}{2\mu}\right) + \frac{B_\theta^2}{\mu r} = 0, \tag{2.14}$$

或

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}r} = -\frac{1}{2\mu}\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(r^2B_\theta^2). \tag{2.15}$$

这个平衡方程的解并不唯一，它和等离子体的电流(因而磁场)剖面 $J_z(r)$ 或压强剖面 $P(r)$ 有关，但当其中一个确定后，可以从平衡方程中求出另一个. 例如已知电流分布后，通过安培定律并积分(2.15)式可得出压强分布：

$$P(r) = P(0) - \frac{1}{2\mu}\int_0^r \frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(r^2B_\theta^2)\mathrm{d}r.$$

利用边界上 $P(a)=0$，从上式可得

$$P(0) = \frac{1}{2\mu}\int_0^a \frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(r^2B_\theta^2)\mathrm{d}r,$$

然后将它代回原式就得

$$P(r) = \frac{1}{2\mu}\int_r^a \frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(r^2B_\theta^2)\mathrm{d}r. \tag{2.16}$$

当已经知道的是压强分布 $P(r)$时，可以按下式来求出磁场 $B_\theta(r)$，进而电流 $J_z(r)$(从安培定律)，

$$B_\theta^2(r) = 2\mu\left[\frac{1}{\pi r^2}\int_0^r 2\pi r' P(r')\mathrm{d}r' - P(r)\right]. \tag{2.17}$$

下面给出三种情况的电流分布及其相应的平衡解(参见下面的图 2.4—图 2.6).

(i) 均匀分布电流(图 2.4).

$$J_z(r) = \begin{cases} J_0, & r < a; \\ 0, & r \geqslant a. \end{cases}$$

其中($J_0 = I_0/\pi a^2$). 由安培定理，相应的角向磁场为

$$B_\theta(r) = \frac{\mu I_0}{\pi a^2 r}\int_0^r r\mathrm{d}r = \begin{cases} \dfrac{\mu I_0}{2\pi a^2}r, & r < a; \\ \dfrac{\mu I_0}{2\pi r}, & r \geqslant a. \end{cases}$$

这样从(2.16)式求出的压强分布是

$$P(r) = \frac{\mu I_0^2}{4\pi^2 a^2}\left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right).$$

(ii) 趋肤电流分布(图 2.5).

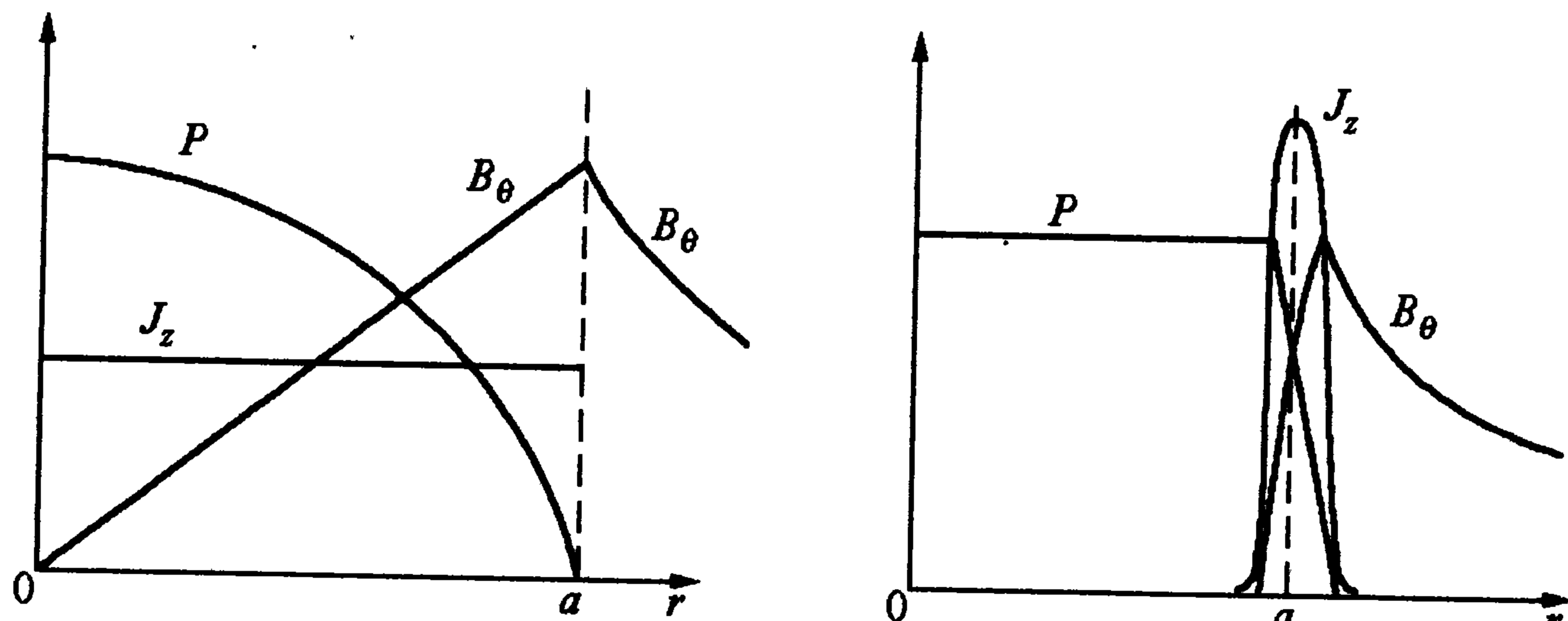


图 2.4 均匀电流分布下的 Z 箍缩参数剖面图

图 2.5 趋肤电流分布下的 Z 箍缩参数剖面图

$$J_z(r) = J_0\delta(r - a).$$

此电流(面)密度和总(面)电流强度的关系是

$$I_0 = \int_0^a J_0\delta(r - a)2\pi r\mathrm{d}r = 2\pi J_0 a.$$

这时从安培定律可得

$$B_\theta(r) = \begin{cases} \dfrac{\mu}{2\pi r}I_0, & r \geqslant a; \\ 0, & r < a. \end{cases}$$

而

$$P(r) = P(0).$$

(iii) Bennett 平衡解(图 2.6).

1934 年，Bennett 得出了一组自洽的平衡解

$$B_\theta(r) = \frac{\mu I_0}{2\pi}\frac{r}{r^2 + a^2},$$

$$J_z(r) = \frac{I_0}{\pi}\frac{a^2}{(r^2 + a^2)^2},$$

$$P(r) = \frac{\mu I_0^2}{8\pi^2}\frac{a^2}{(r^2 + a^2)^2}.$$

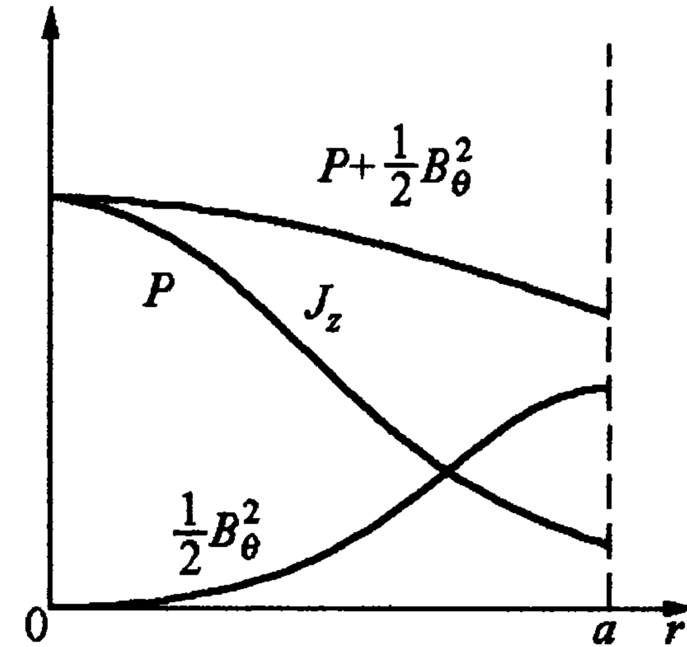


图 2.6 Z 箍缩的 Bennett 平衡剖面图

其推导过程比较长，这里从略. 它们的正确性可以通过直接代入平衡方程和安培定律的方法来证实，也可以参考文献[1].

2.1.5 螺旋箍缩(screw pinch)

如图 2.7，这种位形实际上是上述两种箍缩的组合：

$$\boldsymbol{B} = (0, B_\theta(r), B_z(r)),$$

$$\boldsymbol{J} = (0, J_\theta(r), J_z(r)).$$

其平衡方程仍然是一维的(径向)

$$\frac{\partial P}{\partial r} = J_\theta B_z - J_z B_\theta.$$

由安培定律

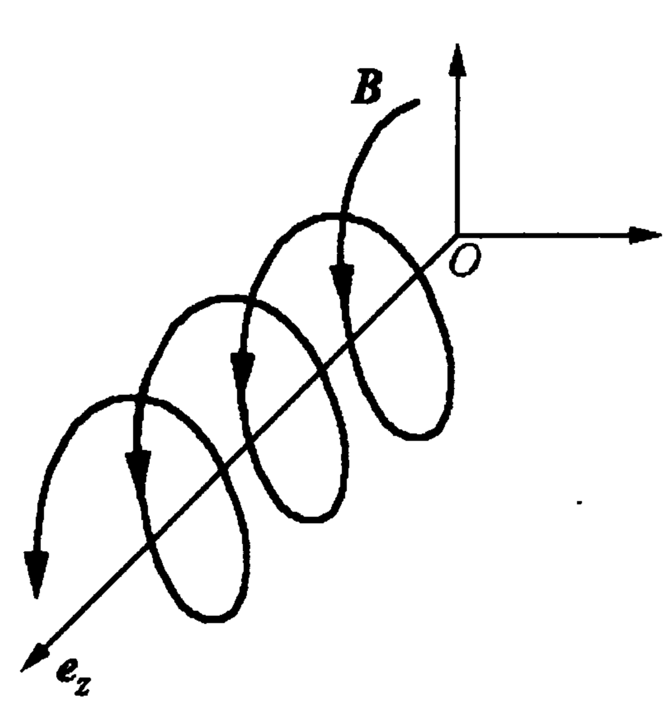


图 2.7　螺旋箍缩的磁力线图

$$J_\theta = -\frac{1}{\mu}\frac{\partial B_z}{\partial r},\quad J_z = \frac{1}{\mu r}\frac{\partial}{\partial r}(rB_\theta),$$

可将平衡方程写成

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[P + \frac{1}{2\mu}(B_z^2 + B_\theta^2)\right] + \frac{B_\theta^2}{\mu r} = 0. \tag{2.18}$$

它也相当于 θ 箍缩和 Z 箍缩的叠加. 令 $B^2 = B_z^2 + B_\theta^2$,并注意到空间曲线上某点处曲率的定义(在目前磁场位形下)

$$\kappa = \boldsymbol{b}\cdot\nabla\boldsymbol{b} = -\frac{B_\theta^2}{rB^2}\boldsymbol{e}_r = \kappa\boldsymbol{e}_r, \tag{2.19}$$

故平衡方程又可以写成

$$\nabla_\perp\left(P + \frac{B^2}{2\mu}\right) \equiv \frac{\partial}{\partial r}\left(P + \frac{B^2}{2\mu}\right) = \frac{B^2}{\mu}\kappa. \tag{2.20}$$

这表示等离子体的总(热+磁)压强被弯曲磁力线的张力(来自 $\nabla\cdot\boldsymbol{BB}$)所平衡. 和 Z 箍缩不同之处只在于这里总磁压强是由两项而不是一项组成. 这时半径 r=常数的柱面是磁面,它由螺旋形的磁力线盘旋绕成,可以定义两个和螺距相当的量来描述其盘旋的程度. 一个是回旋变换角

$$\iota(r) = \frac{RB_\theta(r)}{rB_z(r)} = \begin{cases} 0, & \theta\text{ 箍缩;} \\ \infty, & Z\text{ 箍缩.} \end{cases}$$

另一个就是上式的倒数——安全因子 $q(r)$. 对于螺旋箍缩,B_z 和 B_θ 均不为零,故 q 值在$(0,\infty)$.

由于 $B_\theta(r)$,$B_z(r)$及 $P(r)$可以有多种选取可能,故螺旋箍缩可能有的平衡位形是很多的. 不过实验等离子体中 $P(r)$一般总是中心高、边缘低,因此可以比较自由变的是 $B_\theta(r)$和 $B_z(r)$. 目前实验室中发现最稳定的三种环形磁约束等离子体位形(它们在瘦环近似下都可以用螺旋箍缩来很好地描述)分别是:

普通 tokamak(图 2.8):$B_z \gg B_\theta$, B_z 近似为常数, $q\sim O(1)$;

高 β tokamak(图 2.9):$B_z \gg B_\theta$, $B_z(0) < B_z(a)$, $q \sim O(1)$;

反场箍缩(图 2.10):$|B_z| \approx |B_\theta|$, $q \ll 1$.

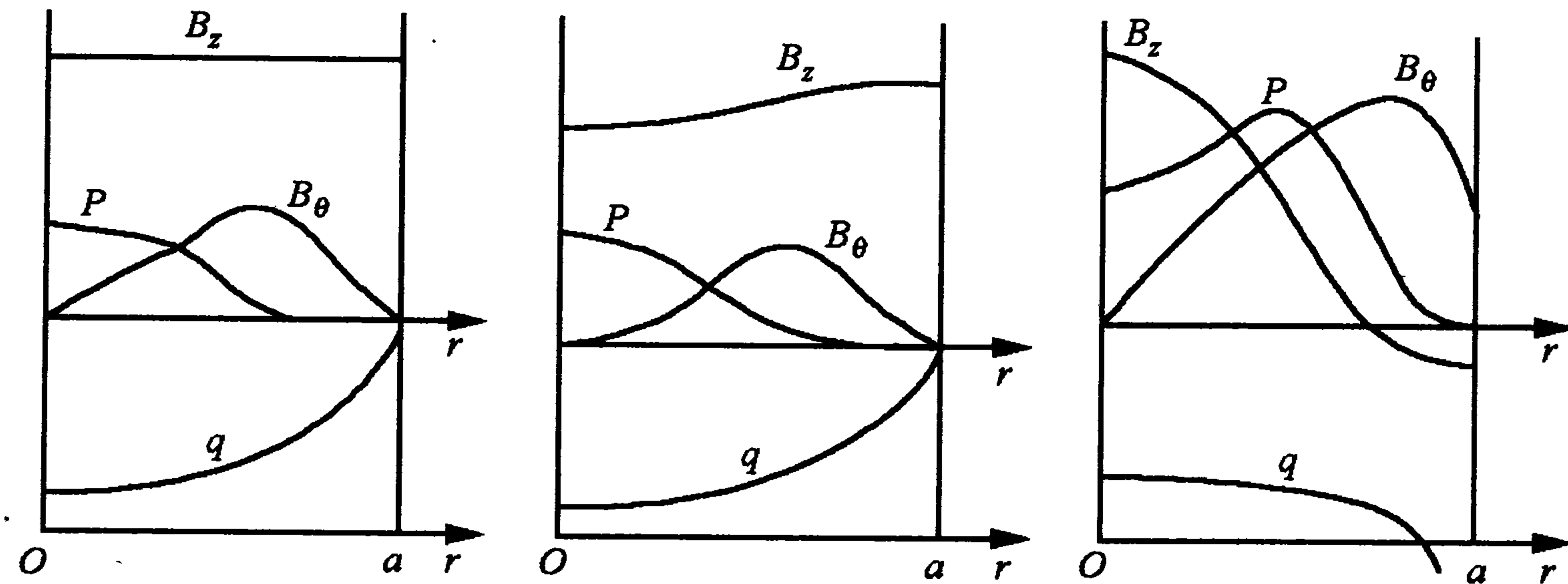


图 2.8　普通 tokamak 平衡参数剖面示意图　　图 2.9　高 β tokamak 平衡参数剖面示意图　　图 2.10　反场箍缩平衡参数剖面示意图

普通 tokamak 和 Z 箍缩很类似,它的角向磁场可以在中心形成一个磁阱以约束高压强的中心等离子体,但它有很强的、(在径向)近似为常数的环向磁场 B_z,这磁场虽然对平衡不起多大作用,但能显著地改善平衡位形的磁流体力学稳定性. 高 β tokamak 中的环向磁场 $B_z(r)$不是常数,而是中心($r=0$)弱、边上($r=a$)高的,这样除了起稳定作用外还会贡献一个额外的磁阱,它和角向磁场的磁阱一起能约束住比普通 tokamak 中压强更高的热等离子体,也即高 β 的等离子体. 以上两种 tokamak 均有 $B_z/B_\theta \gg 1$ 及 $q\approx 1$. 在反场箍缩中 $B_z/B_\theta \approx 1$,而且 $q \ll 1$. 这时环向磁场和角向磁场形成的磁阱位于等离子体中心和边界之间的某一半径处,因此被约束等离子体热压强的峰值也就在此处. 反场箍缩的角向磁场相对较强(类似 θ 箍缩),因此有较好的稳定性和约束指标(β 值). 下面用平衡方程对于三种位形分别作一些定性及半定量的描述.

(1) 反场箍缩

在 $P(r)$的峰值附近,有 $\nabla P(r) \approx 0$,所以平衡方程可近似写成 $\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{B}=0$,即 $\boldsymbol{J}\parallel\boldsymbol{B}$,按前面对平行电流的讨论有

$$\boldsymbol{J}(r) = k\boldsymbol{B}(r), \tag{2.21}$$

即无力平衡. 将上式和安培定律相结合,得

$$J_\theta \equiv -\frac{\mathrm{d}B_z(r)}{\mathrm{d}r} = kB_\theta(r),$$

$$J_z \equiv \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(rB_\theta) = kB_z(r).$$

合并上述两式,可得到一个零阶贝塞尔方程

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}B_z}{\mathrm{d}r}\right) + k^2B_z = 0,$$

它在 $r=0$ 处有界的解是

$$B_z = B_0\mathrm{J}_0(kr), \quad \Rightarrow \quad B_\theta = -\frac{1}{k}\frac{\mathrm{d}B_z}{\mathrm{d}r} = B_0\mathrm{J}_1(kr).$$

由零阶和一阶贝塞尔函数的径向行为可以看出,这样给出的环向和角向磁场剖面与前面给出的剖面定性上完全相同,而且由于贝塞尔函数零阶和一阶的最大幅度相近,故这里的环向磁场幅度也和角向磁场的相近 $B_z^{\max} \sim B_\theta^{\max}$. 由此还可以求出安全因子

$$q(r) = \frac{r}{R_0}\frac{\mathrm{J}_0(kr)}{\mathrm{J}_1(kr)}, \quad \Rightarrow \quad q(0) = \frac{2}{kR_0} \ll 1.$$

当 r 比较小时,$B_z(r)$和 $B_\theta(r)$梯度方向相反;而当 r 比较大时,两磁场的梯度方向相同;这时一定存在一个 $r \approx r_{\min}$,在此处 $B_z^2+B_\theta^2$ 构成磁阱的底部. 以上的结果都和反场箍缩的特征(图 2.10)定性相符.

(2) 普通 tokamak

这时在整个径向(除了在 $r=0$,即 $P(r)$的峰值附近) $\nabla P(r)$ 并不小,因此要用完整的平衡方程

$$\boldsymbol{J}_\perp = -\frac{1}{B^2}\nabla P \times \boldsymbol{B}.$$

将其代入总电流表达式后得

$$\boldsymbol{J} = k\boldsymbol{B} - \frac{1}{B^2}\nabla P \times \boldsymbol{B}.$$

将上式和平衡方程结合起来,即有

$$J_\theta \equiv kB_\theta + \frac{B_z}{B^2}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}r} = -\frac{\mathrm{d}B_z}{\mathrm{d}r}, \tag{2.22}$$

$$J_z \equiv kB_z - \frac{B_\theta}{B^2}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}r} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rB_\theta). \tag{2.23}$$

对普通 tokamak,环向磁场近似为常数 $\mathrm{d}B_z/\mathrm{d}r=0$,且 $B_\theta/B_z \ll 1$. 这样从(2.22)式可导出

$$\frac{B_z}{B^2}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}r} \approx -kB_\theta. \tag{2.24}$$

将此式代入(2.23)式,并略去 B_θ^2/B_z^2 的小量后得

$$k \sim \frac{1}{rB_z}\frac{\partial}{\partial r}(rB_\theta). \tag{2.25}$$

然后把上式代回(2.24)式后有

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}r} \sim -\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}B_\theta^2}{\mathrm{d}r},$$

$$P(r) = P(0) - \frac{1}{2}B_\theta^2(r).$$

这表示在普通 tokamak 中,中心的热压强最大,并且它是由角向磁场的磁压(阱)来平衡的. 从上式还可以得到 tokamak 的角向 β:

$$\beta_\theta = \frac{P}{B_\theta^2/2} \sim 1.$$

(3) 高 β tokamak

在这种位形下 P 及 ∇P 更大,上面的角向平衡表达式(2.22)中恒等号右面的第一项(kB_θ)与第二项($(B_z/B^2)\mathrm{d}P/\mathrm{d}r$)相比可忽略,故(2.22)式可近似写成

$$\frac{B_z}{B^2}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}r} = -\frac{\mathrm{d}B_z}{\mathrm{d}r}, \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}r} = -\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}B_z^2}{\mathrm{d}r}.$$

这表示 $B_z(r)$和 $P(r)$的梯度方向相反、环向磁阱在约束热等离子体中起着重大的作用. 这是和前面关于两种 tokamak 区别的讨论相一致的.

2.1.6 一维平衡方程的积分形式,一维 Grad-Shafranov 方程

1. 积分形式的平衡方程

由于螺旋箍缩位形是一维磁阱位形的最普遍的形式,故在下面的讨论中取

$$\boldsymbol{J}=(0,J_\theta(r),J_z(r)),\quad \boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}_0+\boldsymbol{B}_s,$$

$$\boldsymbol{B}_0=B_0\boldsymbol{e}_z,\quad \boldsymbol{B}_s=(0,B_{s\theta}(r),B_{sz}(r)),$$

其中 $\boldsymbol{B}_0$ 是外加常数磁场,而 $\boldsymbol{B}_s$ 是等离子体电流所产生的(自生)磁场. 平衡方程为

$$\frac{\mathrm{d}P(r)}{\mathrm{d}r}=J_\theta(B_{sz}+B_{0z})-J_zB_{s\theta},\tag{2.26}$$

其中的磁场可以由安培定律通过积分得到

$$J_\theta=-\frac{1}{\mu}\frac{\partial B_{sz}}{\partial r},\quad\Rightarrow\quad B_{sz}=-\mu\int_a^r J_\theta\mathrm{d}r,$$

$$J_z=\frac{1}{\mu r}\frac{\partial}{\partial r}(rB_{s\theta}),\quad\Rightarrow\quad B_{s\theta}=\frac{\mu}{r}\int_0^r rJ_z\mathrm{d}r.$$

如果令

$$\Lambda=\int J_\theta\mathrm{d}r,\tag{2.27}$$

则可以把角向自生磁场改写成

$$B_{sz}=\mu(\Lambda(a)-\Lambda(r)),\quad J_\theta=\Lambda'(r).$$

代入平衡方程(2.26)后有

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}r}=\Lambda'(r)[B_0+\mu(\Lambda(a)-\Lambda(r))]-\frac{\mu}{r}J_z(r)\int_0^r sJ_z(s)\mathrm{d}s.\tag{2.28}$$

对上式积分,并注意到 $\int_r^a\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}r}\mathrm{d}r=P(a)-P(r)=-P(r)$,就可以得到平衡方程的积分表达式

$$P(r)=-B_0(\Lambda(a)-\Lambda(r))-\frac{\mu}{2}(\Lambda(a)-\Lambda(r))^2$$

$$+\mu\int_r^a\frac{J_z(t)}{t}\int_0^t sJ_z(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}t.\tag{2.29}$$

下面将此式用于反场箍缩. 在令 $B_z(r)=B_0\mathrm{J}_0(kr)$ 和 $B_\theta(kr)=B_0\mathrm{J}_1(kr)$(见前面关于反场箍缩的讨论)后,由安培定律可知,相应的电流分量可写成(下面在不会引起误解时将下标“s”去掉)

$$J_z=j_0\mathrm{J}_0(kr),\quad J_\theta=j_0\mathrm{J}_1(kr).$$

于是上面的积分量可写成

$$\Lambda(r)=j_0\int\mathrm{J}_1(kr)\mathrm{d}r=-\frac{j_0}{k}\mathrm{J}_0(kr),\quad \Lambda'(r)=j_0\mathrm{J}_1(kr),$$

而

$$\int_0^r sJ_z(s)\mathrm{d}s=j_0\int_0^r s\mathrm{J}_0(ks)\mathrm{d}s=\frac{j_0}{k}r\mathrm{J}_1(kr).$$

所以平衡方程的微分形式可化成

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}r}=j_0\mathrm{J}_1(kr)\left\{B_0+\frac{\mu j_0}{k}[\mathrm{J}_0(kr)-\mathrm{J}_0(ka)]\right\}-\frac{\mu j_0}{r}\mathrm{J}_0(kr)\frac{rj_0}{k}\mathrm{J}_1(kr)$$

$$=j_0(B_0+\mu\Lambda(a))\,\mathrm{J}_1(kr).$$

对上式积分 $\int_r^a\cdots\mathrm{d}r$ 得

$$-P(r)=j_0(B_0+\mu\Lambda(a))\int_r^a\mathrm{J}_1(kr)\mathrm{d}r,$$

$$P(r)=\frac{j_0}{k}(-\mu\Lambda(a)-B_0)(\mathrm{J}_0(kr)-\mathrm{J}_0(ka)).$$

在 $0\leqslant r\leqslant a$ 区域内,有 $\mathrm{J}_0(kr)>\mathrm{J}_0(ka)$,再考虑到 $P(r)>0$,故在这里一定有

$$B_0<-\mu\Lambda(a)=\frac{\mu j_0}{k}\mathrm{J}_0(ka)=B_{sz}(0)\mathrm{J}_0(ka).$$

如果取 $a>r_0^{(1)}$($r_0^{(1)}$ 是 J_0 的第一个零点)时,从上式即有

$$B_0<B_{sz}(0)\mathrm{J}_0(ka)\leqslant 0,\quad \boldsymbol{B}_{z\,\mathrm{tot}}=-|B_0|\boldsymbol{e}_z+B_{sz}(0)\mathrm{J}_0(kr)\boldsymbol{e}_z.$$

这样在 $r=a\gtrsim r_0^{(1)}$ 处,总磁场 $B_{z\,\mathrm{tot}}(a)\approx-|B_0|\boldsymbol{e}_z$,即它是反平行于自磁场的,简称反场(请参见前面关于反场箍缩中平衡量的径向分布图 2.10). 这种反向环向总磁场一直在 $r_s<r<a$ 的区域中都

存在，直到 $r=r_s$ 处（这里 $B_{sz}(0)\mathrm{J}_0(kr_s)=|B_0|$），环向总磁场才为零. 然后在 $r\lesssim r_s$ 的中间区，才有正向的总环向磁场 $B_{z\,\mathrm{tot}}>0$. 而正是在这个区域中，有

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}r}=-j_0\left(\frac{\mu j_0}{k}\mathrm{J}_0(ka)-B_0\right)\mathrm{J}_1(kr)>0.$$

这表明压强的峰值在 $r\sim r_s$ 附近，从这里向内压强在逐步下降，在柱的中心轴上压强反而比较小. 因此以上的讨论补充了前面通过平衡方程微分形式所得出的有关反场箍缩的结果.

2. 一维 Grad-Shafranov 方程

Grad-Shafranov 方程是利用角向磁通 ψ 来表示的平衡方程. 最初 Grad-Shafranov 方程是二维的，用于描述环形磁阱位形的平衡. 但一维的螺旋磁阱位形的平衡也可以通过一维的 Grad-Shafranov 方程来描述. 为此，引入磁通

$$\psi(r)=\int_0^r B_{z\,\mathrm{tot}}\mathrm{d}A=2\pi\int_0^r[B_0+\mu(\Lambda(a)-\Lambda(s))]s\mathrm{d}s,$$

和总电流

$$I(r)=2\pi\int_0^r J_{zs}s\mathrm{d}s,$$

则有

$$\psi'=2\pi r[B_0+\mu(\Lambda(a)-\Lambda(r))],$$
$$\psi''=2\pi[B_0+\mu(\Lambda(a)-\Lambda(r))]-2\pi r\mu\Lambda'(r).$$

由此导致

$$\Lambda'(r)=\frac{1}{2\pi r\mu}\left(\frac{1}{r}\psi'-\psi''\right)=-\frac{1}{2\pi r\mu}\left[r\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{\psi'}{r}\right)\right],$$
$$I'=2\pi rJ_z(r).$$

将它们代入一维平衡方程(2.28)，得

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}r}=-\frac{1}{2\pi r\mu}\left[r\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{\psi'}{r}\right)\right]\frac{\psi'}{2\pi r}-\frac{\mu}{r}\frac{I'}{2\pi r}\frac{I}{2\pi}.$$

从中可反推出

$$-\psi'\frac{r}{\mu}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{\psi'}{r}\right)=(2\pi r)^2P'(r)+\mu I(r)I'(r).$$

进一步利用 $P'(r)=P'(\psi)\psi'(r)$，$I'(r)=I'(\psi)\psi'(r)$，将它代入上式，并消去 $\psi'(r)$后可得一维 Grad-Shafranov 方程

$$-\frac{1}{\mu}r\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{1}{r}\psi'(r)\right)=(2\pi)^2r^2P'(\psi)+\mu I(\psi)I'(\psi),\quad(2.30)$$

其中

$$r\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{1}{r}\cdots\right)$$

是柱坐标下的一维拉普拉斯算子.

2.2 环形位形的平衡(二维问题)

二维环面的几何位形如图 2.11 所示，这时环体除了在小截面 r 方向上要平衡外，在环体的大半径 R 方向及对称轴的 Z 方向上的平衡也必须考虑，为了统一分析这几种方向上的平衡，通常采用两套柱坐标系统：大柱坐标系(R,ϕ,Z)和小柱坐标系(r,θ,ϕ)，它们之间的变换关系为

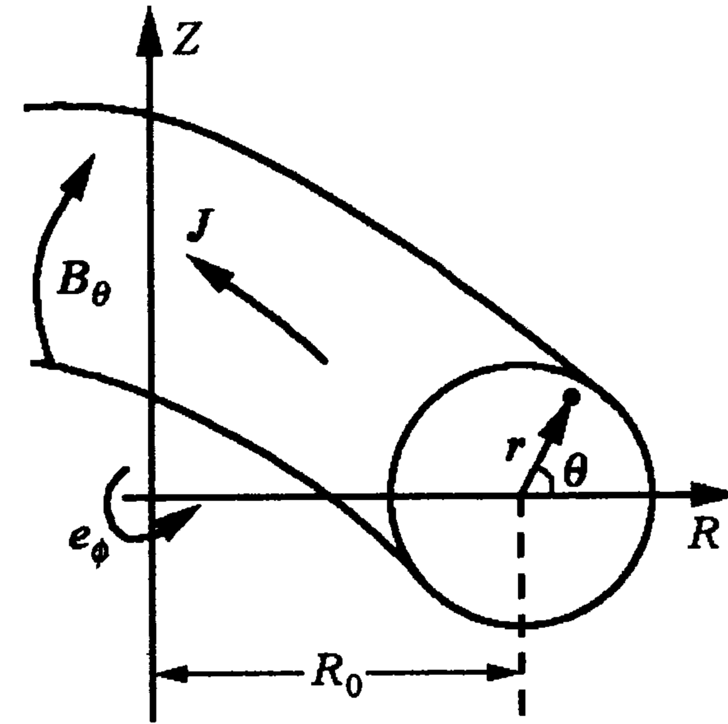


图 2.11 二维环形磁场的示意图

$$R-R_0=r\cos\theta,\quad Z=r\sin\theta,\quad(2.31)$$

$$r=\sqrt{(R-R_0)^2+Z^2},\quad\tan\theta=\frac{Z}{R-R_0}.\quad(2.32)$$

对 tokamak 等许多环形磁约束等离子体来说都有轴对称性(或近似的轴对称性)$\partial/\partial\phi=0$，故它们的位形只是二维的，即只依赖于(R,Z)或(r,θ). 环在三个方向上的平衡中，在小截面 r 方向上的平衡已经通过一维平衡的讨论解决了，而环在 R 及 Z 方向上的平衡是本节将要讨论的. 图 2.12 中显示的是等离子体大环的一段，沿环向有环向磁场 $\boldsymbol{B}_\phi$ 及电流 $\boldsymbol{J}$ 通过. 影响此环段平衡的力有四个：第一个是由环状电流 $\boldsymbol{J}$ 产生的角向磁场 B_θ 在环内侧强(这

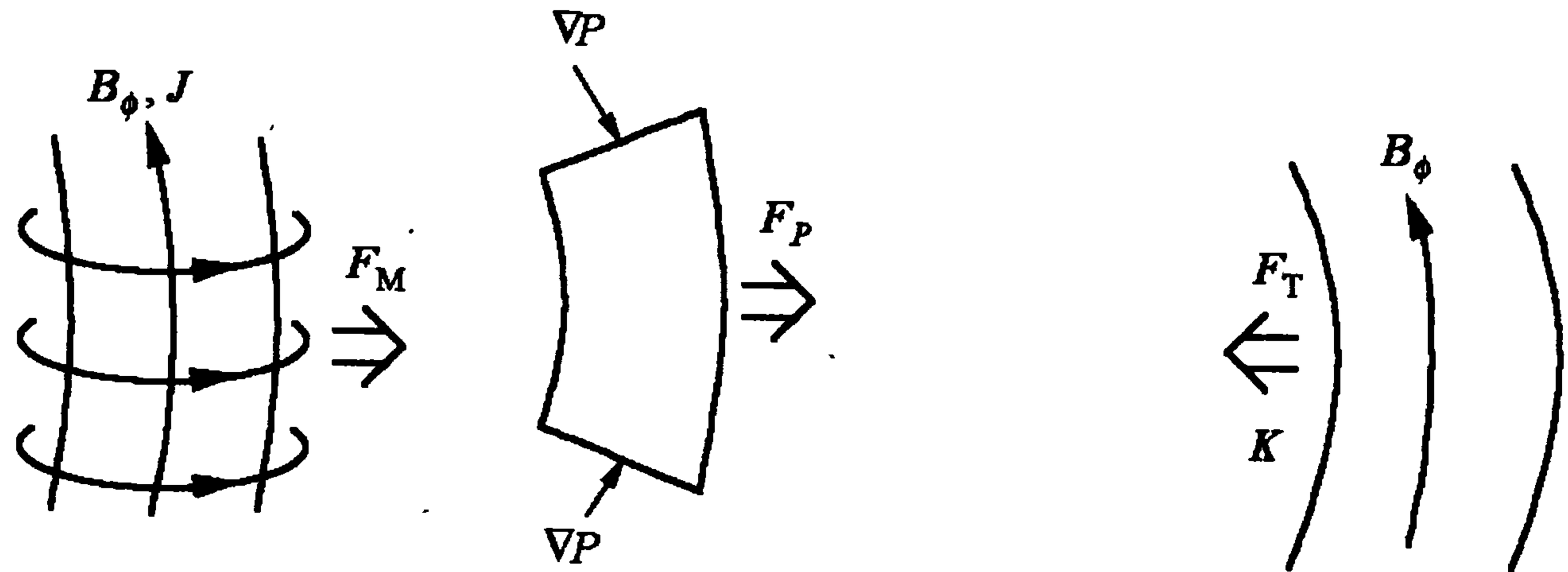


图 2.12　环段受力示意图

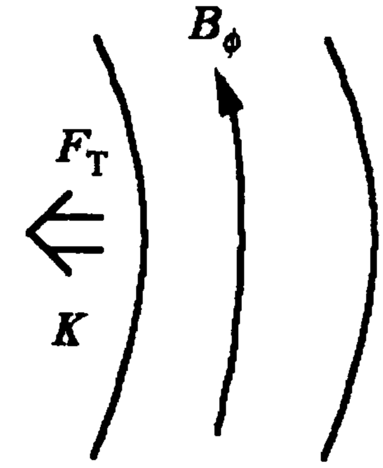


图 2.13　磁场曲率引起的使环段向内收缩力示意图

里磁力线被挤压因而变密)外侧弱而造成的磁压力,它是指向正 R 方向 $\boldsymbol{e}_R$ 的(即是使环段向外扩张的);第二个是由于环向磁场在环内侧强于环外侧而引起的磁压力,它也是指向正 R 方向的(这两个磁压力合成一个力 $\boldsymbol{F}_M$);第三个是环段两个端面上所受(邻近环段所施加)的热压力的合力,这也是使环段向正 R 方向膨胀的力 $\boldsymbol{F}_P$(这有点像烟圈的自我膨胀);最后一个力是此环段内弯曲的环向磁场所产生的磁张力,这是唯一指向负 R 方向的使环收缩的力 $\boldsymbol{F}_T$(见图 2.13).一般前三个力之和总是大于第四个力,也就是说使环膨胀的力要超过使环收缩的力,这样如果没有外力制止环的扩张,等离子体环在 R 方向上是不可能保持平衡的.同样,在 Z 方向上的平衡也需要外加力来保持.

2.2.1　环形位形平衡的唯象讨论

1. 出发方程

从一般的平衡方程组

$$\begin{cases} -\nabla P + \boldsymbol{J}\times\boldsymbol{B} = 0, \\ \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}_i + \boldsymbol{B}_e, \\ \boldsymbol{J} = \nabla\times\boldsymbol{B}_i \end{cases}$$

出发.其中 $\boldsymbol{B}_i$ 是等离子体电流 $\boldsymbol{J}$ 所产生的磁场,而 $\boldsymbol{B}_e$ 则是通过外线圈中电流所产生的外磁场(也称平衡场、环向场),上式中为方便

已令 $\mu=1$.将安培定律代入后,得到

$$-\nabla P + (\nabla\times\boldsymbol{B}_i)\times\boldsymbol{B}_i + \boldsymbol{J}\times\boldsymbol{B}_e = 0.$$

利用 $(\nabla\times\boldsymbol{B}_i)\times\boldsymbol{B}_i = \nabla\cdot\left(-\frac{1}{2}B_i^2\overset{\Rightarrow}{I} + \boldsymbol{B}_i\boldsymbol{B}_i\right)$,有

$$-\nabla(P + B_i^2/2) + \nabla\cdot(\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{B}_i) + \boldsymbol{J}\times\boldsymbol{B}_e = 0. \quad (2.33)$$

下面将分成两个方向来讨论上述平衡方程.

2. R 方向的平衡

用 $\boldsymbol{R}$ 点乘(2.33)式并对全空间积分,得

$$-\int\nabla(P+B_i^2/2)\cdot\boldsymbol{R}\mathrm{d}\boldsymbol{r} + \int\nabla\cdot(\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{B}_i)\cdot\boldsymbol{R}\mathrm{d}\boldsymbol{r} + \int\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{B}_e\cdot\boldsymbol{R}\mathrm{d}\boldsymbol{r} = 0.$$

利用 $\nabla\cdot\boldsymbol{R}=2$,上式第一项中被积函数可化成 $\nabla\cdot[(P+B_i^2/2)\boldsymbol{R}] - 2(P+B_i^2/2)$,故这项可写成

$$-\oint(P + B_i^2/2)\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{e}_n\mathrm{d}S + \int 2(P + B_i^2/2)\mathrm{d}\boldsymbol{r}.$$

下面来看第二项,利用

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{B}_i)\cdot\boldsymbol{R} = \nabla\cdot(\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{B}_i\cdot\boldsymbol{R}) - |\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{B}_i\cdot(\nabla\boldsymbol{R})|$$

及

$$\frac{\partial\boldsymbol{e}_R}{\partial\phi} = \boldsymbol{e}_\phi, \quad \frac{\partial\boldsymbol{e}_R}{\partial R} = \frac{\partial\boldsymbol{e}_R}{\partial Z} = 0,$$

且 $\nabla\boldsymbol{R} = \boldsymbol{e}_R\boldsymbol{e}_R + \boldsymbol{e}_\phi\boldsymbol{e}_\phi = \overset{\Rightarrow}{I} - \boldsymbol{e}_Z\boldsymbol{e}_Z$,于是有

$$|\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{B}_i\cdot(\nabla\boldsymbol{R})| = B_i^2 - B_{iZ}^2.$$

这样第二项可写成

$$\oint(\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{B}_i\cdot\boldsymbol{R})\cdot\boldsymbol{e}_n\mathrm{d}S - \int(B_i^2 - B_{iZ}^2)\mathrm{d}\boldsymbol{r}.$$

最后,总的 R 向平衡方程为

$$\int 2(P + B_i^2/2)\mathrm{d}\boldsymbol{r} - \int(B_i^2 - B_{iZ}^2)\mathrm{d}\boldsymbol{r} + \int\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{B}_e\cdot\boldsymbol{R}\mathrm{d}\boldsymbol{r}$$
$$= \oint[(P + B_i^2/2)\boldsymbol{R} - \boldsymbol{B}_i\boldsymbol{B}_i\cdot\boldsymbol{R}]\cdot\boldsymbol{e}_n\mathrm{d}S.$$

一般等离子体电流只在有限区域中存在,故当 $r\to\infty$ 时 $B_i(r)\to 1/r^3\to 0$;这样只要把积分区域取得足够大,其面积分就可以忽略掉.于是上面的平衡方程就变成

$$\int 2(P + B_{iZ}^2/2)\mathrm{d}\boldsymbol{r} + \int \boldsymbol{J} \times \boldsymbol{B}_e \cdot \boldsymbol{R}\mathrm{d}\boldsymbol{r} = 0. \qquad (2.34)$$

这表示环在 R 向的平衡是由外磁场 $\boldsymbol{B}_e$ 和等离子体电流 $\boldsymbol{J}$ 所产生的洛伦兹力的 R 向分力来保持的. 为了看出是哪个方向的外磁场在起作用,令

$$\boldsymbol{B}_e = \boldsymbol{B}_{ep} + \boldsymbol{B}_{e\phi}, \quad \boldsymbol{J} = \boldsymbol{J}_p + \boldsymbol{J}_\phi,$$

其中下标 p 表示角向,而 ϕ 表示环向. 可证 $\int \boldsymbol{J}_p \times \boldsymbol{B}_{e\phi} \cdot \boldsymbol{R}\mathrm{d}\boldsymbol{r} = 0$,即 $\boldsymbol{B}_{e\phi}$对 R 向平衡不起作用: 因为 $\boldsymbol{B}_{e\phi} = (B_0R_0/R)\boldsymbol{e}_\phi$,故

$$\begin{aligned}\int \boldsymbol{J}_p \times \boldsymbol{B}_{e\phi} \cdot \boldsymbol{R}\mathrm{d}\boldsymbol{r} &= B_0R_0\int \boldsymbol{J}_p \times \boldsymbol{e}_\phi \cdot \boldsymbol{e}_R\mathrm{d}\boldsymbol{r} \\ &= B_0R_0\int \boldsymbol{J}_p \cdot (\boldsymbol{e}_\phi \times \boldsymbol{e}_R)\mathrm{d}\boldsymbol{r} \\ &= -B_0R_0\int \boldsymbol{J}_p \cdot \boldsymbol{e}_Z\mathrm{d}\boldsymbol{r} \\ &= -B_0R_0\int J_{pZ}\mathrm{d}\boldsymbol{r} \\ &= 0.\end{aligned}$$

上式的最后一步之所以为零,是因为 $\boldsymbol{J}_p$ 是沿磁面流动的(见图 2.14),它在全空间积分时正反方向的分量正好抵消.

图 2.14　Z 向电流的全空间积分示意图

这样,只有角向磁场产生的洛伦兹力 $\boldsymbol{J}_\phi \times \boldsymbol{B}_{ep}$才对 R 方向的平衡有贡献:

$$\begin{aligned}\int \boldsymbol{R} \cdot (\boldsymbol{J}_\phi \times \boldsymbol{B}_{ep})\mathrm{d}\boldsymbol{r} &= \int R(\boldsymbol{e}_R \times \boldsymbol{e}_\phi) \cdot \boldsymbol{B}_{ep}J_\phi\mathrm{d}\boldsymbol{r} \\ &= \int RB_{eZ}J_\phi\mathrm{d}\boldsymbol{r},\end{aligned}$$

故最后有 R 向平衡方程

$$\int (2P + B_{iZ}^2 + RB_{eZ}J_\phi)\mathrm{d}\boldsymbol{r} = 0. \qquad (2.35)$$

因为其中 $B_{iZ}^2, 2P > 0$,故上式要成立,$B_{eZ}J_\phi$ 必须取负值. 这就是说,当 $B_{eZ} < 0$($\boldsymbol{B}_{eZ}$方向和 $\boldsymbol{e}_Z$ 相反)时,$J_\phi > 0$($\boldsymbol{J}_\phi$ 在 $\boldsymbol{e}_\phi$ 方向)(图 2.15);而当 $B_{eZ} > 0$($\boldsymbol{B}_{eZ}$在 $\boldsymbol{e}_Z$ 方向)时,$J_\phi < 0$($\boldsymbol{J}_\phi$ 在 $-\boldsymbol{e}_Z$ 方向)(见图 2.16).

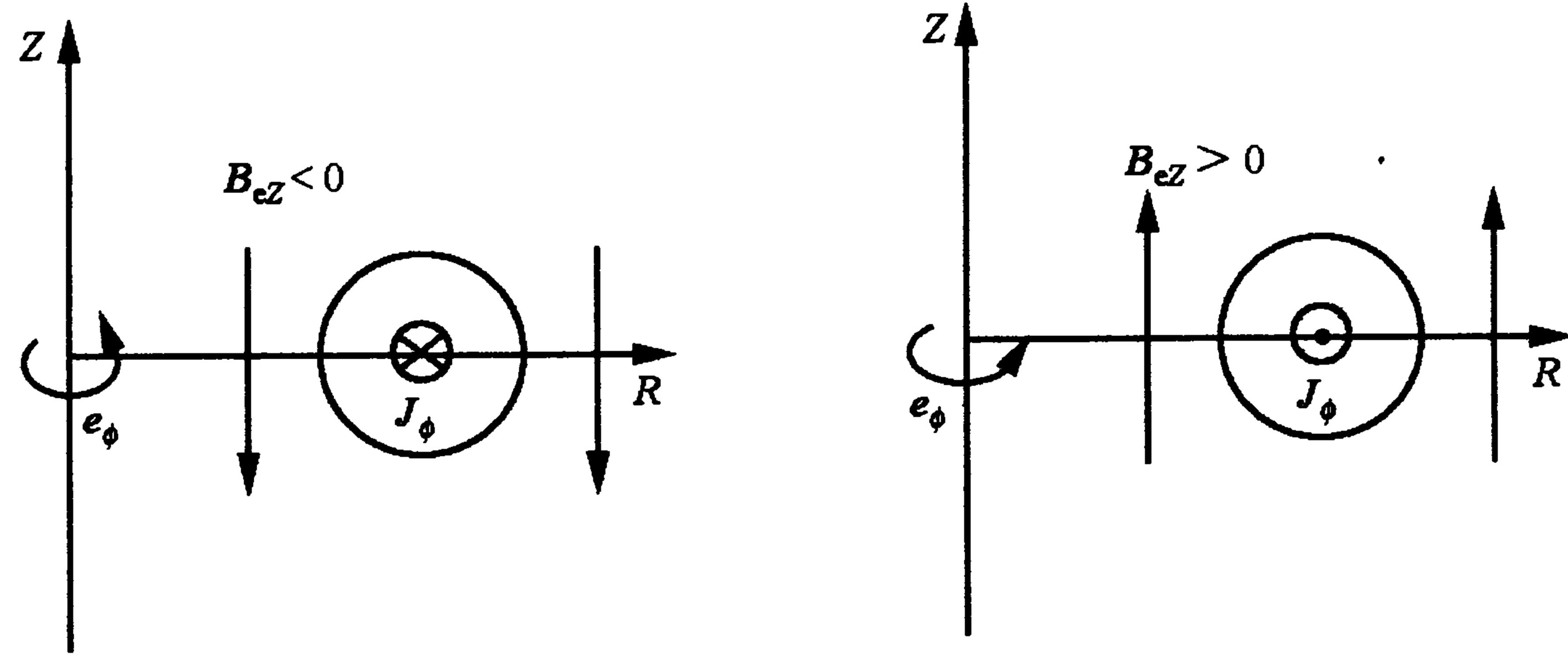


图 2.15　R 向平衡示意图之一　　图 2.16　R 向平衡示意图之二

3. Z 方向的平衡

类似上节,作 $\int \boldsymbol{Z} \cdot \{(2.33)式\}\mathrm{d}\boldsymbol{r}$,得

$$-\int \nabla(P + B_i^2/2) \cdot \boldsymbol{Z}\mathrm{d}\boldsymbol{r} + \int \nabla \cdot (\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{B}_i) \cdot \boldsymbol{Z}\mathrm{d}\boldsymbol{r} + \int \boldsymbol{J} \times \boldsymbol{B}_e \cdot \boldsymbol{Z}\mathrm{d}\boldsymbol{r} = 0.$$

注意到 $\nabla \cdot \boldsymbol{Z} = 1$, $\nabla \boldsymbol{Z} = \boldsymbol{e}_z\boldsymbol{e}_z$,可得

$$\begin{aligned}&\int [(P + B_i^2/2) - B_{iZ}^2]\mathrm{d}\boldsymbol{r} + \int \boldsymbol{J} \times \boldsymbol{B}_e \cdot \boldsymbol{Z}\mathrm{d}\boldsymbol{r} \\ &= \oint [(P + B_i^2/2)\boldsymbol{Z} - (\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{B}_i \cdot \boldsymbol{Z})] \cdot \boldsymbol{e}_n\mathrm{d}S.\end{aligned}$$

同样在表面取得足够大时,上式右面的面积分 $\oint \cdots \mathrm{d}S = 0$. 这样 Z 向的平衡条件就成了

$$\int [(P + B_i^2/2 - B_{iZ}^2) + \boldsymbol{J} \times \boldsymbol{B}_e \cdot \boldsymbol{Z}]\mathrm{d}\boldsymbol{r} = 0. \qquad (2.36)$$

因为 P 和 $\int (B_i^2/2 - B_{iZ}^2)\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int B_{i\phi}^2/2\mathrm{d}\boldsymbol{r}$(见下面的证明)均大于零,故

垂直方向的平衡要靠外磁场 $\boldsymbol{B}_e$ 和 $\boldsymbol{J}$ 的洛伦兹力的 Z 向分量来维持.

下面是 $\int(B_i^2/2-B_{iZ}^2)\mathrm{d}\boldsymbol{r}>0$ 的证明. 由 $\boldsymbol{J}=\boldsymbol{J}_p+\boldsymbol{J}_\phi$，可知 $\boldsymbol{B}_i=\boldsymbol{B}_{i\theta}+\boldsymbol{B}_{i\phi}$. 而在小柱坐标系 $(r,\theta,z=-R\phi)$ 中，$B_{iZ}=B_{i\theta}\cos\theta\, \boldsymbol{e}_Z$. 故

$$\frac{1}{2}B_i^2-B_{iZ}^2=\left(\frac{1}{2}-\cos^2\theta\right)B_{i\theta}^2+\frac{1}{2}B_{i\phi}^2.$$

考虑到

$$\int \mathrm{d}\boldsymbol{r}\equiv\int r\mathrm{d}r\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int \mathrm{d}z,$$

则前式中的第一项在积分 $\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\cdots$ 后为零. 所以最后有

$$\int(B_i^2/2-B_{iZ}^2)\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int B_{i\phi}^2/2\mathrm{d}\boldsymbol{r}>0.$$

同样可以证明环向外磁场不能维持稳定的垂直平衡. 这是因为

$$\boldsymbol{J}_p\times\boldsymbol{B}_{e\phi}\cdot\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{J}_p\cdot(\boldsymbol{B}_{e\phi}\times\boldsymbol{Z})=B_{e\phi}Z\boldsymbol{J}_p\cdot\boldsymbol{e}_R=ZB_{e\phi}J_{pR},$$

所以要满足(2.36)式，就要求 $ZB_{e\phi}J_{pR}<0$. 通常我们希望等离子体环柱的中心轴正好在赤道面上，如果一开始可以通过适当选择的 $B_{e\phi}J_{pR}$ 来使平衡方程得到满足（见图 2.17）；则这种平衡也是对 Z 向的小扰动不稳定的. 这是因为如果这时环整体有一个向上的平移，上式中的 $\int ZB_{e\phi}J_{pR}\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 就会变值，而这时积分中的其他项并不会

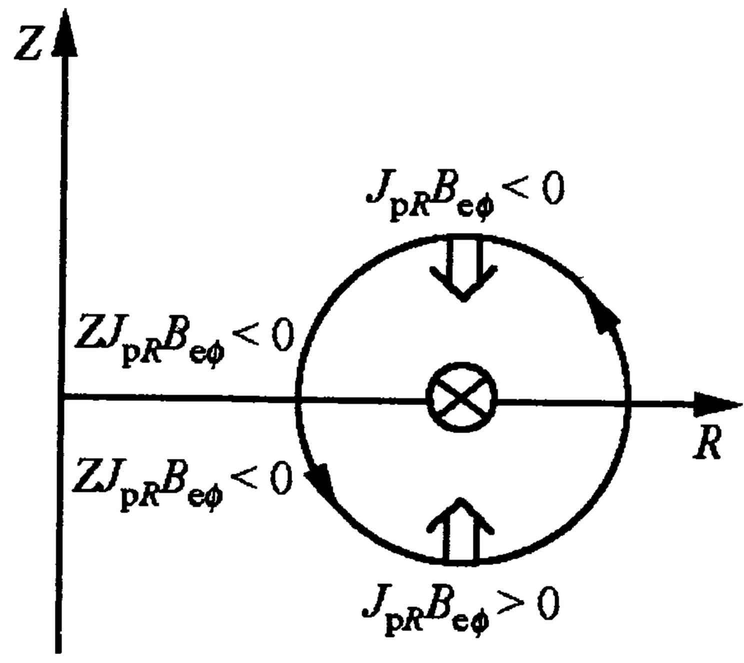


图 2.17　Z 向平衡示意图之一

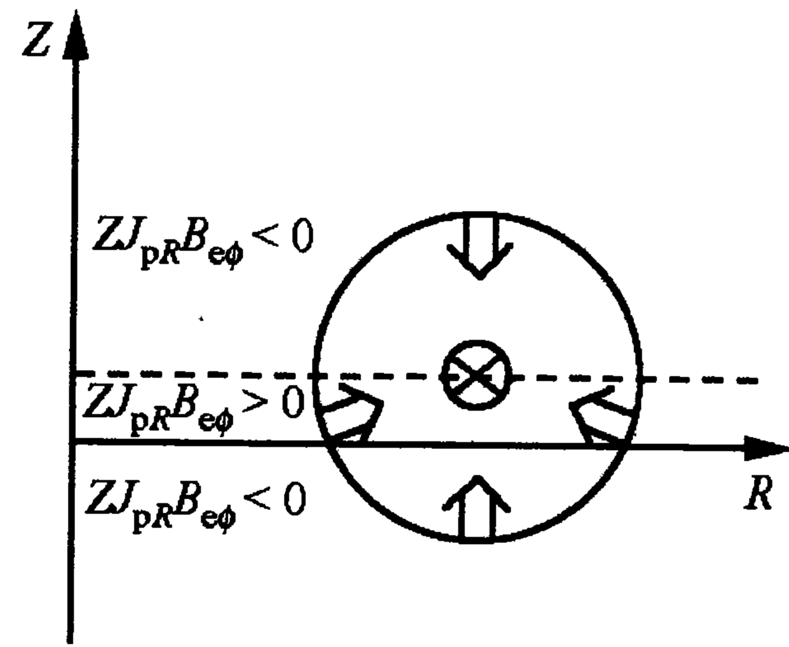


图 2.18　Z 向平衡示意图之二

改变，于是平衡方程就不再满足（见图 2.18）. 这说明环向磁场所产生的平衡力并不能使 Z 向平衡保持稳定，所以仍然要靠外加的角向磁场来维持 Z 向平衡. 从

$$\boldsymbol{J}_\phi\times\boldsymbol{B}_{ep}\cdot\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{B}_{ep}\cdot(\boldsymbol{e}_Z\times\boldsymbol{J}_\phi)=-ZJ_\phi\boldsymbol{B}_{ep}\cdot\boldsymbol{e}_R=-ZJ_\phi B_{epR},$$

可知这时 Z 向平衡条件是

$$\int(P+B_i^2/2-B_{iZ}^2-ZJ_\phi B_{epR})\mathrm{d}\boldsymbol{r}=0. \tag{2.37}$$

也即要求 $ZJ_\phi B_{epR}>0$. 这就是说：

(i) 当 $J_\phi<0$ 时，则有 $ZB_{epR}<0$，于是 $B_{epR}<0(Z>0)$；$B_{epR}>0(Z<0)$.

(ii) 当 $J_\phi>0$ 时，则有 $ZB_{epR}>0$，于是 $B_{epR}>0(Z>0)$；$B_{epR}<0(Z<0)$.

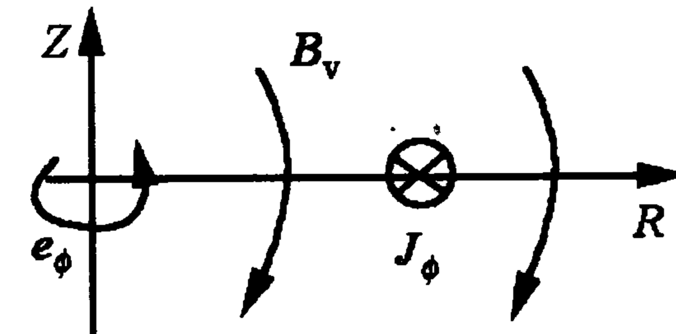


图 2.19　Z 向平衡示意图之三

因此当我们把上述两种平衡外磁场加起来后，总的平衡磁场（又称垂直场）$\boldsymbol{B}_v=\boldsymbol{B}_{eZ}+\boldsymbol{B}_{epR}$ 必须有着图 2.19 所示的那种略向外凸的磁力线形态.

2.2.2　二维问题的平衡方程

1. 磁场、电流及安全因子的表达式

对 tokamak 这类的轴对称系统有

$$\frac{\partial}{\partial\phi}=0,\quad \boldsymbol{e}_\phi=R\nabla\phi,\quad \boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}_\phi+\boldsymbol{B}_p.$$

其中环向磁场为 $\boldsymbol{B}_\phi=B_\phi\boldsymbol{e}_\phi$，而 B_ϕ 是不依赖于 ϕ 的常量. 这样 $\nabla\cdot\boldsymbol{B}=\nabla\cdot\boldsymbol{B}_\phi+\nabla\cdot\boldsymbol{B}_p=\nabla\cdot\boldsymbol{B}_p=0$，即角向磁场的 R 向分量和 Z 向分量要满足

$$\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}(RB_R)+\frac{\partial B_Z}{\partial Z}=0.$$

故可引进标量函数 $\psi(R,Z)$，并令

$$B_R = -\frac{1}{2\pi R}\frac{\partial\psi}{\partial Z},\quad B_Z = \frac{1}{2\pi R}\frac{\partial\psi}{\partial R},\tag{2.38}$$

或令

$$B_r = -\frac{1}{2\pi R}\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta},\quad B_\theta = \frac{1}{2\pi R}\frac{\partial\psi}{\partial r}.\tag{2.39}$$

这样角向磁场可表示成

$$\boldsymbol{B}_\mathrm{p} = B_R\boldsymbol{e}_R + B_Z\boldsymbol{e}_Z = \frac{1}{2\pi}\nabla\psi\times\nabla\phi = \frac{1}{2\pi R}\nabla\psi\times\boldsymbol{e}_\phi,\tag{2.40}$$

以及

$$B_\mathrm{p} \equiv |\boldsymbol{B}_\mathrm{p}| = \frac{|\nabla\psi|}{2\pi R}.\tag{2.41}$$

而 ψ 有角向磁通的物理意义

$$\psi(R,Z) = \int_0^R B_Z\mathrm{d}(\pi R^2) = \int_S \boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S},$$

其中 S 是平行于赤道面、高为 Z 而半径为 R 的圆面. 所以最后总磁场可写成

$$\boldsymbol{B} = B_\phi\boldsymbol{e}_\phi + \frac{1}{2\pi R}\nabla\psi\times\boldsymbol{e}_\phi.\tag{2.42}$$

把上式代入安培定律 $\boldsymbol{J}=\nabla\times\boldsymbol{B}/\mu$, 可得电流 $\boldsymbol{J}=\boldsymbol{J}_\phi+\boldsymbol{J}_\mathrm{p}$ 的表达式分别为

$$\boldsymbol{J}_\phi = \frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial B_R}{\partial Z} - \frac{\partial B_Z}{\partial R}\right)\boldsymbol{e}_\phi \equiv -\frac{1}{2\pi R\mu}\Delta^*\psi\boldsymbol{e}_\phi,\tag{2.43}$$

其中 Δ^* 是二维的拉普拉斯算符

$$\Delta^* = R\frac{\partial}{\partial R}\left(\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}\right) + \frac{\partial^2}{\partial Z^2} = \frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{\partial^2}{\partial Z^2} - \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}.\tag{2.44}$$

而角向电流为 $\boldsymbol{J}_\mathrm{p}=J_R\boldsymbol{e}_R+J_Z\boldsymbol{e}_Z$, 其中

$$\mu J_R = -\frac{\partial B_\phi}{\partial Z} = -\frac{1}{R}\frac{\partial(RB_\phi)}{\partial Z},$$

$$\mu J_Z = \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}(RB_\phi).$$

积分后一方程, 可得

$$\begin{aligned} RB_\phi &= \mu\int J_Z R\mathrm{d}R, \\ 2\pi RB_\phi &= \mu\int 2\pi RJ_Z\mathrm{d}R \\ &= \mu\int_S \boldsymbol{J}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} \\ &= \mu I(\psi). \end{aligned}$$

其中 S 是高为 Z、半径为 R 的圆面, 所以穿过此面的电流正是相应磁面 $\psi(R,Z)$ 之外的等离子体电流, 它也是磁通的函数. 由此可知环向磁场和 I 可以互相表示成

$$B_\phi = \frac{\mu I}{2\pi R},\quad\Rightarrow\quad I = \frac{2\pi}{\mu}RB_\phi.\tag{2.45}$$

而角向电流及它的两个分量也可用它来表示

$$\boldsymbol{J}_\mathrm{p} = \frac{1}{2\pi R}\nabla I\times\boldsymbol{e}_\phi,\quad\Rightarrow\quad J_R = -\frac{1}{2\pi R}\frac{\partial I}{\partial Z},\quad J_Z = \frac{1}{2\pi R}\frac{\partial I}{\partial R}.\tag{2.46}$$

结果总电流可写成

$$\boldsymbol{J} = \boldsymbol{J}_\phi + \boldsymbol{J}_\mathrm{p} = -\frac{1}{2\pi R\mu}\Delta^*\psi\boldsymbol{e}_\phi + \frac{1}{2\pi R}\nabla I\times\boldsymbol{e}_\phi.\tag{2.47}$$

最后来给出安全因子 $q(\psi)$ 的表达式. 用 (r,θ,ϕ) 坐标, 假设当 θ 从 $0\to2\pi$ 时, 磁力线在大环方向上转了 $\Delta\phi$, 按定义安全因子 $q=\Delta\phi/2\pi$. 而为了求 $\Delta\phi$, 用力线方程 $\mathrm{d}\phi/\mathrm{d}\theta=rB_\phi/RB_\theta$, 可以有

$$\begin{aligned} \Delta\phi &= \int_0^{\Delta\phi}\mathrm{d}\phi \\ &= \int_0^{2\pi}\frac{rB_\phi}{RB_\theta}\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{\mu I(\psi)}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{r}{R^2}\frac{\mathrm{d}\theta}{B_\theta} \end{aligned}$$

$$(\text{由 } r\mathrm{d}\theta/B_\theta = \mathrm{d}l/B_\mathrm{p}) = \frac{\mu I(\psi)}{2\pi}\int_L\frac{\mathrm{d}l}{R^2B_\mathrm{p}}$$

$$= \mu I(\psi)\int_L \frac{1}{|\nabla\psi|}\frac{\mathrm{d}l}{R}.$$

将上式代入安全因子的定义式后可得

$$q(\psi) = \frac{\mu I(\psi)}{4\pi^2}\int_L \frac{\mathrm{d}l}{R^2 B_p} = \frac{\mu I(\psi)}{2\pi}\int_L \frac{1}{|\nabla\psi|}\frac{\mathrm{d}l}{R}. \tag{2.48}$$

2. 二维 Grad-Shafranov 方程

Grad-Shafranov 方程是平衡时角向磁通 ψ 所满足的微分方程，由(2.43)式有

$$\Delta^*\psi = -2\pi\mu R J_\phi.$$

现在只要把方程右面的环向电流 J_ϕ 设法用 ψ 表示出来，就可以得到一个关于 ψ 的二阶椭圆方程. 而这可以通过平衡方程来做到，由 $\nabla P = \boldsymbol{J}\times\boldsymbol{B}$ 得

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}R} = J_\phi B_Z - J_Z B_\phi.$$

将上面已知的表达式

$$B_\phi = \frac{\mu I(\psi)}{2\pi R},\quad \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}R} = \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\psi}\frac{\partial\psi}{\partial R},$$

$$B_Z = \frac{1}{2\pi R}\frac{\partial\psi}{\partial R},\quad J_Z = \frac{1}{2\pi R}\frac{\partial I(\psi)}{\partial\psi}\frac{\partial\psi}{\partial R}$$

代入 R 向平衡方程后，可以求出 $J_\phi = J_\phi(\psi)$，即

$$\frac{\partial\psi}{\partial R}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\psi} = J_\phi\frac{1}{2\pi R}\frac{\partial\psi}{\partial R} - \frac{1}{2\pi R}\frac{\partial I(\psi)}{\partial\psi}\frac{\mu I(\psi)}{2\pi R}\frac{\partial\psi}{\partial R},$$

$$J_\phi = 2\pi R\frac{\mathrm{d}P(\psi)}{\mathrm{d}\psi} + \frac{\mu}{4\pi R}\frac{\mathrm{d}I^2(\psi)}{\mathrm{d}\psi}.$$

将上式代入(2.43)式的右面，就得到二维的 Grad-Shafranov 方程

$$\Delta^*\psi = -4\pi^2\mu R^2\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\psi} - \frac{\mu^2}{2}\frac{\mathrm{d}I^2(\psi)}{\mathrm{d}\psi}, \tag{2.49}$$

其中 Δ^* 的定义见(2.44)式. 这时如果给定了 $P(\psi)$ 和 $I(\psi)$ 的具体函数形式后，加上合适的边界条件，就可以从 Grad-Shafranov 方程解出 $\psi = \psi(R,Z)$. 而 $\psi(R,Z)$ = 常数的空间曲面，就是相互叠套的环形磁面. 例如，往往取

$$P(\psi) = \psi^m,\quad I^2(\psi) = \psi^n,\quad n,m = 1,2,\cdots.$$

然后用数值方法解出 $\psi(r,Z)$(详解请见文献[2]). 只有在个别情况下，如 J_ϕ = 常数，或 $J_\phi = \alpha\psi + \beta$ 时，Grad-Shafranov 方程才有严格解(见文献[3]).

2.2.3　Grad-Shafranov 方程的小参量展开，解析解

当把 $a/R = \varepsilon \ll 1$ 作为小参量，对 Grad-Shafranov 方程作微扰展开时，其最低阶(即 $\varepsilon^0 = 1$ 阶)的方程相当于无环效应时、直柱螺旋箍缩的平衡方程；而 ε^1 阶方程及解则是相应的环修正. 对普通 tokamak 及反场箍缩来说，它们展开的下一阶方程是完全一样的，但反场箍缩位形的推导过程比较简单，所以下面从这种位形来导出 Grad-Shafranov 方程(以及磁通 ψ)的小参量展开表达式. 对反场箍缩，有下面的量级关系：

$$\frac{a}{R} = \varepsilon \ll 1,\quad \frac{B_p}{B_\phi} \sim 1,\quad \beta \sim \frac{2\mu P}{B_p^2} \sim 1,\quad q = \frac{rB_\phi}{RB_p} \sim \varepsilon$$

(对 tokamak 相应的量级关系则是 $B_p/B_\phi \sim \varepsilon, \beta \sim \varepsilon^2, q \sim 1$).

1. ψ 的展开

先看小参量 ε 展开的零阶，即直柱形螺旋箍缩的情况. 假定等离子体直柱外面被一导体壳包围，则 $r = a$ 的等离子体表面是最外面的一个磁面，它是半径为 a，中心在真空室小截面几何中心的圆柱面. 而其内部的磁面是一个个同心的圆柱面(图 2.20)，其中半径为 $r = r_0$ 的磁面，其磁通可写作 $\psi(r_0) = \psi_0(r_0)$.

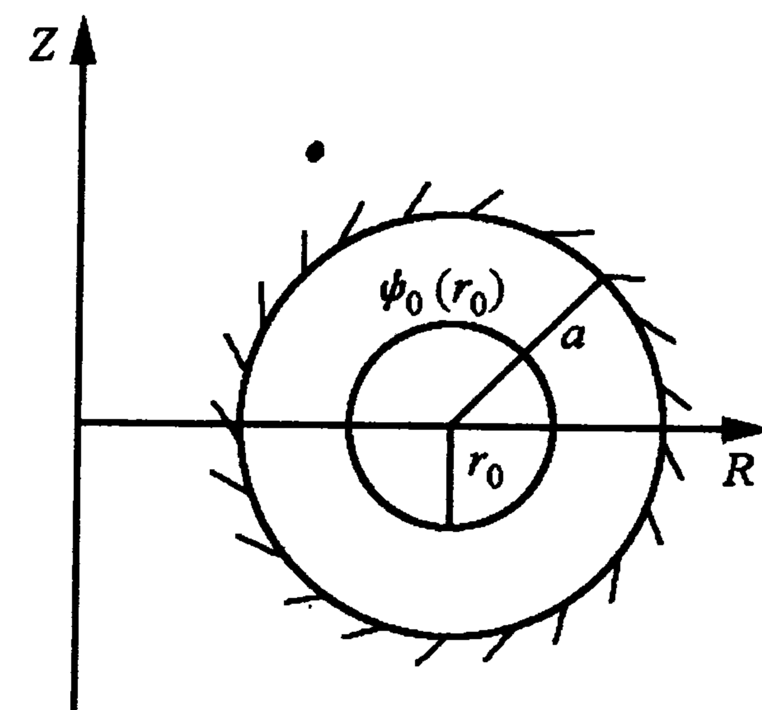


图 2.20　直柱形螺旋箍缩的磁面

在展开的下一阶，直柱已弯成了环，这时由于在 R 方向的扩张力使磁面都朝外挤压. 最外的磁面由于和金属壳相重而无法移

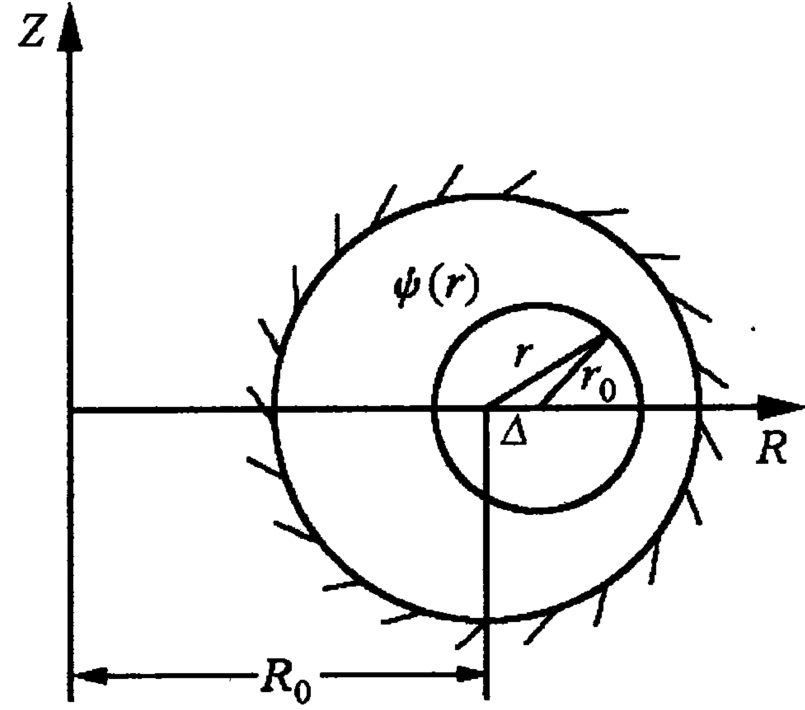


图 2.21　环形螺旋箍缩的磁面

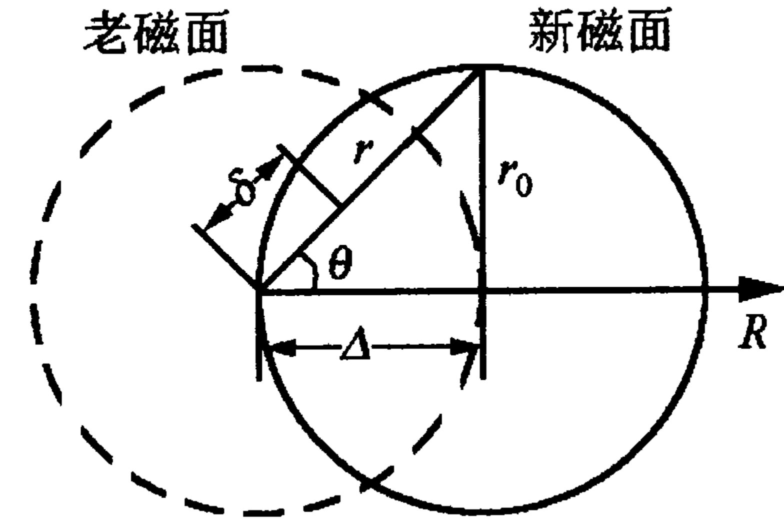


图 2.22　环形螺旋箍缩内磁面的向外偏移

动，因此只有内磁面移向外侧，而且半径愈小的磁面移动得愈多. 因为 $\varepsilon \ll 1$，故移动量也是一阶小量，所以这时环形磁面仍可以看成是原来半径为 r_0 的那个磁面，只是其圆心移至 $R=R_0+\Delta(r_0)$ 处，变成了一个偏心圆(图 2.21)，在原来的极坐标中其轨迹可以表示成(图 2.22)

$$r = r_0 + \delta(r,\theta) \approx r_0 + \Delta(r_0)\cos\theta.$$

环形磁面中心的这个位移量 $\Delta(r_0)$ 被称为 Shafranov 位移.

这时相应的磁通就变成

$$\psi(r) = \psi_0(r) + \hat{\psi}_1(r,\theta),$$

其中 $\psi_0(r)$ 是直柱近似下的零阶磁通，仅其自变量改成 $r=r_0+\Delta(r_0)\cos\theta$. 而 $\hat{\psi}(r,\theta)$ 则是磁通的一阶修正值. 在 r_0 处对 r 作展开，准确到 ε 的一阶，上式变成

$$\psi(r) = \psi_0(r_0 + \Delta(r_0)\cos\theta) + \hat{\psi}_1(r_0 + \Delta(r_0)\cos\theta)$$
$$= \psi_0(r_0) + \left.\frac{\mathrm{d}\psi_0(r)}{\mathrm{d}r}\right|_{r=r_0} \Delta(r_0)\cos\theta + \hat{\psi}_1(r,\theta).$$

因为 $\psi(r)$ 和 $\psi_0(r_0)$ 是同一个磁面的磁通值，所以大小一定相同，$\psi(r)=\psi_0(r_0)$(但 $\psi(r)\neq \psi_0(r)$). 这样从上式可得一阶磁通的修正值

$$\hat{\psi}_1(r,\theta) = -\left.\frac{\mathrm{d}\psi_0(r)}{\mathrm{d}r}\right|_{r_0} \Delta(r_0)\cos\theta$$

$$= \psi_1(r_0)\cos\theta,$$

其中

$$\psi_1(r_0) = -\left.\frac{\mathrm{d}\psi_0(r)}{\mathrm{d}r}\right|_{r_0} \Delta(r_0).$$

利用(2.41)式，

$$B_{\theta0}(r_0) = B_{p0}(r_0) = \frac{1}{2\pi R_0}\left.\frac{\mathrm{d}\psi_0}{\mathrm{d}r}\right|_{r_0},$$

可进一步把前式写成

$$\psi_1(r_0) = -2\pi R_0 B_{\theta0}(r_0)\Delta(r_0),$$

或

$$\Delta(r_0) = -\frac{\psi_1(r_0)}{2\pi R_0 B_{\theta0}(r_0)}. \tag{2.50}$$

把上面对特指 r_0 的磁面讨论变成对任意 r 的磁面讨论，就可得出下面的一般表达式

$$\psi(r) = \psi_0(r) + \psi_1(r)\cos\theta, \tag{2.51}$$

$$\psi_1(r) = -2\pi R_0 B_{\theta0}(r)\Delta(r). \tag{2.52}$$

2. Grad-Shafranov 方程的展开及简化

本节的目的是通过展开得出一个关于 Shafranov 位移 $\Delta(r)$ 的微分方程，因此需要将 Grad-Shafranov 方程从大柱坐标系(R, Z)变到小柱坐标系(r,θ)中去. 利用下面的变换式

$$r^2 = (R-R_0)^2 + Z^2, \quad \tan\theta = \frac{Z}{R-R_0},$$

可得相应的微分变换式

$$\frac{\partial}{\partial R} = \frac{\partial r}{\partial R}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial\theta}{\partial R}\frac{\partial}{\partial\theta},$$

而其中

$$\frac{\partial r}{\partial R} = \cos\theta, \quad \frac{\partial\theta}{\partial R} = -\frac{\sin\theta}{r}.$$

将它们代入前式，可以有

$$\frac{\partial}{\partial R} = \cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}.$$

同样可得

$$\frac{\partial}{\partial Z}=\frac{\partial r}{\partial Z}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\partial\theta}{\partial Z}\frac{\partial}{\partial\theta}=\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta},$$

及

$$\frac{\partial^2}{\partial R^2}+\frac{\partial^2}{\partial Z^2}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2},$$

$$\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}=\frac{1}{R_0+r\cos\theta}\left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial r}-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right).$$

最后可得二维拉普拉斯算子 Δ^* 在 (r,θ) 坐标系中的表达式

$$\Delta^*=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}-\frac{1}{R_0+r\cos\theta}\left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial r}-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right).\tag{2.53}$$

其中，需要作小参量 ε 展开的是 $1/R=1/(R_0+r\cos\theta)\approx(1/R_0)(1-r\cos\theta/R_0)$，由于小量 (r/R) 总是和 $\cos\theta$ 在一起，所以算子 Δ^* 的展开也可以近似地看成按 $\cos\theta$ 的展开

$$\Delta^*=\Delta_0^*+\Delta_1^*,$$

其中展开的零阶和 $\cos\theta$ 无关：

$$\Delta_0^*=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2},\tag{2.54}$$

而展开的一阶在准确到 ε 时可写成

$$\Delta_1^*=-\frac{1}{R_0}\left(1-\frac{r}{R_0}\cos\theta\right)\left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial r}-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\approx-\frac{1}{R_0}\cos\theta\frac{\partial}{\partial r}.\tag{2.55}$$

所以 Grad-Shafranov 方程(2.49)的左面展开到一阶是

$$\Delta^*\psi=\Delta_0^*\psi_0+(\Delta_0^*\hat{\psi}_1(r,\theta)+\Delta_1^*\psi_0).$$

而 Grad-Shafranov 方程的右面也可以作相应的展开. 首先要展开的是

$$R^2=(R_0+r\cos\theta)^2\approx R_0^2+2rR_0\cos\theta,$$

其次是

$$\frac{dP(\psi)}{d\psi}=\frac{dP(\psi_0)}{d\psi_0}+\frac{d}{d\psi}\left(\frac{dP(\psi)}{d\psi}\right)\Big|_{\psi_0}\cdot\hat{\psi}_1$$

$$=\frac{dP(\psi_0)}{d\psi_0}+\hat{\psi}_1\cdot\frac{d}{d\psi_0}\left(\frac{dP(\psi_0)}{d\psi_0}\right),$$

最后是

$$I(\psi)\frac{dI(\psi)}{d\psi}=I(\psi_0)\frac{dI(\psi_0)}{d\psi_0}+\hat{\psi}_1\cdot\frac{d}{d\psi_0}\left[I(\psi_0)\frac{dI(\psi_0)}{d\psi_0}\right].$$

这样方程式右面的零阶量是

$$-4\pi^2\mu R_0^2\frac{dP(\psi_0)}{d\psi_0}-\frac{\mu^2}{2}\frac{dI^2(\psi_0)}{d\psi_0},$$

而一阶量是

$$-\left\{4\pi^2\mu R_0^2\frac{d}{d\psi_0}\left(\frac{dP(\psi_0)}{d\psi_0}\right)+\mu^2\frac{d}{d\psi_0}\left[I(\psi_0)\frac{dI(\psi_0)}{d\psi_0}\right]\right\}\psi_1(r)\cos\theta$$

$$-8\pi^2\mu R_0 r\frac{dP(\psi_0)}{d\psi_0}\cos\theta.$$

令 $I_0=I(\psi_0)$ 及 $P_0=P(\psi_0)$，则零阶的 Grad-Shafranov 方程可写成

$$\Delta_0^*\psi_0=-\left(4\pi^2\mu R_0^2\frac{dP_0}{d\psi_0}+\mu^2 I_0\frac{dI_0}{d\psi_0}\right).\tag{2.56}$$

而一阶的 Grad-Shafranov 方程为

$$\Delta_0^*\hat{\psi}_1(r,\theta)+\Delta_1^*\psi_0$$

$$=-8\pi^2\mu R_0 r\frac{dP_0}{d\psi_0}\cos\theta$$

$$-\hat{\psi}_1(r,\theta)\frac{d}{d\psi_0}\left[4\pi^2\mu R_0^2\frac{dP_0}{d\psi_0}+\mu^2 I_0\frac{dI_0}{d\psi_0}\right].\tag{2.57}$$

可证零阶的 Grad-Shafranov 方程和一维螺旋箍缩的平衡方程等价：考虑到这时的磁通 $\psi_0(r)$ 和 θ 无关，且

$$\frac{d\psi_0(r)}{dr}=2\pi R_0B_{\theta0}(r),\quad I_0=2\pi R_0B_{\phi0}/\mu,$$

则零阶方程变成

$$\Delta_0^*\psi_0\equiv\frac{2\pi R_0}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rB_{\theta0})=-\left(4\pi^2\mu R_0^2\frac{dP_0}{dr}+4\pi^2R_0^2B_{\phi0}\frac{dB_{\phi0}}{dr}\right)\frac{dr}{d\psi_0}.$$

用 $\mathrm{d}\psi_0/\mathrm{d}r$ 同乘方程两边，稍作整理可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(P_0+\frac{B_{\phi0}^2+B_{\theta0}^2}{2\mu}\right)+\frac{B_{\theta0}^2}{\mu r}=0.$$

这个方程就是一维几何中螺旋箍缩的平衡方程.

下面来简化一阶方程(2.57)，方程左面的第一项可写为

$$\Delta_0^*\hat{\psi}_1(r,\theta)=\Delta_0^*(\psi_1(r)\cos\theta)=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\psi_1}{\partial r}\right)\cos\theta-\frac{\cos\theta}{r^2}\psi_1,$$

而左面的第二项可写成

$$\Delta_1^*\psi_0(r)=-\frac{\cos\theta}{R_0}\frac{\partial\psi_0}{\partial r}=-2\pi B_{\theta0}\cos\theta.$$

利用 $\hat{\psi}_1(r,\cos\theta)=\psi_1(r)\cos\theta$，把方程(2.57)两边的共同因子 $\cos\theta$ 去掉后，一阶方程就变成

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\psi_1}{\partial r}\right)-\frac{1}{r^2}\psi_1-2\pi B_{\theta0}$$

$$=-8\pi^2\mu rR_0\frac{\mathrm{d}P_0}{\mathrm{d}\psi_0}-\psi_1\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\psi_0}\left[4\pi^2\mu R_0^2\frac{\mathrm{d}P_0}{\mathrm{d}\psi_0}+\mu^2I_0\frac{\mathrm{d}I_0}{\mathrm{d}\psi_0}\right].$$

利用零阶的方程(2.56)，上式的右面第二项可写成

$$\psi_1\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\psi_0}(\Delta^*\psi_0)=\psi_1\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\psi_0}\left[\frac{2\pi R_0}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rB_{\theta0})\right]$$

$$=\psi_1\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[\frac{2\pi R_0}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rB_{\theta0})\right]\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\psi_0}$$

$$=\psi_1\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rB_{\theta0})\right]\frac{1}{B_{\theta0}}.$$

其中最后一步，用到了(2.41)式. 然后将上式代入前面的一阶方程，有

$$\frac{B_{\theta0}}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\psi_1}{\partial r}\right)-\frac{B_{\theta0}}{r^2}\psi_1-2\pi B_{\theta0}^2$$

$$=-4\pi\mu r\frac{\mathrm{d}P_0}{\mathrm{d}r}+\psi_1\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(rB_{\theta0})\right],$$

$$\frac{B_{\theta0}}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\psi_1}{\partial r}\right)-\psi_1\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(rB_{\theta0})\right]-\frac{B_{\theta0}}{r^2}\psi_1$$

$$=2\pi\left(B_{\theta0}^2-2\mu r\frac{\mathrm{d}P_0}{\mathrm{d}r}\right).$$

再代入 $\psi_1(r)=-2\pi R_0B_{\theta0}(r)\Delta(r)$，则有

$$-\frac{R_0B_{\theta0}}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[r\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(\Delta B_{\theta0})\right]+R_0B_{\theta0}\Delta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(rB_{\theta0})\right]+\frac{R_0B_{\theta0}^2\Delta}{r^2}$$

$$=B_{\theta0}^2-2\mu r\frac{\mathrm{d}P_0}{\mathrm{d}r},$$

$$-\frac{B_{\theta0}}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[r\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(\Delta B_{\theta0})\right]+B_{\theta0}\Delta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(rB_{\theta0})\right]+\frac{B_{\theta0}^2\Delta}{r^2}$$

$$=\frac{B_{\theta0}^2}{R_0}-\frac{2\mu r}{R_0}\frac{\mathrm{d}P_0}{\mathrm{d}r}.$$

将这个方程左面的两个导数项展开、合并，最后方程左面可以简化成

$$-\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(rB_{\theta0}^2\Delta').$$

所以一阶的 Grad-Shafranov 方程最后可以写成

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(rB_{\theta0}^2\Delta')=\frac{2\mu r^2}{R_0}\frac{\mathrm{d}P_0}{\mathrm{d}r}-\frac{r}{R_0}B_{\theta0}^2. \tag{2.58}$$

对 tokamak 位形，小参量展开的具体过程不同，但所得的最高阶(二阶)和下一阶(三阶)方程和反场箍缩却相似. 如在展开的首阶有方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(P_2+\frac{1}{\mu}B_0B_{\phi2}\right)+\frac{B_{\theta1}}{\mu r}\frac{\mathrm{d}(rB_{\theta1})}{\mathrm{d}r}=0, \tag{2.59}$$

其中

$$B_{\theta1}(r)=\frac{1}{R_0}\frac{\mathrm{d}\psi_0}{\mathrm{d}r},\quad B_\phi(r)=B_0+B_{\phi2}(r),\quad B_{\phi2}(r)=\frac{I_1(\psi_0)}{R_0},$$

其中 $B_{\phi2}(r)$是环向磁场的二阶小量，反映了环向磁场沿小半径的不均匀性. 故平衡方程中的 $B_0B_{\phi2}$代表径向不均匀的磁压强.

在 tokamak 位形展开的下一阶所得平衡方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(rB_{\theta1}^2\Delta')=\frac{2\mu r^2}{R_0}\frac{\mathrm{d}P_2}{\mathrm{d}r}-\frac{r}{R_0}B_{\theta1}^2. \tag{2.60}$$

这些都和反场箍缩的相应方程一样，只是在 tokamak 中 B_θ 的平衡量是一阶小量而 P 的平衡量是二阶小量，故平衡方程的展开要进行到更高阶.

也可以得到展开到更下一阶(例如对反场箍缩来说是 ε^2 阶)的 Grad-Shafranov 方程及其解析解. 请参见文献[4].

3. 一阶 Grad-Shafranov 方程的解(完全导体壁边条件)

这时，因为 $r=a$ 处既是导体壳也是最外边的一个磁面，故有 $\psi(a)=\psi(a,\theta)=\psi(a)=$常数，及 $\Delta(a)=0$. 这时，直接积分一阶的 Grad-Shafranov 方程(2.58)，得

$$\Delta'(r)=\frac{1}{rB_{\theta 0}^2}\int_0^r\left(\frac{2\mu y^2}{R_0}\frac{\mathrm{d}P_0}{\mathrm{d}y}-\frac{y}{R_0}B_{\theta 0}^2(y)\right)\mathrm{d}y,$$

再积分一次就有

$$\Delta(r)=C+\int_0^r\frac{\mathrm{d}x}{xB_{\theta 0}^2(x)}\int_0^x\left(\frac{2\mu y^2}{R_0}\frac{\mathrm{d}P_0}{\mathrm{d}y}-\frac{y}{R_0}B_{\theta 0}^2(y)\right)\mathrm{d}y.$$

利用边条件 $\Delta(a)=0$，可以定出上式中的积分常数

$$C=-\int_0^a\frac{\mathrm{d}x}{xB_{\theta 0}^2(x)}\int_0^x\left(\frac{2\mu y^2}{R_0}\frac{\mathrm{d}P_0}{\mathrm{d}y}-\frac{y}{R_0}B_{\theta 0}^2(y)\right)\mathrm{d}y.$$

所以一阶方程的解析解最后是

$$\Delta(r)=-\int_r^a\frac{\mathrm{d}x}{xB_{\theta 0}^2(x)}\int_0^x\left(\frac{2\mu y^2}{R_0}\frac{\mathrm{d}P_0}{\mathrm{d}y}-\frac{y}{R_0}B_{\theta 0}^2(y)\right)\mathrm{d}y. \quad (2.61)$$

或利用前面给出的定义(2.52)式，$\psi_1(r)=-2\pi R_0B_{\theta 0}(r)\Delta(r)$，可以最后把扰动磁通写成

$$\psi_1(r)=2\pi R_0B_{\theta 0}(r)\int_r^a\frac{\mathrm{d}x}{xB_{\theta 0}^2(x)}\int_0^x\left(\frac{2\mu y^2}{R_0}\frac{\mathrm{d}P_0}{\mathrm{d}y}-\frac{y}{R_0}B_{\theta 0}^2(y)\right)\mathrm{d}y. \quad (2.62)$$

4. 垂直场大小的估算

如果不用导体壳，也可以用一个垂直场 B_v 来使等离子体环保持平衡. 为了估算这个垂直场应取多大值，可以假定它的加入仍使平衡磁面和有导壳时的一样，即仍保持上面的边条件及一阶解的

形式不变. 这时垂直场 B_v 的值可以近似地用边界 $r=a$ 处角向磁场 $B_\theta(a)$的垂直(Z 向)分量来给出

$$B_v=\overline{B}_{\theta Z}=\int \boldsymbol{e}_Z\cdot\boldsymbol{B}_\theta(a)\frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi}=\int\frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi}B_\theta(a)\cos\theta. \quad (2.63)$$

从上式可以看到，为了完成积分，先要得出有导体壳时的 $B_\theta(a)$表达式. 按定义

$$B_\theta(r)=\frac{1}{2\pi R}\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}r}.$$

利用 $R=R_0+r\cos\theta$, $\psi(r)=\psi_0(\boldsymbol{r})+\hat{\psi}_1(r,\theta)$, $r=r_0+\Delta(r)\cos\theta$，有

$$B_\theta(r)=\frac{1}{2\pi R_0}\left(1-\frac{r}{R_0}\cos\theta\right)\left(\frac{\mathrm{d}\psi_0(r)}{\mathrm{d}r}+\frac{\mathrm{d}\hat{\psi}_1(r)}{\mathrm{d}r}\right)$$
$$=\frac{1}{2\pi R_0}\left(1-\frac{r}{R_0}\cos\theta\right)$$
$$\times\left(\left.\frac{\mathrm{d}\psi_0(r)}{\mathrm{d}r}\right|_{r_0}+\left.\frac{\mathrm{d}^2\psi_0}{\mathrm{d}r^2}\right|_{r_0}\cdot\Delta(r)\cos\theta+\left.\frac{\mathrm{d}\hat{\psi}_1(r)}{\mathrm{d}r}\right|_{r_0}+\cdots\right).$$

上式最后一项，在代入(2.52)式及 $B_{\theta 0}$的定义后，有

$$\hat{\psi}_1=-\frac{\mathrm{d}\psi_0(r)}{\mathrm{d}r}\Delta(r)\cos\theta,$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}\hat{\psi}_1(r)}{\mathrm{d}r}\right|_{r_0}=-\cos\theta\Delta(r)+\left.\frac{\mathrm{d}^2\psi_0}{\mathrm{d}r^2}\right|_{r_0}-\cos\theta\left.\frac{\mathrm{d}\psi_0}{\mathrm{d}r}\right|_{r_0}\cdot\frac{\mathrm{d}\Delta}{\mathrm{d}r}.$$

把它代入前一个式子中后，可消掉 $\mathrm{d}^2\psi_0/\mathrm{d}r^2\big|_{r_0}$ 的项，得

$$B_\theta(r)=\frac{1}{2\pi R_0}\frac{\mathrm{d}\psi_0}{\mathrm{d}r}\left(1-\frac{r}{R_0}\cos\theta-\left.\frac{\mathrm{d}\Delta}{\mathrm{d}r}\right|_{r_0}\cos\theta\right)$$
$$\equiv B_{\theta 0}(r_0)\left(1-\frac{r}{R_0}\cos\theta-\Delta'(r_0)\cos\theta\right). \quad (2.64)$$

上式中恒等号后第一项 $B_{\theta 0}(r_0)$是直柱(零阶)时的 B_θ 值；第二项表示等离子体弯成环后，原点(磁轴)不动而环外侧的 B_θ 值要比环内侧值小的环效应；第三项表示由于磁面中心外移而产生的环修正. 这后两项都含有 $\cos\theta$，因而隐含着垂直(z 向)分量. 把上式代入计算垂直场 B_v 的积分，由于周期性，第一项为零，剩下的是

$$B_v = \overline{B}_{\theta z} = -\int B_{\theta 0}(a)\cos^2\theta\left(\frac{a}{R_0} + \Delta'(a)\right)\frac{d\theta}{2\pi}$$
$$= -\frac{1}{2}B_{\theta 0}(a)\left(\frac{a}{R_0} + \Delta'(a)\right).$$

其中 $\Delta'(a)$ 可通过一阶 Grad-Shafranov 方程的解得到

$$aB_{\theta 0}^2(a)\Delta'(a) = \int_0^a\left(2\mu r\frac{dP_0}{dr} - B_{\theta 0}^2(r)\right)\frac{rdr}{R_0}$$
$$= \frac{2\mu}{R_0}(r^2P_0(r))\Big|_0^a - \frac{2\mu}{R_0}\int_0^a\left(2P_0 + \frac{B_{\theta 0}^2}{2\mu}\right)rdr$$
$$= -\frac{\mu a^2}{R_0}\left(2\overline{P}_0 + \frac{\overline{B_{\theta 0}^2}}{2\mu}\right), \quad (P_0(a) = 0)$$

其中，上加横线表示如下运算：

$$\overline{A} = \frac{1}{\pi a^2}\int_0^a A(r)2\pi r dr.$$

所以

$$\Delta'(a) = -\frac{a}{R_0}\left(\frac{\overline{P_0}}{B_{\theta 0}^2(a)/2\mu} + \frac{1}{2}\frac{\overline{B_{\theta 0}^2}}{B_{\theta 0}^2(a)}\right)$$
$$= -\frac{a}{R_0}\left(\overline{\beta_\theta} + \frac{1}{2}l_i\right).$$

其中 $\overline{\beta_\theta} = \overline{P_0}/(B_{\theta 0}^2(a)/(2\mu))$ 为（小截面）平均的角向 β，而 $l_i = \overline{B_{\theta 0}^2}/B_{\theta 0}^2(a)$ 则为等离子体内感，将上式代入(2.64) $B_\theta(a)$ 的表达式后，又可得

$$B_\theta(a) = B_{\theta 0}(a)\left[1 - \frac{a}{R_0}\cos\theta - \Delta'(a)\cos\theta\right]$$
$$= B_{\theta 0}(a)\left[1 + \frac{a}{R_0}\left(\overline{\beta_\theta} + \frac{1}{2}l_i - 1\right)\cos\theta\right]$$
$$= B_{\theta 0}(a)\left[1 + \frac{a}{R_0}\Lambda\cos\theta\right],$$

其中 $\Lambda = \overline{\beta_\theta} + l_i/2 - 1$. 将上两式代入 B_v，最终就得到了垂直场的估算值

$$B_v = \frac{a}{2R_0}B_{\theta 0}(a)\Lambda. \tag{2.65}$$

这和从更精确的解得出的垂直场值（见文献[5]）

$$B_v = \frac{a}{2R_0}B_{\theta 0}(a)\left(\beta_\theta + \ln\frac{8R_0}{a} - \frac{3}{2} + \frac{l_i}{2}\right) \tag{2.66}$$

相差不多. 上式中的对数项和等离子体环的自感有关，例如一个半径为 R、截面为 a 的导体环其环自感就为

$$L = \mu R\left[\ln\left(\frac{8R}{a}\right) - \frac{7}{4}\right]. \tag{2.67}$$

另外等离子体环的内感 l_i 和角向磁场的剖面 $B_\theta(r)$ 有关，而 $B_\theta(r)$ 又和等离子体电流的径向剖面 $J_p(r)$ 有关（安培定律），所以 l_i 是由电流分布决定的. 一般，电流密度分布（剖面）的中心愈尖，内感就愈大. 例如当电流密度为趋肤分布时，$l_i \sim 0$；为均匀分布时，$l_i = 0.5$；为抛物线分布时，$l_i = 0.92$；为零阶贝塞尔函数分布时，$l_i = 1.0$.

参考文献

[1] Bittencourt J A. Fundamentals of Plasma Physics. Pergamon Press, Oxford. 346

[2] Tatsuoki Takeda, Shinji Tokuda. J. Comput. Physics, **93**(1991)1

[3] Mazzucato E *et al*. Phys. Fluids, **18**(1975)536;
Johnson T L, Dalhed H E *et al*. J. Comput. Physics, **32**(1979)212

[4] Freidberg J F. Plasma Phys. Control. Fusion, **35**(No. 11)(1993)1641

[5] 〔日〕宫本健郎. 热核聚变等离子体物理学. 北京：科学出版社，1981. 171

第三章　磁流体力学波

一个已经处在平衡态的磁流体体系，在受到小扰动时，往往会在平衡态附近作本征运动. 当体系处在热力学平衡或近热力学平衡状态下时，这种本征的集体运动振幅往往只有热噪声的水平，并维持在这个水平上；它们被统称为(稳定的)磁流体力学波. 本章将分别讨论均匀和非均匀磁流体中的典型磁流体波.

3.1　均匀磁流体中的磁流体力学波

3.1.1　简　　述

1. 离子声波

这和普通流体中的声波类似，是由磁流体密度的疏密扰动引起并由热压力驱动而形成的纵波，即其传播方向 $\boldsymbol{k}$ 和流体元扰动 $\boldsymbol{u}_1$ 的方向一致. 由于运动方程中只须考虑热压力，故描写这种扰动的是封闭的流体力学方程组

$$\rho\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}=-\nabla P,$$

$$P\rho^{-\gamma}=\text{常数},$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{u})=0.$$

把所有的量分成平衡量和扰动量两部分

$$\rho=\rho_0+\rho_1,\quad \boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}_0+\boldsymbol{u}_1=\boldsymbol{u}_1(\boldsymbol{u}_0=0),\quad P=P_0+P_1,$$

取无宏观流动的空间均匀平衡量 $\partial\rho_0/\partial t=0$, $\nabla\rho_0=0$, $\partial P_0/\partial t$, $\nabla P_0=0$，并假定扰动量(比起平衡量来)是一阶小量即

$$A_1/A_0=\varepsilon\ll 1,$$

然后将它们一同代入方程，消去平衡量，略去二阶及二阶以上小量，最后就得出关于扰动量的一阶线性方程组

$$\rho_0\frac{\partial\boldsymbol{u}_1}{\partial t}=-\nabla P_1,$$

$$\frac{P_1}{P_0}-\gamma\frac{\rho_1}{\rho_0}=0,$$

$$\frac{\partial\rho_1}{\partial t}+\rho_0\nabla\cdot\boldsymbol{u}_1=0.$$

其中用到了：常数 $=P_0\rho_0^{-\gamma}$ 及

$$(P_0+P_1)(\rho_0+\rho_1)^{-\gamma}$$

$$=P_0\rho_0^{-\gamma}\left(1+\frac{P_1}{P_0}\right)\left(1+\frac{\rho_1}{\rho_0}\right)^{-\gamma}\sim P_0\rho_0^{-\gamma}+\frac{P_1}{P_0}-\gamma\frac{\rho_1}{\rho_0}.$$

为了解上述方程，令(相当于对上述方程作傅里叶展开)

$$(\boldsymbol{u}_1,\rho_1,P_1)\propto(u_k,\rho_k,P_k)\exp[\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)],$$

利用 $\boldsymbol{k}\parallel\boldsymbol{u}_k$，可得代数方程组

$$\omega\rho_0u_k=kP_k,$$

$$P_k/P_0=\gamma\rho_k/\rho_0,$$

$$\omega\rho_k=\rho_0ku_k.$$

经过化简，可得

$$\omega\rho_0u_k=\gamma\frac{P_0}{\rho_0}\rho_kk=\gamma P_0\frac{k^2}{\omega}u_k.$$

此方程有非平凡解的条件是 u_k 的系数为零，即

$$\omega^2=k^2\gamma\frac{P_0}{\rho_0}.$$

于是最后得离子声波的色散关系

$$\omega=\pm k\sqrt{\frac{\gamma P_0}{\rho_0}}\equiv\pm kC_s,\quad C_s=\sqrt{\frac{\gamma P_0}{\rho_0}}.\tag{3.1}$$

其中 C_s 是相速度，一般称为离子声速. 下面更普遍的推导表明，在无磁场时离子声波的传播方向是任意的，而在有磁场时它是沿磁力线传播的.

2. 阿尔文波

在第一章中曾指出，当磁力线在垂直它的方向上受到扰动时，会产生一个恢复力——磁张力，从而使磁力线像弹性弦一样振动，并产生一个沿磁力线传播的横波(即磁场的扰动方向和传播方向相互垂直的波). 而在理想磁流体中，由于流体元和磁场冻结在一起，所以同时也带动流体一起作横波运动. 这种(电)磁场与流体元同为横波的电磁流体波就称为剪切阿尔文波. 这时在运动方程中必须计入磁场和电流的洛伦兹力，由于涉及 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{J}$ 这两个量，完整的方程组由以下方程组成

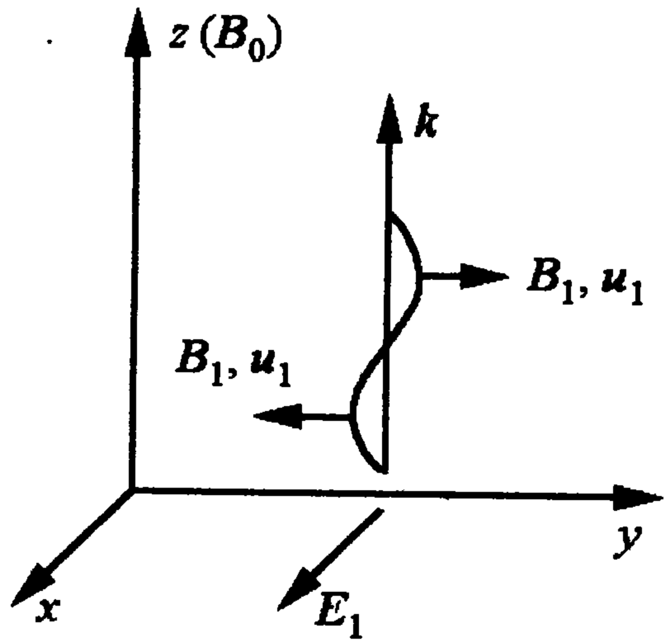


图 3.1　坐标系示意图一

$$\rho\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{B},$$

$$\boldsymbol{J}=\frac{1}{\mu}\nabla\times\boldsymbol{B},$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0,$$

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t},$$

$$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B}=0.$$

取图 3.1 所示的坐标系，并设平衡解为

$$\boldsymbol{u}_0=0,\quad \boldsymbol{J}_0=0,\quad \boldsymbol{E}_0=0,\quad \boldsymbol{B}_0=B_0\boldsymbol{e}_z,$$

其中 B_0 是与时、空无关的常数. 运动方程右面可化为

$$\rho_0\frac{\partial\boldsymbol{u}_1}{\partial t}=\frac{1}{\mu}(\nabla\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{B}=\frac{1}{\mu}\nabla\cdot\left(\boldsymbol{BB}-\frac{1}{2}B^2\overset{\leftrightarrow}{I}\right).$$

利用上述的极化关系 $\boldsymbol{u}_1\parallel\boldsymbol{B}_1$，$\boldsymbol{B}_1=B_1\boldsymbol{e}_y$，上式右面两项在展开到一阶时为

$$B^2=(B_0\boldsymbol{e}_z+B_1\boldsymbol{e}_y)\cdot(B_0\boldsymbol{e}_z+B_1\boldsymbol{e}_y)\approx B_0^2,\quad\Rightarrow\quad \nabla\cdot(B_0^2\overset{\leftrightarrow}{I})=0,$$

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{BB})=(\nabla\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{B}+(\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{B}_0\cdot\nabla)\boldsymbol{B}_1=B_0\frac{\partial B_1}{\partial z}\boldsymbol{e}_y.$$

所以线性化的方程组最后可写成

$$\rho_0\frac{\partial u_1}{\partial t}=\frac{B_0}{\mu}\frac{\partial B_1}{\partial z}\quad(\boldsymbol{e}_y\text{ 方向}),$$

$$\frac{\partial E_1}{\partial z}=-\frac{\partial B_1}{\partial t}\quad(\boldsymbol{e}_y\text{ 方向}),$$

$$E_1+u_1B_0=0\quad(\boldsymbol{e}_x\text{ 方向}),$$

其中用到了线性化的法拉第定律及广义欧姆定律

$$\nabla\times\boldsymbol{E}_1=-\frac{\partial\boldsymbol{B}_1}{\partial t},\quad \boldsymbol{u}_1\times\boldsymbol{B}_0+\boldsymbol{E}_1=0.$$

从而可知 $\boldsymbol{E}_1=E_1\boldsymbol{e}_x$ 必在 $\boldsymbol{e}_x$ 方向. 对线性方程组作傅里叶变换后得一代数方程组

$$-\omega\rho_0u_k=\frac{B_0}{\mu}kB_k,$$

$$kE_k=\omega B_k,$$

$$E_k=-B_0u_k.$$

由此可得色散关系

$$\omega=\pm kV_{\mathrm{A}},\quad V_{\mathrm{A}}=\sqrt{\frac{B_0^2}{\mu\rho_0}}.\tag{3.2}$$

其中的相速度 V_{A} 称为(剪切)阿尔文波速.

2. 压缩阿尔文波

这是由磁压力和热压力共同驱动的一种电磁横波、流体纵波. 描述它的磁流体方程组为

$$\rho\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}=-\nabla P+\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{B},$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{u})=0,$$

$$P\rho^{-\gamma}=P_0\rho_0^{-\gamma},$$

$$\boldsymbol{J}=\frac{1}{\mu}\nabla\times\boldsymbol{B},$$

$$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B}=0,$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0,\quad \nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}.$$

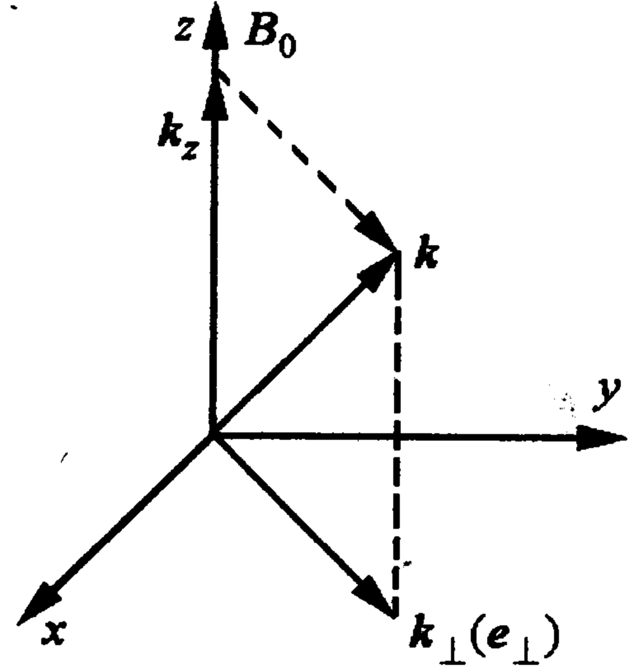


图 3.2 坐标系示意图二

取图 3.2 的坐标系，设平衡解为 $\boldsymbol{u}_0=0,\boldsymbol{J}_0=0$，于是可知 $\partial\rho_0/\partial t=0,\boldsymbol{E}_0=0,\nabla P_0=0,\partial B_0/\partial t=0$. 进一步假定 $\nabla\rho_0=0$，并取 $\boldsymbol{B}_0=(0,0,B_0)$，由一阶线性运动方程

$$\rho_0\frac{\partial\boldsymbol{u}_1}{\partial t}=-\nabla P_1+\frac{1}{\mu}(\nabla\times\boldsymbol{B}_1)\times\boldsymbol{B}_0$$
$$=-\nabla P_1-\frac{1}{\mu}\nabla\cdot\left(\frac{1}{2}B^2\overset{\Rightarrow}{I}-\boldsymbol{BB}\right)_1.$$

再利用

$$P_1/P_0=\gamma\rho_1/\rho_0,\quad \nabla\cdot(\boldsymbol{BB})_1\approx\boldsymbol{B}_0\cdot\nabla\boldsymbol{B}_1,$$
$$\nabla\cdot(B^2\overset{\Rightarrow}{I})_1=\nabla(B^2)_1\approx\nabla(2\boldsymbol{B}_0\cdot\boldsymbol{B}_1)=2B_0\nabla B_{1z},$$

以及一阶的法拉第定律

$$\frac{\partial\boldsymbol{B}_1}{\partial t}=-\nabla\times\boldsymbol{E}_1=\nabla\times(\boldsymbol{u}_1\times\boldsymbol{B}_0)=(\boldsymbol{B}_0\cdot\nabla)\boldsymbol{u}_1-\boldsymbol{B}_0\nabla\cdot\boldsymbol{u}_1,$$

最后可得一阶联立方程组

$$\rho_0\frac{\partial\boldsymbol{u}_1}{\partial t}=-\frac{\gamma P_0}{\rho_0}\nabla\rho_1+\frac{1}{\mu}(\boldsymbol{B}_0\cdot\nabla)\boldsymbol{B}_1-\frac{1}{\mu}B_0\nabla B_{1z},\quad(3.3)$$

$$\frac{\partial\boldsymbol{B}_1}{\partial t}=(\boldsymbol{B}_0\cdot\nabla)\boldsymbol{u}_1-\boldsymbol{B}_0\nabla\cdot\boldsymbol{u}_1,\quad(3.4)$$

$$\frac{\partial\rho_1}{\partial t}+\rho_0\nabla\cdot\boldsymbol{u}_1=0.\quad(3.5)$$

在傅里叶变换后，从(3.5)式可得

$$\rho_k=\frac{\rho_0}{\omega}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{u}_k;\quad(3.6)$$

从(3.4)式可得

$$\boldsymbol{B}_k=\frac{B_0}{\omega}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{u}_k)\boldsymbol{e}_z-\frac{B_0}{\omega}k_z\boldsymbol{u}_k;\quad(3.7)$$

由(3.3)式的傅氏变换及 ρ_k 的表达式(3.6)可得

$$\omega\boldsymbol{u}_k=\frac{C_s^2}{\omega}\boldsymbol{k}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{u}_k)-\frac{V_A^2}{B_0}k_z\boldsymbol{B}_k+\frac{V_A^2}{B_0}B_{kz}\boldsymbol{k}.\quad(3.8)$$

所以最后的色散方程是由 $\boldsymbol{B}_k$ 和 $\boldsymbol{u}_k$ 组成的封闭方程组(3.7)和(3.8).

下面先来讨论一种比较简单的压缩阿尔文波(也称磁声波)，这时取 $\boldsymbol{k}=k_\perp\boldsymbol{e}_\perp$ ($k_\parallel=0$)，$\boldsymbol{u}_k=u_k\boldsymbol{e}_\perp$ ($u_\parallel=0$)，$\boldsymbol{k}\parallel\boldsymbol{u}_k$ (图 3.3). 假定 $\boldsymbol{B}_1$ 在 $\boldsymbol{e}_z$ 方向，有

$$\boldsymbol{B}_k=\frac{B_0}{\omega}k_\perp u_k\boldsymbol{e}_z,$$

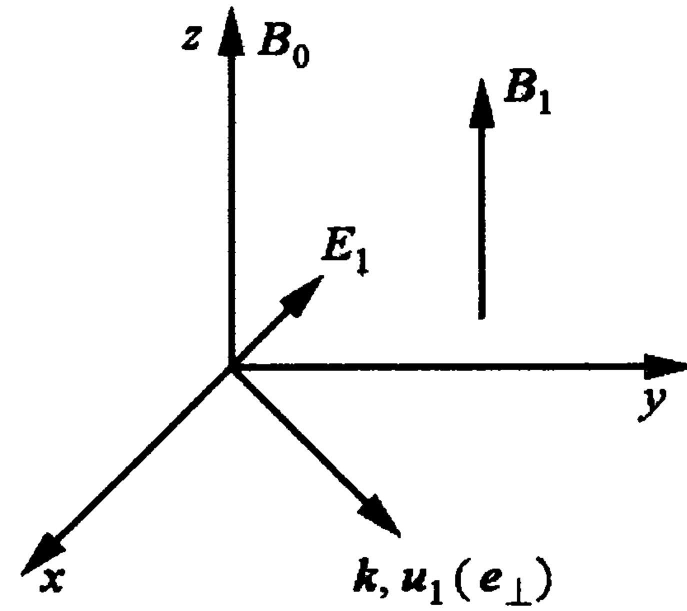


图 3.3 坐标系示意图三

将上式代入(3.8)式后，得

$$\omega u_k=\frac{C_s^2}{\omega}k_\perp^2u_k+\frac{V_A^2}{\omega}k_\perp^2u_k,$$

故有色散关系

$$\omega^2=k_\perp^2(C_s^2+V_A^2).\quad(3.9)$$

相应的相速度为 $V_{ph}=\sqrt{C_s^2+V_A^2}$，很明显它是由热压强和磁压强共同驱动的，因此其相速度(在三种磁流体波中)也是最大的. 从上面的讨论已经可以看出，从它的电磁极化来看是一种横波($\boldsymbol{B}_k,\boldsymbol{E}_k$ 彼此垂直同时又都垂直于传播方向 $\boldsymbol{k}$)，而从流体的极化来看却又是纵波($\boldsymbol{u}_k\parallel\boldsymbol{k}$).

最后，通过列表把已经讨论过的三种磁流体波作一小结，见表 3.1.

表 3.1 三种磁流体波

磁流体波	流体极化	电磁极化	驱动源
离子声波	纵波	无	热压力
剪切阿尔文波	横波	横波	磁张力
磁声波	纵波	横波	磁压力＋热压力

3.1.2 磁流体波的严格推导

这时的出发方程仍是由扰动的 $\boldsymbol{B}_k$ 和 $\boldsymbol{u}_k$ 组成的联立方程组(3.7)与(3.8)：

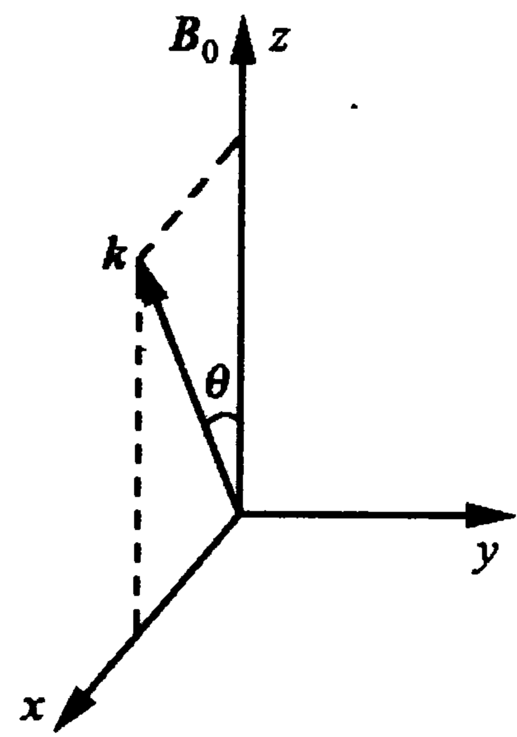


图 3.4 波在任意方向传播时的坐标系

$$\boldsymbol{B}_k=\frac{B_0}{\omega}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{u}_k)\boldsymbol{e}_z-\frac{B_0}{\omega}k_z\boldsymbol{u}_k,$$

$$\omega\boldsymbol{u}_k=\frac{C_s^2}{\omega}\boldsymbol{k}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{u}_k)-\frac{V_A^2}{B_0}k_z\boldsymbol{B}_k+\frac{V_A^2}{B_0}B_{kz}\boldsymbol{k}.$$

平衡磁场也仍在 $\boldsymbol{e}_z$ 方向，但波的传播方向比上节更一般(如图 3.4)：

$$\boldsymbol{B}_0=(B_{0x},B_{0y},B_{0z})=(0,0,B_0);$$

$$\boldsymbol{k}=(k_x,k_y,k_z)=(k\sin\theta,0,k\cos\theta),$$

其中 θ 是 $\boldsymbol{k}$ 和 $\boldsymbol{B}_0(\boldsymbol{e}_z)$ 间的夹角. 由此可写出(3.7)及(3.8)式的 6 个分量方程

$$B_{kx}=-\frac{B_0}{\omega}k_zu_{kx},$$

$$B_{ky}=-\frac{B_0}{\omega}k_zu_{ky},$$

$$B_{kz}=\frac{B_0}{\omega}k_xu_{kx},$$

$$\omega u_{kx}=\frac{C_s^2}{\omega}k_x(k_xu_{kx}+k_zu_{kz})-\frac{V_A^2}{B_0}k_zB_{kx}+\frac{V_A^2}{B_0}B_{kz}k_x,$$

$$\omega u_{ky}=-\frac{V_A^2}{B_0}k_zB_{ky},$$

$$\omega u_{kz}=\frac{C_s^2}{\omega}k_z(k_xu_{kx}+k_zu_{kz}).$$

它们的 $\boldsymbol{e}_y$ 分量相互耦合，但和其他两个方向解耦合，所以可以把 $\boldsymbol{e}_y$ 分量单独求解. 将其中的一个代入另一个后可得一支波的色散关系

$$\omega^2=k_z^2V_A^2. \tag{3.10}$$

这波显然就是剪切阿尔文波，它只在平行磁场方向传播. 将另两个方向上的扰动磁场代入扰动流速的方程后有

$$\omega^2u_{kx}=C_s^2(k_x^2u_{kx}+k_xk_zu_{kz})+(k_x^2+k_z^2)V_A^2u_{kx},$$

$$\omega^2u_{kz}=C_s^2(k_xk_zu_{kx}+k_z^2u_{kz}).$$

由上式得

$$u_{kz}=\frac{k_xk_z}{\omega^2-k_z^2C_s^2}C_s^2u_{kx},$$

再代入前一个方程后可得色散方程

$$\omega^2(\omega^2-k_z^2C_s^2)-(k_x^2C_s^2+k^2V_A^2)(\omega^2-k_z^2C_s^2)-k_x^2k_z^2C_s^4=0,$$

$$\omega^4-k^2(C_s^2+V_A^2)\omega^2+k^4C_s^2V_A^2\cos^2\theta=0.$$

这个关于 ω 的 4 次代数方程存在两个解

$$\omega^2=\frac{1}{2}k^2(C_s^2+V_A^2)\left[1\pm\sqrt{1-\frac{4C_s^2V_A^2\cos^2\theta}{(C_s^2+V_A^2)^2}}\right], \tag{3.11}$$

其中的高相速解(取“+”号的解)一般称为快磁声波，而低相速解(取“−”号解)则称为慢磁声波.

特别当 $C_sV_A\cos\theta/(C_s^2+V_A^2)\ll1$ 时：快磁声波(取正号解)变成

$$\omega=k\sqrt{C_s^2+V_A^2}, \tag{3.12}$$

这就是上节说的压缩阿尔文波.

而慢磁声波(取负号解)变成

$$\omega=k_z\frac{C_sV_A}{\sqrt{C_s^2+V_A^2}}, \tag{3.13}$$

如果进一步假定 $V_A\gg C_s$，则它退化成上面所说的离子声波($\omega\approx k_zC_s$).

图 3.5 给出了上述 3 支波在以磁场方向为对称轴时，不同传播方向 $\boldsymbol{k}$ 下的相速度取值(曲线). 从中可见剪切阿尔文波和离子声波都是沿磁力线传播的，它们在垂直于磁力线的方向上均不能

传播. 而快磁声波(压缩阿尔文波)则可以在所有的方向上传播(这是和它的驱动机制有关的). 而且磁声波的波速是 3 支波中最快的,然后(在 $V_A \gg C_s$ 时)依次是剪切阿尔文波、离子声波. 但如果回到未作近似的磁声波解,在 $C_s \gg V_A$ 时,所得到的离子声波的波速将大于剪切阿尔文波速.

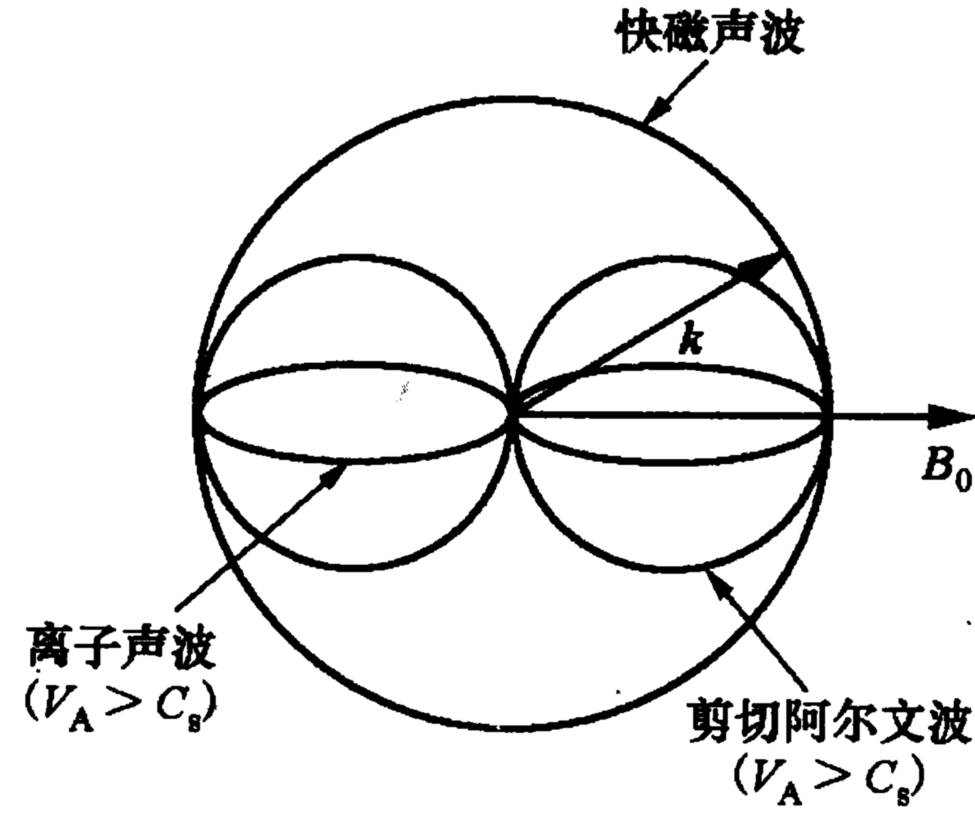


图 3.5 各磁流体波相速随传播方向的变化

3.1.3 各种非理想效应的影响

1. 有限电导对剪切阿尔文波的影响

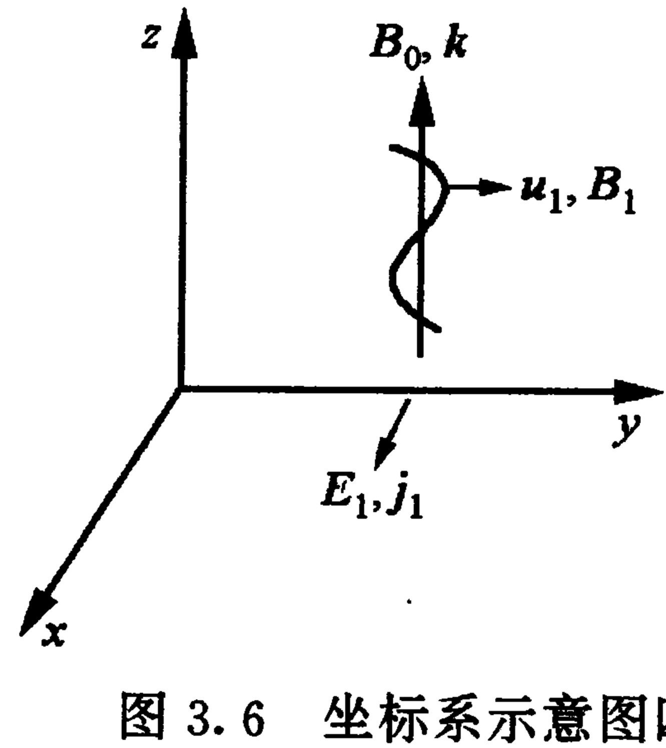


图 3.6 坐标系示意图四

当等离子体的温度比较低时,电阻不可忽略,这时在广义欧姆定律中必须加入电阻项. 如果取如图 3.6 所示的坐标系,令 $\boldsymbol{B}_1, \boldsymbol{u}_1$ 在 $\boldsymbol{e}_y$ 方向,而 $\boldsymbol{B}_0, \boldsymbol{k}$ 在 $\boldsymbol{e}_z$ 方向(下面可证 $\boldsymbol{E}_1, \boldsymbol{J}_1$ 在 $\boldsymbol{e}_x$ 方向),其中下标为"1"的量表示扰动的一阶小量,这样剪切阿尔文波将由下面的线性电阻磁流体方程组描述

$$\rho_0 \frac{\partial u_1}{\partial t} = \frac{B_0}{\mu} \frac{\partial B_1}{\partial z}, \tag{3.14}$$

$$\frac{\partial E_1}{\partial z} = -\frac{\partial B_1}{\partial t}, \tag{3.15}$$

$$E_1 + u_1 B_0 = \eta J_1, \tag{3.16}$$

$$J_1 = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial B_1}{\partial z}. \tag{3.17}$$

令上面的所有扰动量都正比于

$$A_1 = A_k \exp[\mathrm{i}(kz - \omega t)]$$

(这相当于作傅氏变换),则由(3.15)式有 $kE_k = \omega B_k$;然后将它和(3.17)式代入(3.16)式后得

$$E_k + u_k B_0 = \eta J_k = -\frac{\mathrm{i}\eta}{\mu} k B_k = -\frac{\mathrm{i}\eta}{\mu} \frac{k^2}{\omega} E_k,$$

所以有

$$E_k = -\left(1 + \frac{\mathrm{i}\eta k^2}{\mu\omega}\right)^{-1} B_0 u_k.$$

另外,从(3.14)式可得

$$\omega u_k = -\frac{B_0}{\mu\rho_0} k B_k = -\frac{B_0}{\mu\rho_0} \frac{k^2}{\omega} E_k.$$

将前一个关于 E_k 的表达式代入后,得出色散方程

$$\omega^2 \left(1 + \frac{\mathrm{i}\eta k^2}{\mu\omega}\right) = k^2 V_A^2. \tag{3.18}$$

可以看出,由于电阻不为零,上面方程是一个复数方程,故色散关系将含有虚部,也即有耗散项. 如果想知道波随时间的衰减解,则一般令波数 k 为实数,而频率为复数 $\omega = \omega_r + \mathrm{i}\omega_i$. 下面只讨论 $\omega_i \ll \omega_r$ 的弱阻尼情况. 将复频代入上式,得

$$\omega_r^2 + \mathrm{i}2\omega_r\omega_i + \frac{\mathrm{i}\eta}{\mu} k^2 (\omega_r + \mathrm{i}\omega_i) = k^2 V_A^2,$$

由上式的虚部为零,可得

$$\omega_i = -\frac{\eta}{2\mu} k^2 < 0. \tag{3.19}$$

这表明,这支波是随时间指数衰减的. 将它代入前式的实部并略去含 η^2 的高阶小量后,就可以得到原来理想磁流体中剪切阿尔文波的色散关系

$$\omega_r^2 = k^2\left(V_A^2 - \frac{\eta^2}{2\mu^2}k^2\right) \approx k^2V_A^2. \tag{3.20}$$

这样，电阻的计入只是使剪切阿尔文波随时间指数衰减，其衰减的特征时间为

$$\tau_d = \frac{2\mu}{\eta k^2} \approx 2\mu\sigma\lambda_A^2,$$

其中 $\sigma=\eta^{-1}$是电导，而 $\lambda_A=k^{-1}$是波的特征波长. 这个衰减时间和电阻所引起的磁场扩散的特征时间 $\tau=\mu\sigma L^2$ 相近（只要认为体系的特征尺度 $L\sim 1/k\sim\lambda_A$）.

有时在实验上测量波随空间距离的衰减更为方便，这时可以取频率 ω 为实数，而波数为复数 $k=k_r+ik_i$. 将它们代入色散方程后，有

$$\omega^2 - k^2V_A^2 + i\frac{\omega\eta}{\mu}k^2 = 0.$$

这时色散关系用下面的方式表示比较方便

$$k = \pm\frac{\omega}{V_A}\left(1 - i\frac{\omega\eta}{\mu V_A^2}\right)^{-1/2} \approx \pm\frac{\omega}{V_A}\left(1 + i\frac{\omega\eta}{2\mu V_A^2}\right).$$

其实部就是剪切阿尔文波 $k_r=\pm\omega/V_A$，而虚部为

$$k_i = \frac{\omega^2\eta}{2\mu V_A^3} = \frac{\omega^2}{2\mu\sigma V_A^3}. \tag{3.21}$$

这表示，电阻使阿尔文波在沿空间传播时衰减，其衰减的特征长度为

$$l_d = \frac{2\mu\sigma V_A}{k^2}.$$

由此可以引进一个无量纲参数（用它表征电阻效应在磁流体行为中是否重要）

$$L = \frac{l_d}{\lambda_A} = \frac{2\mu\sigma V_A}{k} \approx \lambda_A\sigma B_0\mu^{1/2}/\rho^{1/2}. \tag{3.22}$$

这参数也称 Lundquist 数，当 $L\gg 1$ 时可以忽略电阻对磁流体的影响，用理想磁流体方程就能很好地描述等离子体的行为. 反之，则

应该在磁流体方程中计入电阻项.

如果进一步考虑黏性效应，则只需在运动方程中加入黏性力项（其他方程和上面的电阻磁流体方程组相同）

$$\rho\frac{d\boldsymbol{u}}{dt} = -\nabla P + \boldsymbol{J}\times\boldsymbol{B} + \gamma\nabla^2\boldsymbol{u}, \tag{3.23}$$

其中 γ 是剪切黏性系数. 实行傅氏变换后，经过简单的计算可得如下色散方程

$$\omega^2\left(1 + i\frac{k^2}{\mu\sigma\omega}\right)\left(1 + i\frac{\gamma k^2}{\rho_0\omega}\right) = k^2V_A^2. \tag{3.24}$$

把它和只考虑电导的结果相比，只需把那里的 $1/(\mu\sigma)$ 作替换 $1/(\mu\sigma)\to(1/(\mu\sigma)+\gamma/\rho_0)$即可. 当取 k,ω_r 为实数时

$$\omega_i = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mu\sigma} + \frac{\gamma}{\rho_0}\right)k^2; \tag{3.25}$$

而当取 ω,k_r 为实数时

$$k_i = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mu\sigma} + \frac{\gamma}{\rho_0}\right)\frac{\omega^2}{V_A^2}. \tag{3.26}$$

2. 柱形几何下的扭转（torsional）阿尔文波

实验室中的等离子体多为柱形或可由柱形近似代表的环形，所以柱形几何是磁流体分析中常常碰到的. 平板模型（直角坐标系）则多用在空间等离子体物理的讨论或用在一些定性说明中. 一般实验室柱形磁流体在径向总是显著不均匀的，所以对这个方向上的扰动量无法作傅里叶变换；它们所满足的方程也就不能从微分形式转变成代数形式. 为了要得到色散关系，通常先得出微分方程的通解，然后用有界磁流体所应满足的边界条件来定解，而从定解条件就可以得出色散关系. 在这一子节中，为了描述起来简单，我们取这样的近似：假定磁流体的各平衡量都是均匀的（不依赖于径向坐标），但扰动量在径向是非均匀的，不能作傅氏变换. 而更符合实际情形的非均匀磁流体处理，则放在下面讨论.

从描述剪切阿尔文波的磁流体方程出发：

$$\rho\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{B},$$
$$\nabla\times\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{J},$$
$$\eta\boldsymbol{J}=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B},$$
$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}.$$

取平衡量为 $\boldsymbol{B}_0=B_0\boldsymbol{e}_z,\boldsymbol{u}_0=0,\rho=\rho_0=$常数,而扰动量为

$$\boldsymbol{u}_1=(u_r,u_\theta,u_z)=(0,u,0),\quad \boldsymbol{B}_1=(B_r,B_\theta,B_z)=(0,B,0).$$

假定不可压缩条件成立,有 $\nabla\cdot\boldsymbol{u}_1=0$,并且扰动是轴对称的,有 $\partial(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{B}_1)/\partial\theta=0$. 于是线性扰动方程为

$$\rho_0\frac{\partial\boldsymbol{u}_1}{\partial t}=\boldsymbol{J}_1\times\boldsymbol{B}_0,\tag{3.27}$$
$$\nabla\times\boldsymbol{B}_1=\mu\boldsymbol{J}_1,\tag{3.28}$$
$$\boldsymbol{J}_1=\frac{1}{\eta}(\boldsymbol{E}_1+\boldsymbol{u}_1\times\boldsymbol{B}_0),\tag{3.29}$$
$$\nabla\times\boldsymbol{E}_1=-\frac{\partial\boldsymbol{B}_1}{\partial t}.\tag{3.30}$$

由(3.28)式可得(下面为简单略去了下标“1”)

$$\boldsymbol{J}_1=\frac{1}{\mu}\left(-\frac{\partial B}{\partial z}\boldsymbol{e}_r+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rB)\boldsymbol{e}_z\right)=(J_r,0,J_z),$$

取时间 t 和坐标 z 的傅氏变换后,扰动电流的分量为(同样为简单,在不会引起误会的情况下略去了下标“k”)

$$J_r\equiv J_{rk}=-\mathrm{i}\,\frac{k}{\mu}B,$$
$$J_z\equiv J_{zk}=\frac{1}{\mu r}\frac{\partial}{\partial r}(rB).$$

由(3.27)式的 $\boldsymbol{e}_\theta$ 分量,可得

$$u=-\frac{B_0}{\rho_0\mu}\frac{k}{\omega}B.\tag{3.31}$$

下面分两种情况进行讨论.

(i) 电阻 $\eta=0$ 的理想磁流体情况. 将(3.29)代入(3.30)后可

得其 $\boldsymbol{e}_\theta$ 分量

$$\frac{\partial B}{\partial t}=B_0\frac{\partial u}{\partial z},$$
$$B=-\frac{k}{\omega}B_0u=\frac{k^2}{\omega^2}\frac{B_0^2}{\rho_0\mu}B,$$

上式最后一步代入了(3.31)式. 由此可立即得剪切阿尔文波的色散关系

$$\omega^2=k^2V_{\mathrm{A}}^2,\quad V_{\mathrm{A}}^2=\frac{B_0^2}{\rho_0\mu},\tag{3.32}$$

这个结果和平板模型的结果相同. 同时有

$$u=-\frac{1}{\sqrt{\rho_0\mu}}B,\quad J_r=-\mathrm{i}\,\frac{k}{\mu}B.$$

(ii) 电阻 $\eta\neq0$ 的非理想磁流体情况. 对(3.28)式两边同求旋度,并依次代入(3.29)和(3.30)式,结果有

$$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{B}_1)=\frac{\mu}{\eta}\nabla\times[\boldsymbol{E}_1+\boldsymbol{u}_1\times\boldsymbol{B}_0]$$
$$=\frac{\mu}{\eta}\left[-\frac{\partial\boldsymbol{B}_1}{\partial t}+(\boldsymbol{B}_0\cdot\nabla)\boldsymbol{u}_1\right].$$

在柱坐标系的 $\boldsymbol{e}_\theta$ 方向上展开上式并对扰动量作傅氏变换,得

$$\frac{\partial^2B}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial B}{\partial r}-\frac{B}{r^2}-k^2B+\mathrm{i}\,\frac{\mu}{\eta}(\omega B-kB_0u)=0.$$

然后代入关于 u 的表达式(3.31),得

$$\frac{\partial^2B}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial B}{\partial r}-\frac{B}{r^2}-k^2B+\mathrm{i}\,\frac{\mu\omega}{\eta}\left(1-\frac{k^2V_{\mathrm{A}}^2}{\omega^2}\right)B=0.$$

令

$$k_{\mathrm{c}}^2=-k^2+\mathrm{i}\,\frac{\mu\omega}{\eta}\left(1-\frac{k^2V_{\mathrm{A}}^2}{\omega^2}\right)=-\frac{\mu}{\mathrm{i}\omega\eta}\left[\omega^2-k^2\left(V_{\mathrm{A}}^2+\frac{\omega\eta}{\mathrm{i}\mu}\right)\right],\tag{3.33}$$

则上述方程化成一阶的贝塞尔方程

$$\frac{\partial^2B}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial B}{\partial r}+\left(k_{\mathrm{c}}^2-\frac{1}{r^2}\right)B=0.\tag{3.34}$$

其解是 $J_1(k_c r)$ 或 $Y_1(k_c r)$，但后者在 $r=0$ 处发散，故在 $r=0$ 处有界的解是

$$B_{1\theta}(\boldsymbol{r}) = B_{k\theta}J_1(k_c r)\exp[i(kz-\omega t)] = B\exp[i(kz-\omega t)],$$

$$B = B_{k\theta}J_1(k_c r), \tag{3.35}$$

其中 $B_{k\theta}$ 是一个常数. 而其他量分别为

$$u = -\frac{B_0 k}{\mu\rho_0\omega}B, \quad E_r = \frac{k}{\omega}\left(V_A^2 - i\frac{\omega\eta}{\mu}\right)B, \quad E_z = k_c\frac{\eta}{\mu}\frac{J_0(k_c r)}{J_1(k_c r)}B,$$

$$J_r = -i\frac{k}{\mu}B, \quad J_z = \frac{k_c}{\mu}\frac{J_0(k_c r)}{J_1(k_c r)}B,$$

其中用到了贝塞尔函数的递推公式.

对于这种类型的色散方程解，为了得出色散关系，需要用到 $r=a$（柱表面处）的边界条件（在更一般的情况下，要用到边界条件及分区间的连接条件）. 按完全导体壳的边条件（详见附录 A），在圆柱表面 $r=a$ 处，应有 $\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}=0$. 用到本问题中，就有

$$\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E} = \boldsymbol{e}_r\times\boldsymbol{E} = -E_z\boldsymbol{e}_\theta = 0, \quad \Rightarrow \quad E_z = 0.$$

利用上面得出的表达式，这也就是

$$J_0(k_c a) = 0, \quad \Rightarrow \quad k_c a = z_n, \tag{3.36}$$

其中 z_n 是 J_0 的第 n 个零点（实数），

$$z_1 = 2.405, \quad z_2 = 5.520, \quad z_3 = 8.654,$$

$$z_4 = 11.79, \quad z_5 = 14.93.$$

将(3.33)式代入(3.36)式，就可得色散方程

$$-\frac{\mu}{i\omega\eta}\left[\omega^2 - k^2\left(V_A^2 + \frac{\omega\eta}{i\mu}\right)\right]a^2 = z_n^2,$$

$$\omega^2 + i\frac{\eta}{\mu}\left(k^2 + \frac{z_n^2}{a^2}\right)\omega - k^2V_A^2 = 0.$$

结果有色散关系

$$\omega = \pm\sqrt{k^2V_A^2 - \frac{\eta^2}{4\mu^2}\left(k^2+\frac{z_n^2}{a^2}\right)^2} - i\frac{\eta}{2\mu}\left(k^2+\frac{z_n^2}{a^2}\right). \tag{3.37}$$

这表明存在电阻时，剪切阿尔文波是阻尼的. 阻尼率不但和电阻值 η 有关，而且依赖于零阶贝塞尔函数的各零点值 z_n；零点值愈大，阻尼就愈大. 另外，当 $k=0$ 时，上式给出的剪切阿尔文波频率并不为零，也即存在着截止频率. 由于存在无穷多个零点，故也存在无数多截止频率，以及对应的无数支剪切阿尔文波——它们组成一个分立谱，其中频率愈高的分支（z_n 值愈大），阻尼增长得愈快. 阻尼和分立谱正是柱几何中电阻剪切阿尔文波有别于理想磁流体情况的两个显著特征. 这种波又称为扭转的阿尔文波.

3. 柱形几何下的压缩阿尔文波

假定平衡量满足以下条件：

$$\nabla P_0 = 0, \quad \boldsymbol{u}_0 = 0, \quad \rho_0 = 常数, \quad \boldsymbol{B}_0 = B_0\boldsymbol{e}_z.$$

同时为了简单，不考虑磁流体的密度扰动 ρ_1（一般说来，压缩阿尔文波中存在密度扰动，考虑了密度扰动的情况在本子节的最后讨论），并在柱坐标下把扰动量写为

$$\boldsymbol{u}_1 = (u_r, u_\theta, u_z), \quad \boldsymbol{B}_1 = (B_r, B_\theta, B_z).$$

然后只考虑轴对称情况 $\partial/\partial\theta=0$，这样扰动量就只是 (r,z) 的函数. 其中磁流在 $\boldsymbol{e}_z$ 方向上可以当成是无限延伸的，故可以取傅氏变换为

$$\boldsymbol{A}_1(r,z;t) = \boldsymbol{A}_k(r)\exp[i(kz-\omega t)].$$

从理想磁流体的线性运动方程和磁场演化方程出发

$$\rho_0\frac{\partial\boldsymbol{u}_1}{\partial t} = \frac{1}{\mu}(\boldsymbol{B}_0\cdot\nabla)\boldsymbol{B}_1 - \frac{1}{\mu}B_0\nabla B_z, \tag{3.38}$$

$$\frac{\partial\boldsymbol{B}_1}{\partial t} = B_0\frac{\partial\boldsymbol{u}_1}{\partial z} - B_0\boldsymbol{e}_z\nabla\cdot\boldsymbol{u}_1. \tag{3.39}$$

并利用

$$\nabla B_z = \frac{\partial B_z}{\partial r}\boldsymbol{e}_z + ikB_z\boldsymbol{e}_z, \quad \nabla\cdot u_1 = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(ru_r) + iku_z$$

及傅氏变换可得（下面为了简单，在不会引起误会时略去下标“k”）

$$-i\omega\rho_0\boldsymbol{u}_1 = \frac{B_0}{\mu}ik\boldsymbol{B}_1 - \frac{B_0}{\mu}\left(\frac{\partial B_z}{\partial r}\boldsymbol{e}_r + ikB_z\boldsymbol{e}_z\right), \tag{3.40}$$

$$-\mathrm{i}\omega \boldsymbol{B}_1 = \mathrm{i}kB_0\boldsymbol{u}_1 - B_0\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(ru_r) + \mathrm{i}ku_z\right]\boldsymbol{e}_z, \quad (3.41)$$

其中的 $\boldsymbol{e}_\theta$ 分量和其他两个分量是解耦合的，

$$-\mathrm{i}\omega\rho_0 u_\theta = \mathrm{i}k\frac{B_0}{\mu}B_\theta, \quad -\mathrm{i}\omega B_\theta = \mathrm{i}kB_0 u_\theta,$$

于是可单独得出剪切阿尔文波的色散关系 $\omega^2=k^2V_A^2$.

另两个方向上扰动是相互耦合的，由这两个方向的磁场方程可得

$$-\mathrm{i}\omega B_r = \mathrm{i}kB_0 u_r, \quad -\mathrm{i}\omega B_z = -B_0\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(ru_r).$$

将其代入 $\boldsymbol{e}_r$ 方向上的运动方程(3.40)

$$-\mathrm{i}\omega\rho_0 u_r = \mathrm{i}k\frac{B_0}{\mu}B_r - \frac{B_0}{\mu}\frac{\partial B_z}{\partial r},$$

可得

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(ru_r)\right] + \left(\frac{\omega^2}{V_A^2} - k^2\right)u_r = 0.$$

令

$$k_c^2 = \frac{\omega^2}{V_A^2} - k^2, \quad (3.42)$$

最后得出一阶的贝塞尔方程

$$\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial r} + \left(k_c^2 - \frac{1}{r^2}\right)u_r = 0. \quad (3.43)$$

它在 $r=0$ 处有界的解是

$$u_r = u_0 \mathrm{J}_1(k_c r). \quad (3.44)$$

利用边界条件

$$r = a\text{(柱表面)处有导体壳,} \quad \text{即 } u_r(a) = 0,$$

可得色散关系

$$k_c a = z_n^1, \quad (3.45)$$

这里 z_n^1 是 J_1 的第 n 个零点：

$$z_0^1 = 0, \quad z_1^1 = 3.83, \quad z_2^1 = 7.02,$$

$$z_3^1 = 10.17, \quad z_4^1 = 13.32, \quad z_5^1 = 16.47.$$

在色散关系中代入 k_c 的表达式后，可以得到第 n 支压缩阿尔文波的色散关系

$$\omega_n^2 = \omega_{0n}^2 + k^2V_A^2, \quad \omega_{0n} = \frac{V_A}{a}z_n^1, \quad (3.46)$$

其中 ω_{0n} 是这支波的截止频率. 由于第 1 个零点值为零，故第 1 支压缩阿尔文波无截止频率(即 $k=0$ 时，$\omega_1=\omega_{01}=0$)，而第 2,3,… 支波的截止频率分别为

$$\omega_{02} = 3.83V_A/a, \quad \omega_{03} = 7.02V_A/a, \quad \cdots.$$

因此无论是否考虑电阻的存在，柱几何位形对压缩阿尔文波的影响都是使它们变成有截止频率的分立谱. 上面给出的 ω_1 可以从零随 k 而不断增大，仅是磁流体描述的结论. 实际上，由于波和粒子的相互作用，此波在频率达到离子回旋波频率处时，会由于共振而被吸收，从而不能继续增大. 而其他几支高截止频率的波，由于其起点就高于离子回旋频率，故不存在共振吸收的问题.

上面的推导没有计入密度的扰动，如果想要同时计入其影响，只要在方程组中再加入密度扰动的连续性方程

$$\frac{\partial\rho_1}{\partial t} + \rho_0\nabla\cdot\boldsymbol{u}_1 = 0.$$

这个方程将 ρ_1 的傅氏变换和 $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{B}_1$ 的傅氏变换联系起来. 经过同上面类似的推导过程，最后仍然会得到一个关于 $u_{rk}=u_r$ 的一阶贝塞尔方程，其解为

$$u_r = u_0\mathrm{J}_1(k_c').$$

和(3.42)式不同之处仅在于

$$k_c' = \frac{(\omega^2 - k^2V_A^2)(\omega^2 - k^2C_s^2)}{\omega^2(V_A^2 + C_s^2) - k^2C_s^2V_A^2}, \quad (3.47)$$

其中 $C_s^2=\gamma P_0/\rho_0$ 是离子声速，当 $C_s\to 0$ 时(即不计入密度扰动时)，$k_c'\to k_c$. 由边界条件 $u_r(a)=0$，同样可以得出色散关系 $k_c'a=z_n^1$，也即

$$\omega^2 = \frac{1}{2}k^2\left(1+\frac{(z_n^1)^2}{k^2a^2}\right)(V_A^2+C_s^2)$$
$$\times\left[1\pm\sqrt{1-\frac{4C_s^2V_A^2}{\left(1+\frac{(z_n^1)^2}{k^2a^2}\right)(V_A^2+C_s^2)}}\right]. \quad (3.48)$$

这是两支耦合的(快、慢)磁声波,同样在极端条件下可以分成磁声波(但是带有阻尼的分离谱)和离子声波(参见前面 3.1.2 节的讨论).

4. 霍尔效应及电阻效应对磁流体力学波的影响(参见文献[1])

如果在包含了电阻项的广义欧姆定律中进一步计入霍尔电流的影响,则磁流体波中的剪切阿尔文波除了会产生阻尼外还会分裂成两支所谓的哨声(whistler)波或螺旋(helicon)波,下面就给出具体的讨论.

(1) 出发方程组

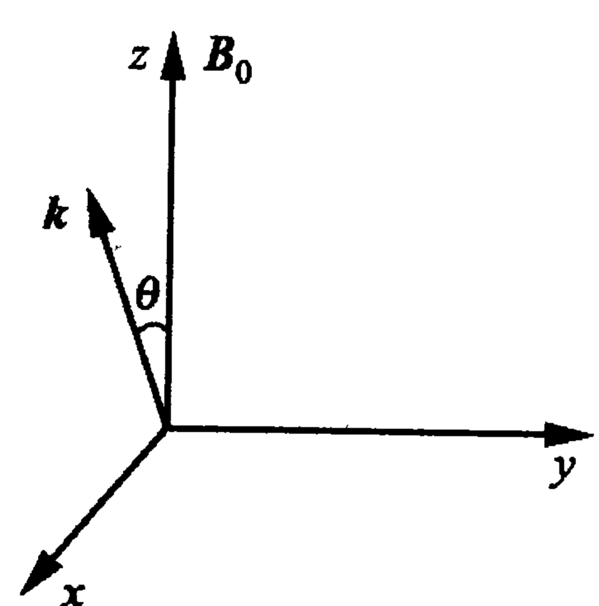


图 3.7 坐标系示意图五

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{u})=0,$$
$$\rho\frac{d\boldsymbol{u}}{dt}=-\nabla P+\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{B},$$
$$P\rho^{-\gamma}=P_0\rho_0^{-\gamma},$$
$$\boldsymbol{J}=\frac{1}{\mu}\nabla\times\boldsymbol{B},$$
$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t},\quad \nabla\cdot\boldsymbol{B}=0,$$

以及广义欧姆定律

$$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B}=\eta\boldsymbol{J}+\frac{1}{n_iq_i}\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{B}.$$

正是最后的这个方程,同时计入了电阻和霍尔效应的影响.

取直角坐标系(图 3.7),并取平衡量为

$$\boldsymbol{J}_0=0,\quad \boldsymbol{u}_0=0,\quad \boldsymbol{B}_0=B_0\boldsymbol{e}_z.$$

对上面方程组线性化后,可以得出一阶扰动方程组. 首先是扰动磁场的线性方程

$$\frac{\partial\boldsymbol{B}_1}{\partial t}=-\nabla\times\boldsymbol{E}_1=\nabla\times(\boldsymbol{u}_1\times\boldsymbol{B}_0)$$
$$-\frac{1}{n_iq_i}\nabla\times\left[\frac{1}{\mu}(\nabla\times\boldsymbol{B}_1)\times\boldsymbol{B}_0\right]-\frac{\eta}{\mu}\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{B}_1)$$
$$=(\boldsymbol{B}_0\cdot\nabla)\boldsymbol{u}_1-\boldsymbol{B}_0\nabla\cdot\boldsymbol{u}_1$$
$$-\frac{1}{\mu n_iq_i}\boldsymbol{B}_0\cdot\nabla(\nabla\times\boldsymbol{B}_1)+\frac{\eta}{\mu}\nabla^2\boldsymbol{B}_1.$$

其中用到

$$\nabla\times(\boldsymbol{u}_1\times\boldsymbol{B}_0)=(\boldsymbol{B}_0\cdot\nabla)\boldsymbol{u}_1-\boldsymbol{B}_0\nabla\cdot\boldsymbol{u}_1,$$
$$\nabla\times[(\nabla\times\boldsymbol{B}_1)\times\boldsymbol{B}_0]=(\boldsymbol{B}_0\cdot\nabla)(\nabla\times\boldsymbol{B}_1),$$
$$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{B}_1)=-\nabla^2\boldsymbol{B}_1.$$

其次是扰动密度和速度的线性方程

$$\frac{\partial\rho_1}{\partial t}+\rho_0\nabla\cdot\boldsymbol{u}_1=0,$$
$$\rho_0\frac{\partial\boldsymbol{u}_1}{\partial t}=-\frac{\gamma P_0}{\rho_0}\nabla\rho_1+\frac{1}{\mu}(\boldsymbol{B}_0\cdot\nabla)\boldsymbol{B}_1-\frac{1}{\mu}B_0\nabla B_{1z}.$$

(2) 傅氏变换及色散方程

对上述线性方程作傅氏变换后,将 $\partial/\partial t\to-i\omega,\nabla\to i\boldsymbol{k}$,可从第一个线性方程得出密度扰动的傅氏变换

$$\rho_k=\frac{\rho_0}{\omega}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{u}_k,$$

将它分别代入线性运动方程和线性磁场演化方程后,得

$$(\omega^2-C_s^2\boldsymbol{kk}\cdot)\boldsymbol{u}_1+\frac{\omega V_A^2}{B_0}(\boldsymbol{e}_z\cdot\boldsymbol{k}-\boldsymbol{ke}_z\cdot)\boldsymbol{B}_1=0,\quad (3.49)$$
$$(\boldsymbol{B}_0\boldsymbol{k}\cdot-\boldsymbol{B}_0\cdot\boldsymbol{k})\boldsymbol{u}_1-\left[\left(\omega+i\frac{\eta}{\mu}k^2\right)-i\lambda\boldsymbol{B}_0\cdot\boldsymbol{kk}\times\right]\boldsymbol{B}_1=0,$$
$$(3.50)$$

其中 $\lambda=1/(\mu n_iq_i)=m_i/(\mu\rho_0q_i)$.

如果按上面给出的坐标图,代入 $\boldsymbol{k}=(k_x,0,k_z)$,则由(3.49)式

的三个分量方程可得

$$-\omega B_0(k_zB_{kx}-k_xB_{kz})=\mu\rho_0\omega^2u_{kx}-\mu\rho_0k_xC_s^2(k_xu_{kx}+k_zu_{kz}),\tag{3.51}$$

$$u_{ky}=-\frac{V_A^2}{\omega B_0}k_zB_{ky},\tag{3.52}$$

$$u_{kz}=\frac{k_xk_z}{\omega^2-k_z^2C_s^2}C_s^2u_{kx}.\tag{3.53}$$

再从(3.50)式也可得三个分量方程

$$B_0k_zu_{kx}+\left(\omega+\mathrm{i}\frac{\eta}{\mu}k^2\right)B_{kx}+\mathrm{i}\lambda B_0k_z^2B_{ky}=0,\tag{3.54}$$

$$B_0k_zu_{ky}+\left(\omega+\mathrm{i}\frac{\eta}{\mu}k^2\right)B_{ky}-\mathrm{i}\lambda B_0k_z(k_zB_{kx}-k_xB_{kz})=0,\tag{3.55}$$

$$B_0k_zu_{kz}-B_0(k_xu_{kx}+k_zu_{kz})+\left(\omega+\mathrm{i}\frac{\eta}{\mu}k^2\right)B_{kz}-\mathrm{i}\lambda B_0k_xk_zB_{ky}=0.\tag{3.56}$$

将(3.51)式中的$(k_zB_{kx}-k_xB_{kz})$，(3.52)式中的B_{ky}以及(3.53)式中的u_{kz}代入(3.55)式，经整理后得

$$[(\omega^2-k_x^2C_s^2)(\omega^2-k_z^2C_s^2)-k_x^2k_z^2C_s^4]u_{kx}$$
$$=-\frac{\mathrm{i}}{\lambda k_z^2B_0}\omega(\omega^2-k_z^2C_s^2)\left[\omega\left(\omega+\mathrm{i}\frac{\eta}{\mu}k^2\right)-k_z^2V_A^2\right]u_{ky},\tag{3.57}$$

其中的 $\lambda B_0k_z^2$ 有 $1/t$ 的量纲.

再由 $k_z\cdot(3.54)-k_x\cdot(3.56)$，并将(3.51)式中的$(k_zB_{kx}-k_xB_{kz})$及(3.52)式中的$B_{ky}$代入，可得

$$\mathrm{i}\lambda B_0k^2k_z^2V_A^2u_{kx}$$
$$=\left\{\left(\omega+\mathrm{i}\frac{\eta}{\mu}k^2\right)\left[\omega\left(\omega+\mathrm{i}\frac{\eta}{\mu}k^2\right)-k_z^2V_A^2\right]-\lambda^2B_0^2k^2k_z^2\omega\right\}u_{ky}.\tag{3.58}$$

合并(3.57)和(3.58)式，最后得到一个关于 ω^6 的色散方程

$$\omega(\omega^2-k^2C_s^2)\left\{\left(\omega+\mathrm{i}\frac{\eta}{\mu}k^2\right)\left[\omega\left(\omega+\mathrm{i}\frac{\eta}{\mu}k^2\right)-k_z^2V_A^2\right]-\lambda^2B_0^2k^2k_z^2\omega\right\}$$
$$=(\omega^2-k_z^2C_s^2)\left[\omega\left(\omega+\mathrm{i}\frac{\eta}{\mu}k^2\right)k^2V_A^2-k_z^2k^2V_A^4\right].\tag{3.59}$$

(3) 垂直于磁场传播的波($k_z=0,\boldsymbol{k}=k_x\boldsymbol{e}_x$)

这时代表霍尔效应的因子 λ 不出现，故色散方程(3.59)简化成

$$(\omega^2-k_x^2C_s^2)\left(\omega+\mathrm{i}\frac{\eta}{\mu}k_x^2\right)^2=\omega\left(\omega+\mathrm{i}\frac{\eta}{\mu}k_x^2\right)k_x^2V_A^2.\tag{3.60}$$

这个方程有以下几支解：

(i) 纯阻尼模.

由方程两边的共同因子$(\omega+\mathrm{i}(\eta/\mu)k_x^2)=0$，可得

$$\omega=-\mathrm{i}\frac{\eta}{\mu}k_x^2.\tag{3.61}$$

因此，这是一支纯阻尼模($\omega=\omega_i<0$)，而其他的解都是这个因子取非零值时的方程解.

(ii) 无电阻($\eta=0$)时的压缩阿尔文波：

$$(\omega^2-k_x^2C_s^2)=k_x^2V_A^2,\quad\Rightarrow\quad\omega^2=k_x^2(C_s^2+V_A^2).\tag{3.62}$$

(iii) 有电阻时，(3.60)式可约化成

$$(\omega^2-k_x^2C_s^2)\left(\omega+\mathrm{i}\frac{\eta}{\mu}k_x^2\right)=\omega k_x^2V_A^2.$$

这方程对 ω 是一个三次方程，不易求解. 但对于 k 来说是一个关于 k_x^2 的二次方程

$$\left(-\mathrm{i}\frac{\eta}{\mu}C_s^2\right)k_x^4-\left[\omega(C_s^2+V_A^2)-\mathrm{i}\frac{\eta}{\mu}\omega^2\right]k_x^2+\omega^3=0,$$

有解

$$k_x^2=\mathrm{i}\frac{\mu}{2\eta C_s^2}\left[(C_s^2+V_A^2)\omega-\mathrm{i}\frac{\eta}{\mu}\omega^2\right.$$
$$\left.\pm\sqrt{\left[(C_s^2+V_A^2)\omega-\mathrm{i}\frac{\eta}{\mu}\omega^2\right]^2+\mathrm{i}4\frac{\eta}{\mu}C_s^2\omega^3}\right].$$

一般磁流体中的电阻是小量，故可在根号中略去含 η^2 的项，只保留 η 的一次项：

$$k_x^2 = \mathrm{i}\,\frac{\mu}{2\eta C_s^2}\Big[(C_s^2+V_A^2)\omega - \mathrm{i}\,\frac{\eta}{\mu}\omega^2 \pm \omega(C_s^2+V_A^2) \mp \mathrm{i}\,\frac{\eta}{\mu}\,\frac{\omega^2(V_A^2-C_s^2)}{C_s^2+V_A^2}\Big]. \tag{3.63}$$

当在上式中取+号时，

$$k_{x+}^2 = \mathrm{i}\,\frac{\mu}{\eta}\left(1+\frac{V_A^2}{C_s^2}\right)\omega + \frac{V_A^2}{C_s^2(C_s^2+V_A^2)}\omega^2.$$

令 ω=实数，$k_{x+}=k_r+\mathrm{i}k_i$，则 $k_{x+}^2\approx k_r^2+\mathrm{i}2k_rk_i$，所以有

$$k_r^2 = \frac{V_A^2}{C_s^2(C_s^2+V_A^2)}\omega^2, \quad \Rightarrow \quad \omega^2 = C_s^2\left(1+\frac{C_s^2}{V_A^2}\right), \tag{3.64}$$

$$k_i = \frac{1}{2k_r}\,\frac{\mu}{\eta}\left(1+\frac{V_A^2}{C_s^2}\right)\omega > 0. \tag{3.65}$$

按 $\exp[\mathrm{i}k_xx]=\exp[\mathrm{i}k_rx-k_ix]$，可知这是一支阻尼的离子声波.

当在(3.63)式中取−号时，

$$k_{x-}^2 = \frac{\omega^2}{C_s^2+V_A^2}. \tag{3.66}$$

即 $\omega^2=k_{x-}^2(C_s^2+V_A^2)$，因此这是一支不阻尼的压缩阿尔文波.

总而言之，霍尔效应对垂直于磁场传播的波并无影响(但对扰动电场 $\boldsymbol{E}_1$ 的极化有影响)；而这时电阻效应虽会使离子声波阻尼，对压缩阿尔文波却无影响.

(4) 平行于磁场传播的波($k_x=0,\boldsymbol{k}=k_z\boldsymbol{e}_z$)

这时"霍尔因子"λ 出现，故霍尔效应将起作用. 色散方程化为

$$\omega(\omega^2-k_z^2C_s^2)\left\{\left(\omega+\mathrm{i}\,\frac{\eta}{\mu}k_z^2\right)\left[\omega\left(\omega+\mathrm{i}\,\frac{\eta}{\mu}k_z^2\right)-k_z^2V_A^2\right]-\lambda^2B_0^2k_z^4\omega\right\} = (\omega^2-k_z^2C_s^2)\left[\omega\left(\omega+\mathrm{i}\,\frac{\eta}{\mu}k_z^2\right)k_z^2V_A^2-k_z^4V_A^4\right]. \tag{3.67}$$

方程(3.67)有以下几类解.

(i) 离子声波(无阻尼)：

$$\omega^2 = k_z^2C_s^2. \tag{3.68}$$

(ii) 当 $\eta=0$，这时只显现纯霍尔效应，而无电阻影响. 色散方程化成

$$\omega[\omega(\omega^2-k_z^2V_A^2)-\lambda^2B_0^2k_z^4\omega] = \omega^2k_z^2V_A^2-k_z^4V_A^4.$$

上式中的含 λ 因子可化为

$$\lambda B_0k_z^2 = \frac{m_iB_0}{\mu\rho_0q_i}k_z^2 = \frac{k_z^2V_A^2}{\omega_{ci}},$$

其中 ω_{ci}是离子回旋频率. 因此色散方程可以写成

$$\omega^4 - \left(2k_z^2V_A^2+\frac{k_z^4V_A^4}{\omega_{ci}^2}\right)\omega^2 + k_z^4V_A^4 = 0.$$

有解(色散关系)

$$\omega^2 = k_z^2V_A^2\left(1+\frac{k_z^2V_A^2}{2\omega_{ci}^2}\right) \pm \frac{k_z^3V_A^3}{\omega_{ci}}\sqrt{1+\frac{k_z^2V_A^2}{4\omega_{ci}^2}} \approx k_z^2V_A^2\left(1+\frac{k_z^2V_A^2}{2\omega_{ci}^2}\right) \pm \frac{k_z^3V_A^3}{\omega_{ci}}\left(1+\frac{k_z^2V_A^2}{8\omega_{ci}^2}\right).$$

上式的最后一步考虑到 $k_zV_A\ll\omega_{ci}$，而取了近似. 在分别取+号及−号时，解变成

$$\omega_+^2 \approx k_z^2V_A^2\left(1+\frac{k_zV_A}{\omega_{ci}}\right), \tag{3.69}$$

$$\omega_-^2 \approx k_z^2V_A^2\left(1-\frac{k_zV_A}{\omega_{ci}}\right). \tag{3.70}$$

这表明霍尔效应将剪切阿尔文波分裂成频率略高和略低于阿尔文频率的两支无阻尼的低频离子波，它们和平行磁场传播的低频电子哨声波很相似，只是频率更低. 所以可以将它们称为离子哨声波. 从物理上来看，这是因为剪切阿尔文波的电场矢量在霍尔效应影响下在垂直于磁场的方向上(左或右向)旋转起来，其极化从线偏振变成了左旋或右旋的圆偏振，同时频率也发生了多普勒位移.

(iii) 当 $\eta\neq0,\lambda\neq0$,这时电阻和霍尔效应将同时起作用.

色散方程(3.67)两边在消去非零因子$(\omega^2-k_z^2C_s^2)$后可展成对 ω 完整的四次(或者对 k_z^2 二次)的代数方程

$$\omega^4+\mathrm{i}2\frac{\eta}{\mu}k_z^2\omega^3-\left(\frac{\eta^2}{\mu^2}k_z^4+2k_z^2V_A^2\right)\omega^2-\mathrm{i}2\frac{\eta}{\mu}k_z^4V_A^2\omega+k_z^4V_A^4\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_{ci}^2}\right)=0,$$

$$\left[\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_{ci}^2}\right)V_A^4-\frac{\eta^2}{\mu^2}\omega^2-\mathrm{i}2\frac{\eta}{\mu}\omega V_A^2\right]k_z^4-2\left(\omega^2V_A^2-\mathrm{i}\frac{\eta}{\mu}\omega^3\right)k_z^2+\omega^4=0.$$

这样看来,从后一个方程求解比较容易.在略去了 η^2 的小量后,有解

$$k_z^2=\frac{(V_A^2-\mathrm{i}(\eta/\mu)\omega)\omega^2\pm\omega^3V_A^2/\omega_{ci}}{(1-\omega^2/\omega_{ci}^2)V_A^4-\mathrm{i}2(\eta/\mu)\omega V_A^2}$$
$$=\left[\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_{ci}^2}\right)^2V_A^8\right]^{-1}\left[\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_{ci}^2}\right)\left(1\pm\frac{\omega}{\omega_{ci}}\right)V_A^6\omega^2+\mathrm{i}\frac{\eta}{\mu}\omega^3V_A^4\left(1\pm\frac{\omega}{\omega_{ci}}\right)^2\right]. \tag{3.71}$$

在导出后一式时,进行了分母有理化、并略去了小量 η^2.从上式的实部可得色散关系

$$k_{zr}^2=\frac{\omega^2}{(1\mp\omega/\omega_{ci})V_A^2}, \tag{3.72}$$

这就是上面得出的两支离子哨声波:$\omega^2=k_{zr}^2V_A^2(1\mp\omega/\omega_{ci})$;但现在它们都具有虚部

$$k_{zi}=\frac{1}{2k_{zr}}\frac{\eta}{\mu}\frac{\omega^3}{V_A^4}\frac{1}{(1\mp\omega/\omega_{ci})^2}>0. \tag{3.73}$$

这表示,这两支哨声波都是阻尼的,阻尼率正比于电阻率.

这样霍尔效应和电阻效应对沿磁力线传播的离子声波毫无影响,但霍尔效应会使同样沿磁力线传播的剪切阿尔文波分裂成频率略高于或略低于阿尔文频率的两支波(可以称为离子哨声波),而电阻的加入则进一步使这两支波受阻尼.

(5) 科里奥利力的影响

当磁流体以磁场方向为对称轴作刚性的转动时,原则上是一个非惯性系.这时若仍想用惯性系的力学规律(如本书给出的磁流体方程组)来描述它,则各磁流体元都应该加上一个惯性力——科里奥利力的作用(但这只对非相对论的转速才正确).设磁流体以匀角速度 $\boldsymbol{\Omega}=\Omega\boldsymbol{b}$($\Omega=$常数)转动($\boldsymbol{b}$ 是磁场方向的单位矢量),则运动方程要修改成为(参见文献[2])

$$\rho\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}=-\nabla P+\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{B}+2\rho\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{\Omega}, \tag{3.74}$$

加上前面描述剪切阿尔文波的其他磁流体方程,通过类似的推算可得色散关系

$$\left(1-4\frac{\Omega^2}{\omega^2}\right)\omega^4-2k^2V_A^2\omega^2+k^4V_A^4=0.$$

有解

$$\omega_+^2=k^2V_{fA}^2=\left(1-2\frac{\Omega}{\omega}\right)^{-1}k^2V_A^2, \tag{3.75}$$

$$\omega_-^2=k^2V_{sA}^2=\left(1+2\frac{\Omega}{\omega}\right)^{-1}k^2V_A^2. \tag{3.76}$$

这样原来的剪切阿尔文波在科里奥利力的影响下也分裂成相速度(频率)高于及低于原来相速度(频率)的两支波.在文献中常把它们分别称为快模(或惯性模)和慢模(或磁性模),同时原来是平面极化的剪切阿尔文波现在变成了两支圆偏振的横波.这些都和霍尔效应对平行于磁场传播的剪切阿尔文波的影响类似.

应当指出,上面的讨论只对非相对论的转速才适用.因为这时一个非惯性系才能用在惯性系的运动方程中加入惯性力的方式来处理,否则原则上要使用满足广义相对性原理的运动方程来处理.

3.2 非均匀磁流体中的剪切阿尔文波

3.2.1 连续谱阿尔文波(非均匀磁场、理想磁流体)[3]

取平板几何模型,令平衡磁场为

$$\boldsymbol{B}_0(x) = B_{0y}(x)\boldsymbol{e}_y + B_{0z}(x)\boldsymbol{e}_z,$$

并假定有平衡条件

$$\boldsymbol{u}_0 = 0, \quad \rho_0 = \text{常数}, \quad \rho_0 + |B_0|^2/2\mu = \text{常数}.$$

由于我们只讨论剪切阿尔文波,故有不可压缩条件

$$\nabla \cdot \boldsymbol{u}_1 = 0.$$

相应的线性微分方程组是

$$\rho_0 \frac{\partial \boldsymbol{u}_1}{\partial t} = \frac{1}{\mu}(\boldsymbol{B}_0 \cdot \nabla)\boldsymbol{B}_1 - \nabla\left(P_1 + \frac{\boldsymbol{B}_0 \cdot \boldsymbol{B}_1}{\mu}\right) + (\boldsymbol{B}_1 \cdot \nabla)\boldsymbol{B}_0, \tag{3.77}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}_1}{\partial t} = (\boldsymbol{B}_0 \cdot \nabla)\boldsymbol{u}_1. \tag{3.78}$$

在推导上式时已用到了不可压缩条件,同时可证前一式的最后一项在本节所取的磁场位形下为零.对(3.77)式两边同取时间导数后再代入(3.78)式,可得

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{u}_1}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho_0 \mu}(\boldsymbol{B}_0 \cdot \nabla)^2 \boldsymbol{u}_1 - \frac{1}{\rho_0} \nabla \frac{\partial}{\partial t}\left(P_1 + \frac{\boldsymbol{B}_0 \cdot \boldsymbol{B}_1}{\mu}\right).$$

此式还可写成

$$\mathscr{D}\boldsymbol{u}_1 = -\frac{1}{\rho_0} \nabla\left(\frac{\partial \tilde{P}}{\partial t}\right); \tag{3.79}$$

$$\mathscr{D} = \mu\rho_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} - (\boldsymbol{B}_0 \cdot \nabla)^2, \tag{3.80}$$

$$\tilde{P} = P_1 + \frac{\boldsymbol{B}_0 \cdot \boldsymbol{B}_1}{\mu}. \tag{3.81}$$

其中 $\mathscr{D}$ 是一个微分算子,只是 x 的函数而与 y,z 无关.为了求出本征方程,用下面的方法比较简单:首先,利用 $\nabla \times \nabla A = 0$,对(3.79)式两边同取旋度后有

$$\nabla \times (\mathscr{D}\boldsymbol{u}_1) = 0. \tag{3.82}$$

上式左边的 x 分量为

$$[\nabla \times (\mathscr{D}\boldsymbol{u}_1)]_x = \frac{\partial}{\partial y}(\mathscr{D}\boldsymbol{u}_1)_z - \frac{\partial}{\partial z}(\mathscr{D}\boldsymbol{u}_1)_y = \mathscr{D}\left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z}\right) = \mathscr{D}(\nabla \times \boldsymbol{u}_1)_x.$$

故可以得出以下方程

$$\mathscr{D}(\nabla \times \boldsymbol{u}_1)_x \equiv \mathscr{D}\left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z}\right) = 0, \tag{3.83}$$

这给出了 u_y, u_z 之间的关系.对 u_x 的微分方程可从旋度 $\nabla \times (\mathscr{D}\boldsymbol{u}_1)$ 的 y,z 分量得出

$$[\nabla \times (\mathscr{D}\boldsymbol{u}_1)]_y \equiv \mathscr{D}\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x}(\mathscr{D}u_z) = 0,$$

$$[\nabla \times (\mathscr{D}\boldsymbol{u}_1)]_z \equiv \frac{\partial}{\partial x}(\mathscr{D}u_y) - \mathscr{D}\frac{\partial u_x}{\partial y} = 0.$$

由此可得

$$\frac{\partial}{\partial x}(\mathscr{D}u_z) = \mathscr{D}\frac{\partial u_x}{\partial z}, \tag{3.84}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\mathscr{D}u_y) = \mathscr{D}\frac{\partial u_x}{\partial y}. \tag{3.85}$$

然后,同时对(3.79)式两边取散度

$$\nabla \cdot (\mathscr{D}\boldsymbol{u}_1) = -\frac{1}{\rho_0} \nabla^2\left(\frac{\partial}{\partial t}\tilde{P}\right),$$

加上不可压缩条件

$$\nabla \cdot \boldsymbol{u}_1 \equiv \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0,$$

结果有

$$\frac{\partial}{\partial x}(\mathscr{D}u_x) = \mathscr{D}\frac{\partial u_x}{\partial x} - \frac{1}{\rho_0}\nabla^2\left(\frac{\partial}{\partial t}\tilde{P}\right). \tag{3.86}$$

(3.84)+(3.85)+(3.86),可得

$$\frac{\partial}{\partial x}(\mathscr{D}\boldsymbol{u}_1) = \mathscr{D}(\nabla u_x) - \frac{1}{\rho_0}\nabla^2\left(\frac{\partial}{\partial t}\tilde{P}\right)\boldsymbol{e}_x,$$

或改成

$$\mathscr{D}(\nabla u_x) = \frac{\partial}{\partial x}(\mathscr{D}\boldsymbol{u}_1) + \frac{1}{\rho_0}\nabla^2\left(\frac{\partial}{\partial t}\tilde{P}\right)\boldsymbol{e}_x. \tag{3.87}$$

再对上式两边取散度

$$\begin{aligned}\nabla\cdot[\mathscr{D}(\nabla u_x)] &= \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\mathscr{D}u_x) + \frac{\partial}{\partial x}\left[\mathscr{D}\left(\frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}\right)\right] \\ &\quad + \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial x}\left[\nabla^2\frac{\partial\tilde{P}}{\partial t}\right] \\ &= \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial}{\partial x}(\mathscr{D}u_x) - \mathscr{D}\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{1}{\rho_0}\nabla^2\left(\frac{\partial\tilde{P}}{\partial t}\right)\right] \\ &= 0,\end{aligned}$$

其中用到了 $\nabla\cdot\boldsymbol{u}_1=0$ 及(3.86)式,最后可得关于 u_x 的本征方程

$$\nabla\cdot\left\{\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{1}{\rho_0\mu}(\boldsymbol{B}_0\cdot\nabla)^2\right]\nabla u_x\right\} = 0. \tag{3.88}$$

这个方程乍一看是时间二阶、空间四阶的微分方程,要直接求解几乎是不可能的. 但如果对它作下列形式的傅氏变换

$$u_x(\boldsymbol{r},t) = \int A_k(\omega)U_{k\omega}(x)\exp[\mathrm{i}(k_y y + k_z z - \omega t)]\mathrm{d}k_y\mathrm{d}k_z\mathrm{d}\omega$$

后,就可以得到一个关于 $U_{k\omega}$ 的二阶微分方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left\{[\omega^2 - \omega_A^2(x)]\frac{\mathrm{d}U_{k\omega}}{\mathrm{d}x}\right\} - k^2U_{k\omega}[\omega^2 - \omega_A^2(x)] = 0, \tag{3.89}$$

其中

$$k^2 = k_y^2 + k_z^2,\quad \omega_A^2(x) = \frac{1}{\rho_0\mu}[\boldsymbol{B}_0(x)\cdot\boldsymbol{k}]^2 = k^2V_A^2(x)\cos^2\theta,$$

$$V_A^2(x) = B_0^2/\mu\rho_0,$$

而 $\theta=\theta(x)$ 是磁场 $\boldsymbol{B}_0$ 和波矢 $\boldsymbol{k}$ 方向之间的夹角. 上式还可以简写成

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[f(x)\frac{\mathrm{d}U_{k\omega}}{\mathrm{d}x}\right] - gf(x)U_{k\omega}(x) = 0, \tag{3.90}$$

$$f(x) = \omega_A^2(x) - \omega^2,\quad g = k^2\quad (-\infty < x < \infty).$$

由于 $B(x)$ 总是有界的,即存在极大值 $B_{\max}$,和极小值 $B_{\min}$,故有

$$|\omega_A|_{\min}^2 \leqslant \omega_A^2(x) \leqslant |\omega_A|_{\max}^2. \tag{3.91}$$

这样在坐标 x 变化时,$f(x)$ 也在变. 如果在某处 $f(x_0)=0$,则这个二阶方程在这点就是奇异的: 这时为使方程不会降阶,函数 $U_{k\omega}(x_0)$ 必须是发散的——也即是奇异的. 下面将可以证明,只有当剪切阿尔文波的频率 ω 满足

$$|\omega_A|_{\min}^2 \leqslant \omega^2 \leqslant |\omega_A|_{\max}^2 \tag{3.92}$$

时,方程才存在非零解. 为此,将(3.90)式两边同时左乘 $U_{k\omega}^*$ 后求积 $\int\cdots\mathrm{d}x$. 再利用分部积分及边条件 $U_{k\omega}(\infty)\to0$,可得

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\left(\left|\frac{\mathrm{d}U_{k\omega}}{\mathrm{d}x}\right|^2 + k^2|U_{k\omega}|^2\right)\mathrm{d}x = 0.$$

令 $\omega^2=(\omega^2)_r+\mathrm{i}(\omega^2)_i$,及 $f(x)=f_r+\mathrm{i}f_i$,则上述方程可以写成两个实方程

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_{r,i}(x)\left(\left|\frac{\mathrm{d}U_{k\omega}}{\mathrm{d}x}\right|^2 + k^2|U_{k\omega}|^2\right)\mathrm{d}x = 0.$$

当 $f_r\neq0$ 及 $f_i\neq0$ 时,为了使方程成立,只能有平凡解(即零解) $U_{k\omega}=0$. 所以只有在 $f_r=0$ 及 $f_i=0$ 同时成立时,方程才有非零解. 由

$$f_i = 0,\quad \Rightarrow\quad [\omega_A^2(x) - \omega^2]_i = 0,\quad (\omega^2)_i = 0,$$

即 ω^2 必定为实数 $(\omega^2)_r$. 而由

$$f_r = 0,\quad \Rightarrow\quad \omega_A^2(x) - (\omega^2)_r = 0,$$

可得 $\omega^2=(\omega^2)_r=\omega_A^2(x)$,由(3.91)式可证(3.92)式成立.

这样,在这种不均匀磁流体中,阿尔文波频率 $\omega(x)$ 随坐标 x

的变化而构成一个连续谱,故称这样的阿尔文波为连续谱阿尔文波,其色散关系为

$$\omega^2 = \omega_A^2(x) = k^2V_A^2(x)\cos^2\theta, \quad V_A^2(x) = \frac{B_0^2(x)}{\mu\rho_0}. \tag{3.93}$$

一般情况下,不仅磁场,而且密度也可以是空间不均匀的,这时只要将定义 $V_A^2(x)$中的 B_0 和 ρ_0 都写成是空间的函数就行了.

现在来看(3.90)式的解. 前面曾证明,当给定一个在连续谱中的 ω 值时,一定存在一点 x_0,使 $f(x_0)=0$,于是可以将解析函数 $f(x)$在这点展开

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f^{(n)}(x-x_0)^n, \quad f^{(n)} = \frac{1}{n!}\left.\frac{\partial^n f(x)}{\partial x^n}\right|_{x_0}.$$

然后来讨论解 $U_{k\omega}(x)$在 x_0 附近的展开形式. 上面曾指出当 $f(x_0)=0$ 时,是奇异(发散)的,现在需要确定它在 x_0 附近的发散程度. (3.90)式可以改写成

$$U''_{k\omega} + \frac{f'}{f}U'_{k\omega} - gU_{k\omega} = 0.$$

当 $x=x_0$ 时,$U''_{k\omega}$,$U'_{k\omega}$及$\frac{f'}{f}$均发散得比 $U_{k\omega}$快,故在 $x\sim x_0$ 附近方程可以近似写成

$$U''_{k\omega} + \frac{f'}{f}U'_{k\omega} = 0, \quad \Rightarrow \quad \frac{U''_{k\omega}}{U'_{k\omega}} = -\frac{f'}{f}.$$

所以有解

$$(\ln U'_{k\omega})' = \left(\ln\frac{1}{f}\right)', \quad \Rightarrow \quad U'_{k\omega} = \frac{1}{f} \sim \frac{1}{f^{(1)}(x-x_0)},$$

$$\Rightarrow \quad U_{k\omega}(x) = f^{(1)}\ln(x-x_0) + A.$$

这样一般可以把函数写成

$$U_{k\omega} = A(\omega,k)[w(x) + d(x)\ln|x-x_0| + h(x)(x-x_0)], \tag{3.94}$$

其中 w,d,h 都是 x_0 附近的解析函数,且 $w(x_0)=h(x_0)=1$. $w(x)$和外源条件有关(见再下一节),而$(x-x_0)h(x)$是为了在方程中

消去 $gU_{k\omega}$而加入的. 上面给出的表达式说明在 x_0 处 $U_{k\omega}$有对数发散型的奇异性,这个结论是在平板几何中才成立的. 对环型几何,$U_{k\omega}$一般具有$(x-x_0)^{-\nu}$($\nu<1$)型的发散性(这比对数发散要强一点,但比$(x-x_0)^{-1}$要弱一些),此外还可能有分支解.

在数学上,齐次线性微分方程组在正则和非正则奇点处的局部行为,可由 Frobenius 理论描述. 详细的讨论,请参考文献[4].

3.2.2　表面阿尔文波（非均匀密度、磁场的理想磁流体）[3]

在图 3.8 中,$x=0$ 处是分界面:

在 $x<0$ 处: $\boldsymbol{B}_0=B_{02}\boldsymbol{e}_z$,$n(x)=n_{02}$,

在 $x>0$ 处: $\boldsymbol{B}_0=B_{01}\boldsymbol{e}_z$,$n(x)=n_{01}$.

图 3.8　两个密度和磁场不同的磁流体界面

由于在每一个区内 $B_{01,02}$ 及 $n_{01,02}$都是常数,故前面导出的线性扰动方程(3.79)分别在各区中都成立,

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{(\boldsymbol{B}_{0i}\cdot\nabla)^2}{\mu\rho_{0i}}\right]\boldsymbol{u}_1 = -\frac{1}{\rho_{0i}}\frac{\partial}{\partial t}\nabla\tilde{P}_i, \tag{3.95}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{u}_1 = 0, \quad i=1,2. \tag{3.96}$$

其中

$$\tilde{P}_i = P_{1i} + \frac{1}{\mu}\boldsymbol{B}_{0i}\cdot\boldsymbol{B}_1,$$

$$P_{0i} = n_{0i}T_0, \quad \rho_i = m_i n_{0i}.$$

这样依照上节相同的推导过程,对应(3.88)式有

$$\nabla\cdot\left\{\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{1}{\rho_{0i}\mu}\left(B_{0i}\frac{\partial}{\partial z}\right)^2\right]\nabla u_x\right\} = 0, \quad i=1,2. \tag{3.97}$$

由于 ρ_{0i},B_{0i}是常数,故上式可简化成

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{1}{\mu\rho_{0i}}\left(B_{0i}\frac{\partial}{\partial z}\right)^2\right]\nabla^2 u_x = 0, \quad i=1,2. \tag{3.98}$$

令 $V_{Ai}^2=B_{0i}^2/\mu\rho_{0i}$，这时 V_{Ai}^2是常数，故一般 $\omega^2\neq k_\parallel^2 V_{Ai}^2$. 在这种情况下，上面方程可进一步简化. 取傅氏分量

$$u_x(\boldsymbol{r}) = f(x)\exp[-\mathrm{i}\omega + \mathrm{i}k_\perp y + \mathrm{i}k_\parallel z],$$

代入 (3.98)式后，得

$$(\omega^2 - k_\parallel^2 V_{Ai}^2)\ \nabla^2[f(x)\exp(\mathrm{i}k_\perp y + \mathrm{i}k_\parallel z)] = 0,\quad i = 1,2.$$

由于上式左面第一个因子$(\omega^2-k_\parallel^2 V_{Ai}^2)$一般不为零，故上式的解等价于下面方程的解

$$\nabla^2[f(x)\exp(\mathrm{i}k_\perp y + \mathrm{i}k_\parallel z)] = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - k^2\right)f(x) = 0,\quad i = 1,2.$$

其解为

$$f(x) = \begin{cases} A\exp(-|k|x), & x > 0, \\ B\exp(+|k|x), & x < 0. \end{cases}$$

图 3.9 表面阿尔文波的空间结构

在图 3.9 中，上面的解在分界面 $x=0$ 处有峰状结构，然后分别向两边成指数地衰减. 这就是把它称为表面(界面)阿尔文波的缘故.

色散关系这时应由区域 1 和 2 在 $x=0$ 处(分界面)的连接条件来求出.

连接条件之 1：$u_x, f(x)$在界面处连续：$f(0^-)=f(0^+)$；于是有 $A=B$.

连接条件之 2：$\tilde{P}$在界面处连续. 这可由(3.95)式的 x 分量来实现：

$$\left(\omega^2 - \frac{k_\parallel^2 B_{0i}^2}{\mu\rho_{0i}}\right)f(x) = \mathrm{i}\,\frac{\omega}{\rho_{0i}}\,\frac{\partial\tilde{P}_i}{\partial x}.$$

代入解 $f(x)$后，对 x 积分可得

$$\tilde{P}_i = \frac{k_\parallel^2\rho_{0i}}{\mathrm{i}\omega}\left(\frac{\omega^2}{k_\parallel^2} - \frac{B_{0i}^2}{\mu\rho_{0i}}\right)\begin{cases} A\int_\infty^x \exp(-|k|x)\mathrm{d}x, & x > 0, \\ B\int_{-\infty}^{-x} \exp(+|k|x)\mathrm{d}x, & x < 0 \end{cases}$$

$$= \frac{k_\parallel^2\rho_{0i}}{\mathrm{i}\omega|k|}\left(\frac{\omega^2}{k_\parallel^2} - V_{Ai}^2\right)\begin{cases} -A\exp(-|k|x), & x > 0, \\ A\exp(+|k|x), & x < 0. \end{cases}$$

其中最后一步已经用到了第一个连接条件 $A=B$. 按 $\tilde{P}$在 $x=0$ 处连续的要求 $\tilde{P}_1=\tilde{P}_2$，有

$$\rho_{01}\left(\frac{\omega^2}{k_\parallel^2} - V_{A1}^2\right) + \rho_{02}\left(\frac{\omega^2}{k_\parallel^2} - V_{A2}^2\right) = 0. \qquad (3.99)$$

当上式有实根时，解可以写作

$$\omega^2 = k_\parallel^2\left(\frac{\rho_{01}}{\rho_{01}+\rho_{02}}V_{A1}^2 + \frac{\rho_{02}}{\rho_{01}+\rho_{02}}V_{A2}^2\right) = k_\parallel^2 V_{A1}^2\left(\frac{1+\gamma^2}{1+\eta}\right), \qquad (3.100)$$

其中 $\eta=\rho_{02}/\rho_{01}$，$\gamma=B_{02}/B_{01}$. 当 $\eta=\gamma=1$ 时，即磁流体变成均匀的时候，这个色散关系就退化到普通剪切阿尔文波的色散关系.

一种特别情况是：当上述的两个区域分别是等离子体和真空时，$\rho_{02}=0$；则色散关系退化成

$$\omega_{AS} = k_\parallel\left(\frac{B_{01}^2 + B_{02}^2}{\mu\rho_{01}}\right)^{1/2} = k_\parallel V_{AS}. \qquad (3.101)$$

如果进一步假定 $B_{01}=B_{02}$，则

$$\omega_{AS} = \sqrt{2}\,k_\parallel V_A.$$

应该注意，这时表面阿尔文波的相速度是 $V_{AS}=\sqrt{2}V_A$，要比均匀磁流体中的剪切阿尔文波速大一个因子$\sqrt{2}$. 这表明非均匀界面上的表面波和均匀介质中的剪切阿尔文波并不一样.

3.2.3 连续阿尔文波的“共振”吸收(用阿尔文波加热磁流体的机制简介)[5]

按前一节中的讨论，在使 $f(x_0)=0$ 的 x_0 点附近，扰动速度 u_x 的傅氏分量 $U_{k\omega}(x)$有奇异性. 在平板几何内，奇异性呈对数发散：

$$U_{k\omega} = A(\omega,k)[w(x) + d(x)\ln|x - x_0| + h(x)(x - x_0)].$$

假定 $k_y=0$，由不可压缩条件 $\nabla\cdot\boldsymbol{u}_1=0$，有

$$\frac{\partial U_{k\omega}(x)}{\partial x}+\mathrm{i}k_zU_{zk\omega}(x)=0.$$

于是

$$U_{zk\omega}(x)=\frac{\mathrm{i}}{k_z}\frac{\partial U_{k\omega}(x)}{\partial x}$$

$$=\frac{\mathrm{i}}{k_z}A(\omega,k)\Big[w'(x)+d'\ln(x-x_0)$$

$$+\frac{d}{x-x_0}+h'(x-x_0)+h\Big].$$

当 $x\to x_0$ 时，上式中最大的项是第三项（$(x-x_0)^{-1}$发散项），故可以近似取

$$U_{zk\omega}(x)\sim A(\omega,k)\frac{D(x,k_z)}{x-x_0},\qquad(3.102)$$

其中 $D(x,k_z)=\mathrm{i}d(x)/k_z$. 然后从频率在奇异点附近的展开式

$$\omega(x)=\omega(x_0)+(x-x_0)\left.\frac{\mathrm{d}\omega(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x_0},$$

可得

$$x-x_0=\frac{\omega(x)-\omega(x_0)}{(\mathrm{d}\omega/\mathrm{d}x)\big|_{x_0}}.$$

将上式代入(3.102)式，得

$$U_{zk\omega}(x)=\frac{(\mathrm{d}\omega_0/\mathrm{d}x)}{\omega-\omega_0}A(\omega,k)D(x,k_z).$$

其中 $A(\omega,k_z)$由外源条件，即外加的阿尔文波来决定. 当外来阿尔文波具有共振频率 $\omega_0=\omega(x_0)$时，其扰动速度可写成

$$u_{x0}\propto\sin(\omega_0t),$$

它的时间拉氏变换是

$$A(\omega,k)\propto\frac{\omega_0}{\omega^2-\omega_0^2}.$$

故有

$$U_{zk\omega}(x)\propto\frac{(\mathrm{d}\omega_0/\mathrm{d}x)}{\omega-\omega_0}\frac{\omega_0}{\omega^2-\omega_0^2}$$

$$=\frac{(\omega+\omega_0)(\mathrm{d}\omega_0/\mathrm{d}x)}{\omega^2-\omega_0^2}\frac{\omega_0}{\omega^2-\omega_0^2}$$

$$=\left[\frac{\omega\omega_0}{(\omega^2-\omega_0^2)^2}+\frac{\omega_0^2}{(\omega^2-\omega_0^2)^2}\right]\frac{\mathrm{d}\omega_0}{\mathrm{d}x},$$

它的拉氏逆变换是

$$u_z(x,t)=\int U_{zk\omega}(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega$$

$$\propto t\sin(\omega_0t)+\sin^2(\omega_0t).$$

这样当外源 $\sin(\omega_0t)$一直存在时，随着 $t\to\infty$，$u_z\propto t\to\infty$. 它表示沿磁力线方向上流体元的扰动幅度将随时间而不断增大，也即通过吸收阿尔文波的能量增大了磁流体元的动能，然后又通过其他的各种效应（包括碰撞、朗道阻尼、相混以及模转换后阻尼、湍流黏性等线性和非线性机制）而转变成热能，从而达到了通过外加阿尔文波来加热（而且是对所加热的磁面位置有选择地加热）磁流体的目的.

本章的部分内容取自中国科学技术大学陈激教授在美国期间，从 Hasegawa 教授处获赠的 Akira Hasegawa，*The Alfvén Wave*，Chanchal Uberoi，Indian Institute of Science，1982，以及朱士尧教授从美国 University of Wisconsin-Madison 带回国的该校博士论文 Cynthia Elizabeth Kieras，*Shear Alfvén Waves in Tokamak*，1982.

参 考 文 献

[1] Almaguer J A. Physics of Fluids, **B4**(1992)3443

[2] Landau L D, Lifshitz E M. Mechanics, 3rd edition. Pergamon Press, Oxford, 1976. § 39

[3] Akira Hasegawa. The Alfvén Wave. Chanchal Uberoi, Indian Institute of Science, 1982

[4] C. M. 本德，S. A. 奥斯扎戈. 高等应用数学方法. 北京：科学出版社，1992. 72，80

[5] Cynthia Elizabeth Kieras. Shear Alfvén Waves in Tokamak. Doctoral Thesis, University of Wisconsin-Madison, 1982

第四章　磁流体力学不稳定性

4.1　概　　论

4.1.1　现象、分类、基本描述方法

1. 现象

一个磁流体体系在达到平衡态后仍可以有偏离平衡值的扰动存在. 对处在热平衡态附近的磁流体体系来说这种扰动一般是局部的、无规的、随生随灭的，其扰动幅度在热涨落的水平如上一章所讨论的磁流体波. 但当磁流体处在非热力学平衡态，其内部存在着可以转换成扰动能量的自由能时，在合适的条件下有些扰动就可能发展成为在大范围、长时间、能量超过热噪声水平的大幅度集体运动. 这种集体运动就称为不稳定的模式，相应现象就称为磁流体的不稳定性. 下面是几种典型的磁流体不稳定模式.

例 1. 瑞利-泰勒(Rayleigh-Taylor)不稳定性(图 4.1)；

例 2. 开尔文-亥姆霍兹(Kelvin-Helmholtz)不稳定性(图 4.2)；

例 3. 腊肠型不稳定性(图 4.3)；

例 4. 弯曲型不稳定性(图 4.4)；

例 5. 磁岛(图 4.5)；

例 6. 磁重联(图 4.6).

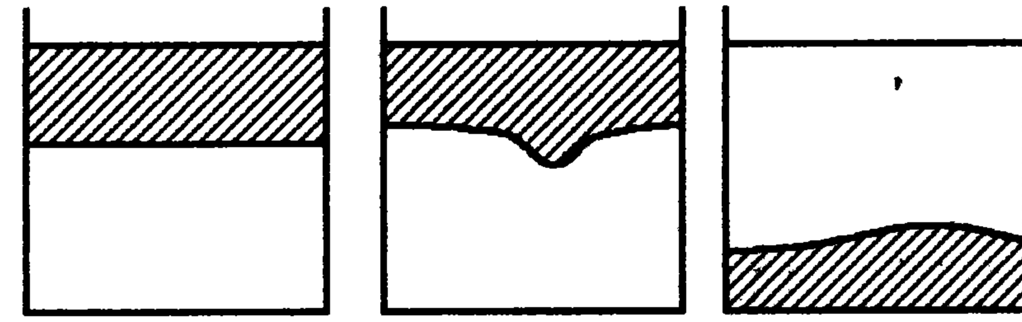


图 4.1　瑞利-泰勒不稳定性

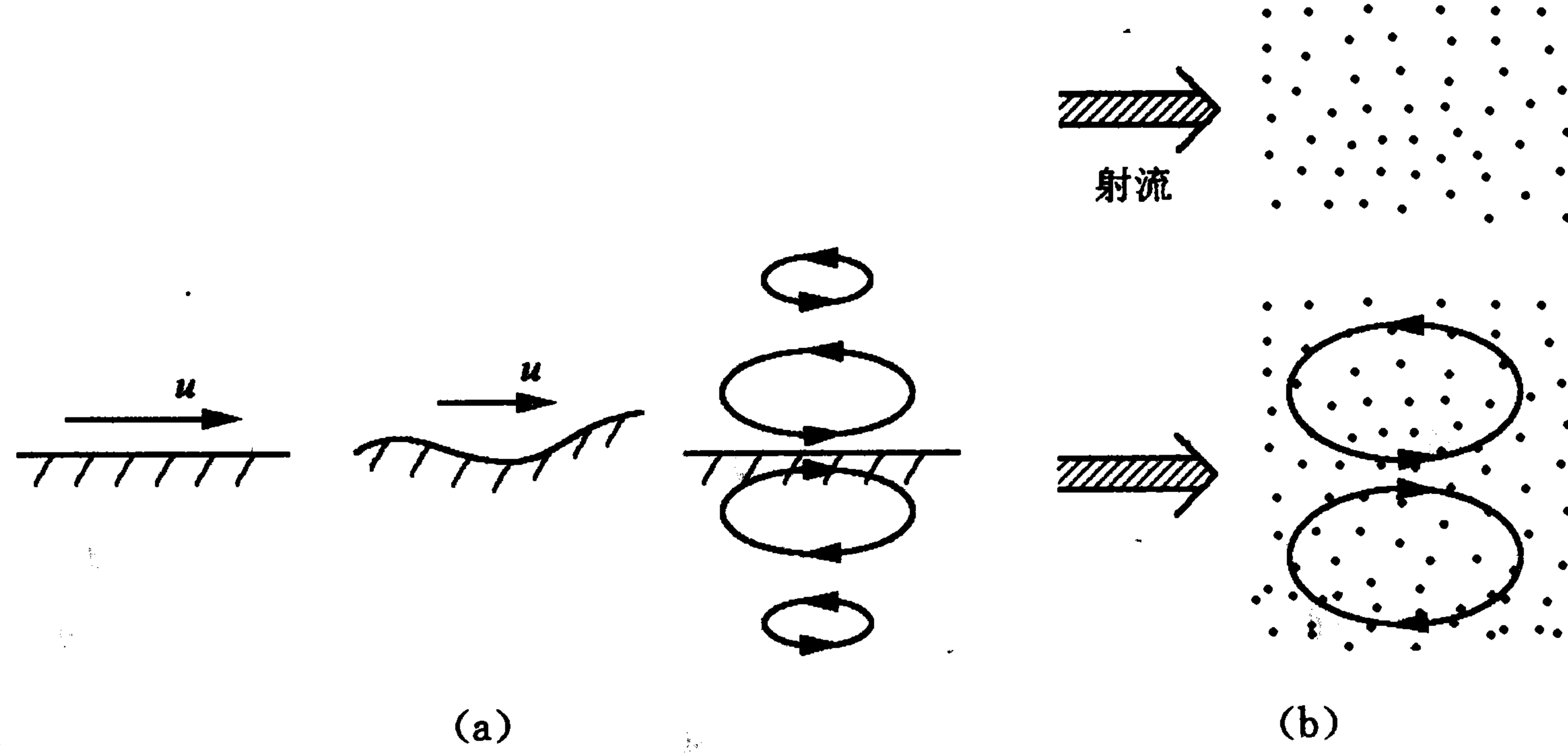


图 4.2　开尔文-亥姆霍兹不稳定性

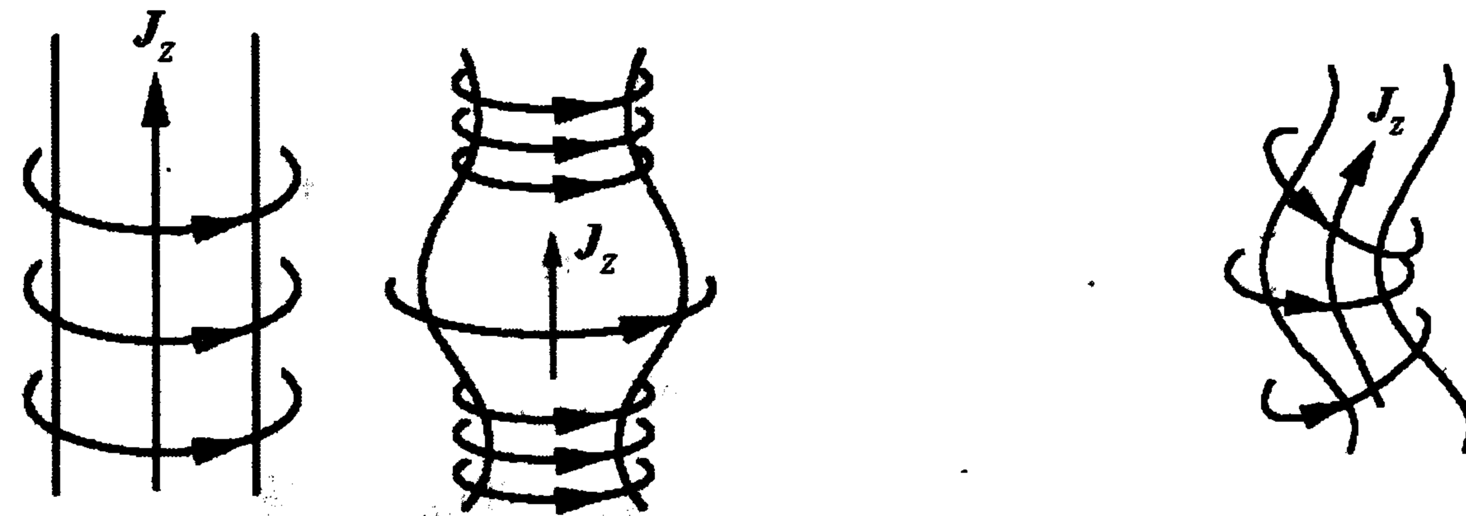


图 4.3　腊肠型不稳定性　　图 4.4　弯曲型不稳定性

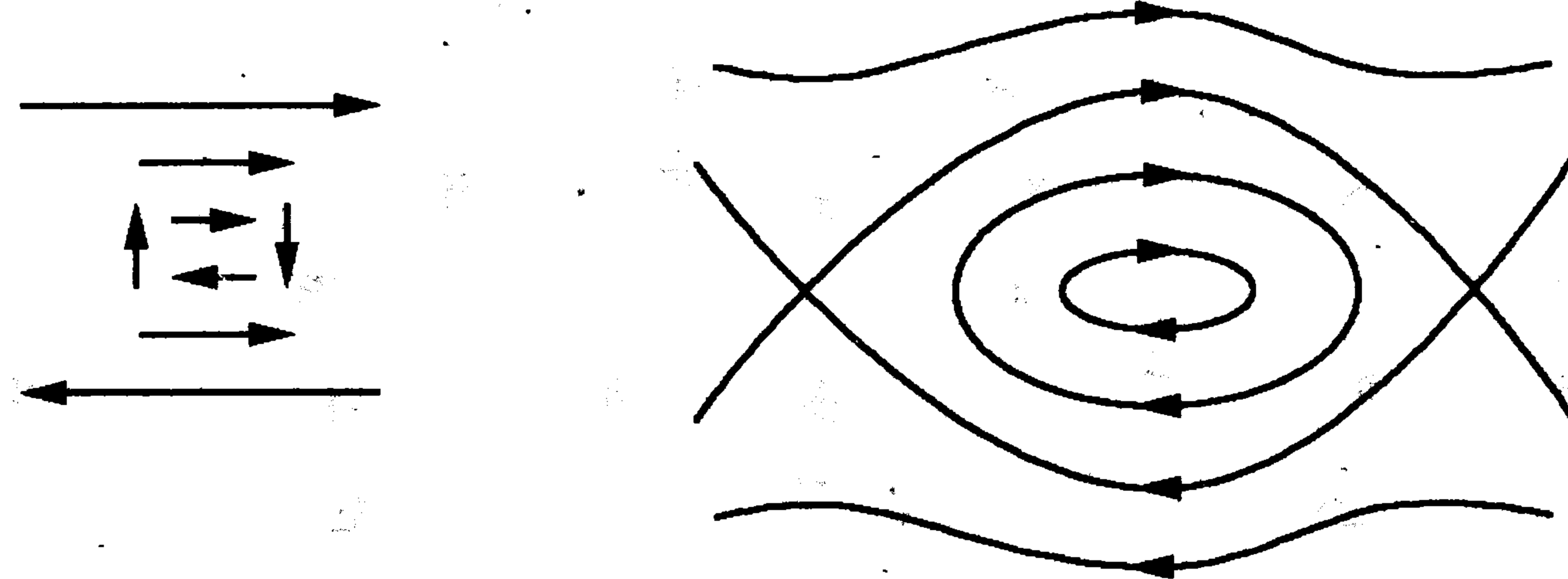


图 4.5　磁岛

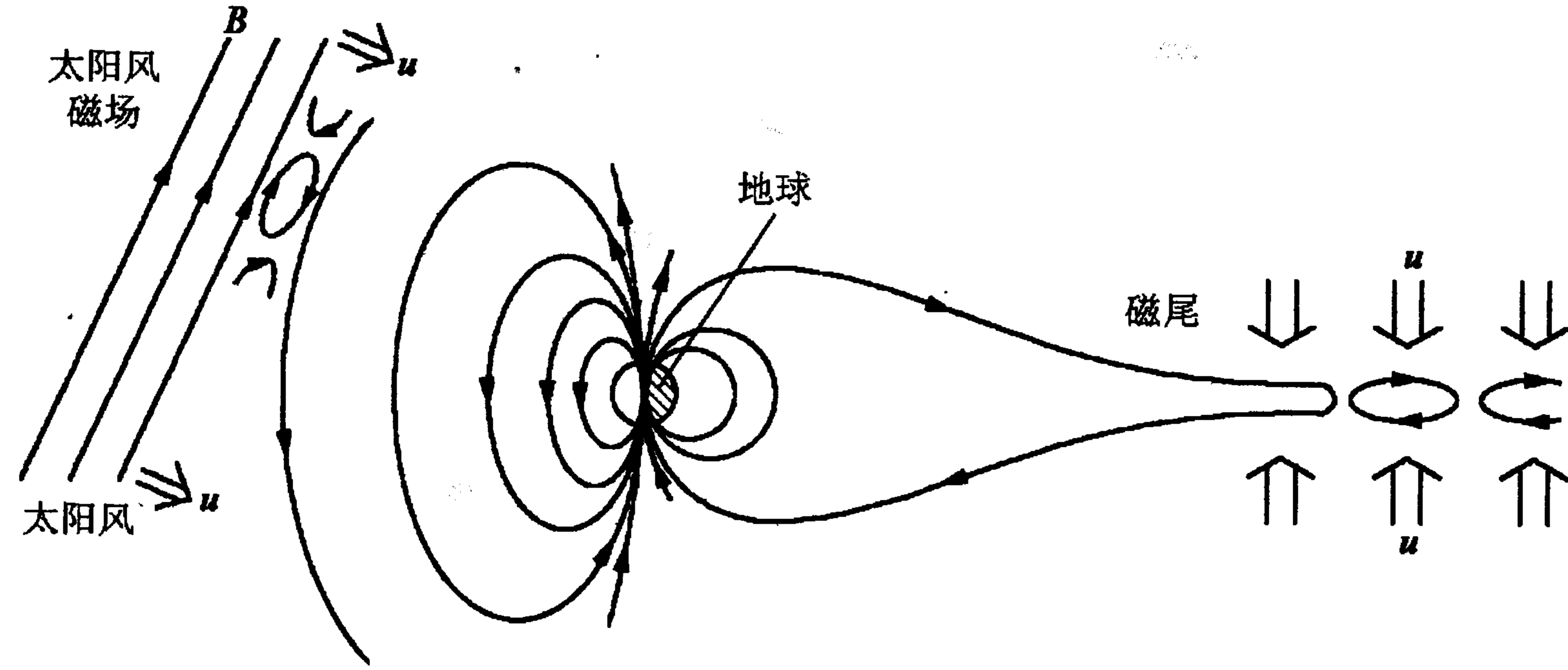


图 4.6 磁重联

2. 等离子体不稳定性的分类、驱动自由能及一般演化过程

按照扰动的空间与时间的特征尺度,一般将不稳定性分成两大类:宏观(3 维坐标空间($\boldsymbol{r}$))不稳定性和微观(6 维相空间($\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{v}$))不稳定性. 而宏观不稳定又分为:(理想的和非理想的)磁流体不稳定性和双流体不稳定性.

驱动磁流体不稳定性的主要自由能源有:压强梯度(也即垂直于磁场的电流),平行电流,平衡的流场(包括剪切的流场)等. 对电阻磁流体,电阻能使流体元和磁场相互扩散从而改变磁场的拓扑结构;如果这种改变使体系的磁能降低,则释放出来的磁能就成为一种自由能,可以最终驱动出一系列的电阻不稳定性.

驱动双流体不稳定性的主要自由能源是:垂直于磁场方向的等离子体密度、温度以及磁场的梯度和曲率,它们将引起带电流体元的漂移运动,向不稳定的扰动不断供应能量.

在微观不稳定性中被激发的都是一些等离子体的集体运动,也即等离子体波. 它们是由处在非平衡态的粒子系通过波-粒子共振相互作用把粒子系中的自由能传给波而驱动的. 另外,如果磁流体中已经存在具有一定幅度的某支波(可以是经线性不稳定发展起来的,也可以是从外源输入的),它也可以通过波-波直接耦合而把能量传给其他模式的等离子体波,从而驱动它们不稳定地发展.

每种不稳定的扰动在其演化过程中都会依次经历下面三个阶段:线性阶段、非线性阶段及饱和阶段. 在线性阶段,扰动的幅度较小,不同类型的扰动彼此之间并不相互作用,扰动对它所处的平衡态也无影响,这时扰动的幅度是随时间指数增长的. 在非线性阶段,扰动幅度增大到会反过来使原有的平衡量作一定调整(因此改变了自己得以不稳定增长的初始条件,使馈入的自由能量减少),并达到开始和其他扰动模式相互作用(从而彼此间交换能量)的程度,从而使增长率不断下降. 这时扰动幅度是依次随时间的不同幂次(一般是从高幂到低幂次)而增长的. 当时间的幂次最后降低到零时,就达到了演化的终点——扰动的幅度不再随时间增加,而一直保持极大值,这就是饱和. 本章只讨论磁流体的线性不稳定性.

3. 线性不稳定性的基本描述方法

(1) 简正模法

先将描述所研究对象的状态量写成平衡量(零级量)和扰动量(一级小量)之和,然后把它们代入所用的磁流体方程组,从中减去平衡方程并略去二级小量就得到了线性化的方程组. 对这些方程作(时间)拉氏变换和(空间)傅氏变换 $A(\boldsymbol{r},t)=A_{\omega,k}\exp(\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\mathrm{i}\omega t)$后可能出现下列几种情况:

(i) 全部空间坐标都能进行傅氏变换. 这样线性微分方程组就变成了线性的齐次代数方程组,它的有非平凡解的条件(系数行列式为零)就给出了关于 $\omega=\omega(k)$的色散关系. 例如上一章中平板几何位形下的阿尔文波的色散关系正是由这种方式得到的.

(ii) 只有部分空间坐标能进行傅氏变换,剩余的坐标构成了约化的微分方程组. 这时要设法先得到它的通解,然后利用边条件或连接条件也可以得到 $\omega=\omega(k)$的色散关系. 例如上一章中,柱坐标下阿尔文波的色散关系就是这样求得的.

(iii) 所得出的约化微分方程如果是奇异的,如上一章中连续谱阿尔文波所满足的方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[f(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right]\psi - g(x)\psi = 0,$$

它有非平凡解的条件是 $f(x_0)=0$，由此可得出连续谱阿尔文波的色散关系.

在得到了色散关系后，如果复数频率的虚部 $\mathrm{Im}\omega>0$，相应的波(集体运动模式)就是随时间指数增长的，也即成为不稳定的波；如果 $\mathrm{Im}\omega=0$，则相应的波是幅度不随时间变化的普通稳定波；而当 $\mathrm{Im}\omega<0$ 时，这波就是所谓的阻尼波. 这种简正模的方法通过求出复频率的值，不但能判断是否存在不稳定性，而且还能给出不稳定的线性增长率(例如瑞利-泰勒不稳定性及开尔文-亥姆霍兹不稳定性的描述，但本章将不讨论这两种不稳定性，请参考文献[1]和[2]).

简正模方法的主要缺点是，对于许多比较复杂的磁场位形和非均匀的磁流体(如电流、磁场、压强的各种空间分布剖面)情况，线性方程不可能一一严格求解，因而色散关系也无法得出. 这时连不稳定模是否存在都无法由简正模方法得到，于是它的可用范围受到很大的限制. 下面介绍的能量原理对于比较实际的磁流体就有较好的适应性. 但如果连能量原理也无能为力时，则往往还需要回到简正模方法来设法进行讨论(如对于非理想磁流体的一些不稳定模式的讨论).

(2) 能量原理(仅对理想磁流体适用)

利用理想磁流体体系的保守系性质，其总能量(动能加势能)守恒：$H=K+W=$常数，因此其扰动能满足

$$\delta H = \delta K + \delta W = 0.$$

当扰动使动能增加 $\delta K>0$ 时，则扰动使势能减少 $\delta W<0$；这时体系趋向不稳定(整个体系从高势能态向低势能态演化，而扰动动能不断增大). 而当 $\delta K<0$ 时，$\delta W>0$；这时体系是稳定的(在扰动下体系势能从低能态向高能态变化，同时扰动动能不断减少). 因此完全可以通过扰动势能 δW 的符号来判断磁流体体系在受到偏离

平衡的扰动时是否能保持稳定. 这种方法就称为能量原理，它的优点是：

(i) 在判断体系对某种扰动的稳定性时只要估计 δW 的符号，使计算大为简化. 尤其对难于求得色散关系的、比较复杂的磁场位形和非均匀磁流体情况，往往用能量原理可以得出解析结果或容易作数值估算的半解析结果.

(ii) 通过改写势能 δW 的表达式，比较容易形象地分辨出产生不稳的或致稳的各种物理因素，帮助我们建成相应的物理图像.

能量原理的缺点是：扰动势能 δW 的求值依赖于所选的试探函数形式，并且无法直接得到不稳定的增长率(或稳定扰动的波频).

(3) 作为初值(时间演化)问题求数值解

给定初始扰动的形式，然后数值求解这些扰动所满足的磁流体力学演化方程组，从而得出任何类型(包括未知类型)不稳定性的线性及非线性演化过程. 这是以上方法都无法比拟的. 它的缺点在于为了判定磁流体的稳定性而包括了过多的信息量，从而涉及大型数值计算，并且所得的每个结果只对应了参数空间的一点，其普遍性不如上面两种方法，其物理图像也不如上述方法明晰.

4.1.2 理想磁流体的线性扰动基本方程组及 $\boldsymbol{F}$ 算子

1. 线性方程组

从理想磁流体方程组出发：

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\boldsymbol{u}) = 0,$$

$$\rho\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t} \equiv \rho\left(\frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{u}\cdot\nabla\right)\boldsymbol{u} = -\nabla P + \boldsymbol{J}\times\boldsymbol{B},$$

$$P\rho^{-\gamma} = \text{时、空常数},$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = \nabla \times (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{B}),$$

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{J}.$$

取平衡(零阶)解为

$$\boldsymbol{u}_0 = 0, \quad \nabla P_0 = \boldsymbol{J}_0 \times \boldsymbol{B}_0, \quad P_0 \rho_0^{-\gamma} = \text{时、空常数}.$$

然后令

$$\rho = \rho_0 + \rho_1, \quad P = P_0 + P_1,$$

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}_0 + \boldsymbol{B}_1, \quad \boldsymbol{J} = \boldsymbol{J}_0 + \boldsymbol{J}_1, \quad \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_1.$$

代入上面的方程组后,可得一阶线性方程组

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_0 \boldsymbol{u}_1) = 0, \tag{4.1}$$

$$\rho_0 \frac{\partial \boldsymbol{u}_1}{\partial t} = -\nabla P_1 + \boldsymbol{J}_0 \times \boldsymbol{B}_1 + \boldsymbol{J}_1 \times \boldsymbol{B}_0, \tag{4.2}$$

$$P_1 = \frac{\gamma P_0}{\rho_0} \rho_1, \tag{4.3}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}_1}{\partial t} = \nabla \times (\boldsymbol{u}_1 \times \boldsymbol{B}_0), \tag{4.4}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{B}_1 = \mu \boldsymbol{J}_1. \tag{4.5}$$

消掉其中的 P_1 和 $\boldsymbol{J}_1$ 后,上述方程可约化成一个七元(由 7 个独立标量 $\rho_1, \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{B}_1$ 组成)的一阶线性微分方程组,而且如果不作进一步的近似,它也不能再约化了.对这个方程组的进一步讨论本书不再介绍(请参考文献[3]).下面要介绍的是将上述方程组化成一个三元二阶方程组的推导过程.

令扰动所造成的位置移动矢量 $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0$($\boldsymbol{r}_0$ 是流体元的平衡位置)为一阶小量,则有

$$\boldsymbol{u}_1 = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial t} + \boldsymbol{u}_1 \cdot \nabla \boldsymbol{\xi} \approx \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial t},$$

其中已经略去了二阶小量.这样上面的(4.1)、(4.4)两方程可以直接积分.首先从(4.3)式将 $\rho_1 = \rho_0 P_1 / \gamma P_0$ 代入(4.1)式后得

$$\frac{\partial P_1}{\partial t} = -\frac{\gamma P_0}{\rho_0} \nabla \cdot \left(\rho_0 \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial t} \right),$$

$$P_1 = -\frac{\gamma P_0}{\rho_0} \nabla \cdot (\rho_0 \boldsymbol{\xi})$$

$$= -\gamma P_0 \nabla \cdot \boldsymbol{\xi} - \frac{\gamma P_0}{\rho_0} \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla \rho_0.$$

利用

$$\nabla P_0 \rho_0^{-\gamma} = 0, \quad \Rightarrow \quad \nabla \rho_0 = \frac{\rho_0}{\gamma P_0} \nabla P_0.$$

代入上式后,最后得到

$$P_1 = -\gamma P_0 \nabla \cdot \boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla P_0. \tag{4.6}$$

再由(4.4)式的直接积分可直接得出

$$\boldsymbol{B}_1 = \nabla \times (\boldsymbol{\xi} \times \boldsymbol{B}_0). \tag{4.7}$$

然后将式(4.6)及(4.7)代入(4.2),得

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{\xi}}{\partial t^2} = -\nabla P_1 + \frac{1}{\mu} [(\nabla \times \boldsymbol{B}_0) \times \boldsymbol{B}_1 + (\nabla \times \boldsymbol{B}_1) \times \boldsymbol{B}_0]$$

$$= \nabla(\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla P_0 + \gamma P_0 \nabla \cdot \boldsymbol{\xi}) + \frac{1}{\mu} [(\nabla \times \boldsymbol{B}_0) \times (\nabla \times (\boldsymbol{\xi} \times \boldsymbol{B}_0)) + (\nabla \times (\nabla \times (\boldsymbol{\xi} \times \boldsymbol{B}_0))) \times \boldsymbol{B}_0].$$

通常把上面的线性化二阶方程组简写成

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{\xi}}{\partial t^2} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{\xi}), \tag{4.8}$$

其中的 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\xi}) = \mathscr{F} \cdot \boldsymbol{\xi}$ 是一个关于 $\boldsymbol{\xi}$ 的矢量算子,而 $\mathscr{F}$ 则是一个线性二阶微分的二阶张量算子.除了上面的复杂表达式外,它还可以有多种简化表达方式,如

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\xi}) = -\nabla P_1 + \frac{1}{\mu} [(\nabla \times \boldsymbol{B}_0) \times \boldsymbol{B}_1 + (\nabla \times \boldsymbol{B}_1) \times \boldsymbol{B}_0] \tag{4.9}$$

$$= -\nabla \tilde{P}_1 + \frac{1}{\mu} (\boldsymbol{B}_0 \cdot \nabla) \boldsymbol{B}_1 + \frac{1}{\mu} (\boldsymbol{B}_1 \cdot \nabla) \boldsymbol{B}_0, \tag{4.10}$$

而其中的 $P_1, \boldsymbol{B}_1$ 分别通过(4.6)、(4.7)式和 $\boldsymbol{\xi}$ 相连系.上式中的

$$\tilde{P}_1 = P_1 + \frac{\boldsymbol{B}_0 \cdot \boldsymbol{B}_1}{\mu}, \tag{4.11}$$

则表示总的扰动(热 + 磁)压强.

如果给出了流体元位置的初始偏移 $\boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{r},0)$，初始扰动速度 $\boldsymbol{u}_1(\boldsymbol{r},0)=\partial\boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{r},t)/\partial t|_{t=0}$及合适的边界条件后，就可以求出以后任何时刻的解 $\boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{r},t)$乃至所有的磁流体扰动量 $\rho_1,\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{B}_1$. 这就是线性稳定性的初值问题.

而如果只给出边界(或连接)条件，则可以用简正模(本征值)或能量原理的处理方法来求解上述方程组. 在简正(本征)模问题中，一般令所有扰动量 $A_1(t)$取下面的时间行为

$$A_1(\boldsymbol{r},t)=A_\omega(\boldsymbol{r})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}.$$

这时，上面的运动方程变成

$$-\omega^2\rho_0\boldsymbol{\xi}_\omega(\boldsymbol{r})=\mathscr{F}\cdot\boldsymbol{\xi}_\omega(\boldsymbol{r});$$

由于 $\boldsymbol{F}$ 是线性算子，故上式还可以写成齐次二阶微分方程

$$[\mathscr{F}\cdot+\omega^2\rho_0]\boldsymbol{\xi}_\omega(\boldsymbol{r})=0.$$

在给定边条件后，此方程有非平凡解的必要条件就是色散关系 $\omega=\omega(k)$. 以上两种方法本书都不再介绍，下面要重点介绍的是能量原理.

2. *F* 算子的自伴性

所谓算子的自伴性是指，对任意的矢量场 $\boldsymbol{\xi}$ 和 $\boldsymbol{\eta}$，自伴算子 $\boldsymbol{F}$ 必须满足等式

$$\int\boldsymbol{\eta}\cdot\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\xi})\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\eta})\mathrm{d}\boldsymbol{r}. \tag{4.12}$$

下面是伯恩斯坦(Bernstein)(1958 年) 给出的一种比较简单的证明，但它只对无穷大的磁流体体系才适用.

(1) 无穷大磁流体体系

这时在边界处的平衡量及扰动量都可以视作零，因此理想磁流体体系的哈密顿量(也即第一章中的总能量)完全由下面的体积分给出

$$H=\int\mathrm{d}\boldsymbol{r}\left(\frac{1}{2}\rho u^2+\frac{B^2}{2\mu}+\frac{P}{\gamma-1}\right)\doteq K+W,$$

$$K=\int\mathrm{d}\boldsymbol{r}\,\frac{1}{2}\rho u^2,$$

$$W=\int\mathrm{d}\boldsymbol{r}\left(\frac{B^2}{2\mu}+\frac{P}{\gamma-1}\right).$$

其中 K 是总动能，而 W 则是总势能. 取平衡量 $\boldsymbol{u}_0=0$，并令

$$\rho=\rho_0+\rho_1,\quad P=P_0+P_1,\quad \boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}_1,\quad \boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}_0+\boldsymbol{B}_1.$$

假定其中各扰动量为一阶小量，按上节的规定分别表示为

$$\rho_1=-\nabla\cdot(\rho_0\boldsymbol{\xi}),$$

$$P_1=-\boldsymbol{\xi}\cdot\nabla P_0-\gamma P_0\nabla\cdot\boldsymbol{\xi},$$

$$\boldsymbol{B}_1=\nabla\times(\boldsymbol{\xi}\times\boldsymbol{B}_0).$$

把它们代入哈密顿量后，可按小量把总能量分阶. 由于 $\boldsymbol{u}_0=0$，动能的最低阶(即扰动动能)为二阶

$$K_2=\int\mathrm{d}\boldsymbol{r}\left(\frac{1}{2}\rho_0u_1^2\right).$$

故势能及总能也要展开到二阶

$$W=W_0+\delta W_1+\delta W_2,$$

$$H=H_0+H_1+H_2,$$

$$H_0=W_0,$$

$$H_1=\delta W_1,$$

$$H_2=K_2+\delta W_2.$$

显然

$$W_0=\int\mathrm{d}\boldsymbol{r}\left(\frac{B_0^2}{2\mu}+\frac{P_0}{\gamma-1}\right)=\text{常数},$$

故 $\dot{W}_0=0$，于是

$$\frac{\partial W}{\partial t}=\int\mathrm{d}\boldsymbol{r}\left(\frac{1}{\mu}\boldsymbol{B}\cdot\dot{\boldsymbol{B}}+\frac{1}{\gamma-1}\dot{P}\right).$$

其中

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B}\cdot\dot{\boldsymbol{B}}&=-\boldsymbol{B}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{E})=\boldsymbol{B}\cdot\nabla\times(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B})\\&=(\boldsymbol{B}_0+\boldsymbol{B}_1)\cdot[\nabla\times(\boldsymbol{u}_1\times\boldsymbol{B}_0)+\nabla\times(\boldsymbol{u}_1\times\boldsymbol{B}_1)]\\&=\boldsymbol{B}_0\cdot\nabla\times(\boldsymbol{u}_1\times\boldsymbol{B}_0)+\boldsymbol{B}_1\cdot\nabla\times(\boldsymbol{u}_1\times\boldsymbol{B}_0)\\&\quad+\boldsymbol{B}_0\cdot\nabla\times(\boldsymbol{u}_1\times\boldsymbol{B}_1).\end{aligned}$$

这个表达式中的一阶量是

$$(\boldsymbol{B}\cdot\dot{\boldsymbol{B}})_1=\boldsymbol{B}_0\cdot\nabla\times(\boldsymbol{u}_1\times\boldsymbol{B}_0)$$
$$=\boldsymbol{B}_0\cdot\nabla\times\left(\frac{\partial\boldsymbol{\xi}}{\partial t}\times\boldsymbol{B}_0\right)=\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{B}_0\cdot\boldsymbol{B}_1),$$

而二阶量为

$$(\boldsymbol{B}\cdot\dot{\boldsymbol{B}})_2=\boldsymbol{B}_1\cdot\nabla\times\left(\frac{\partial\boldsymbol{\xi}}{\partial t}\times\boldsymbol{B}_0\right)+\boldsymbol{B}_0\cdot\nabla\times\left(\frac{\partial\boldsymbol{\xi}}{\partial t}\times\boldsymbol{B}_1\right)$$
$$=\boldsymbol{B}_1\cdot\dot{\boldsymbol{B}}_1+\boldsymbol{B}_0\cdot\dot{\boldsymbol{B}}_2,$$

其中已令

$$\dot{\boldsymbol{B}}_2=\nabla\times\left(\frac{\partial\boldsymbol{\xi}}{\partial t}\times\boldsymbol{B}_1\right).\tag{4.13}$$

应当注意:这是 $\dot{\boldsymbol{B}}_2$ 的定义而不是 $\boldsymbol{B}_2$ 的定义.同样由 $P=P_0\rho_0^{-\gamma}\rho^{\gamma}$ 可得

$$\frac{\partial P}{\partial t}=\frac{\gamma P_0}{\rho_0^{\gamma}}\rho^{\gamma-1}\frac{\partial\rho}{\partial t}.$$

再将连续性方程 $\partial\rho/\partial t=-\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{u})=-[\nabla\rho\cdot\boldsymbol{u}+\rho\nabla\cdot\boldsymbol{u}]$代入,并利用

$$\nabla(P\rho^{-\gamma})=0,\quad\Rightarrow\quad\nabla\rho=\frac{\rho}{\gamma P}\nabla P,$$

有

$$\dot{P}=-\frac{\gamma P_0}{\rho_0^{\gamma}}\rho^{\gamma-1}\left[\frac{\rho}{\gamma P}\nabla P\cdot\boldsymbol{u}+\rho\nabla\cdot\boldsymbol{u}\right]$$
$$=-\boldsymbol{u}\cdot\nabla P-\gamma P\nabla\cdot\boldsymbol{u}.$$

将它按小参量展开

$$\dot{P}=(-\boldsymbol{u}_1\cdot\nabla P_0-\gamma P_0\nabla\cdot\boldsymbol{u}_1)+(-\boldsymbol{u}_1\cdot\nabla P_1-\gamma P_1\nabla\cdot\boldsymbol{u}_1)$$
$$=\frac{\partial}{\partial t}P_1+\dot{P}_2=\dot{P}_1+\dot{P}_2.$$

其中定义

$$\dot{P}_2=-\frac{\partial\boldsymbol{\xi}}{\partial t}\cdot\nabla P_1-\gamma P_1\nabla\cdot\frac{\partial\boldsymbol{\xi}}{\partial t},\tag{4.14}$$

所以

$$\frac{\partial W}{\partial t}=\frac{\partial\delta W_1}{\partial t}+\frac{\partial\delta W_2}{\partial t}=\delta\dot{W}_1+\delta\dot{W}_2.$$

其中一阶小量为

$$\delta\dot{W}_1=\int\mathrm{d}\boldsymbol{r}\left(\frac{\boldsymbol{B}_0\cdot\dot{\boldsymbol{B}}_1}{\mu}+\frac{\dot{P}_1}{\gamma-1}\right),$$

故可以得到

$$\delta W_1=\int\mathrm{d}\boldsymbol{r}\left(\frac{\boldsymbol{B}_0\cdot\boldsymbol{B}_1}{\mu}+\frac{P_1}{\gamma-1}\right).$$

而二阶量为

$$\delta\dot{W}_2=\int\mathrm{d}\boldsymbol{r}\left(\frac{\boldsymbol{B}_1\cdot\dot{\boldsymbol{B}}_1}{\mu}+\frac{\boldsymbol{B}_0\cdot\dot{\boldsymbol{B}}_2}{\mu}+\frac{\dot{P}_2}{\gamma-1}\right),\tag{4.15}$$

所以形式上可以写出(但要注意:其中的 $\boldsymbol{B}_2$ 和 P_2 并无明显定义式)

$$\delta W_2=\int\mathrm{d}\boldsymbol{r}\left(\frac{B_1^2}{2\mu}+\frac{\boldsymbol{B}_0\cdot\boldsymbol{B}_2}{\mu}+\frac{P_2}{\gamma-1}\right).$$

从 $\delta\dot{W}_2$ 被积函数的第一项

$$\boldsymbol{B}_1\cdot\dot{\boldsymbol{B}}_1=\nabla\times(\boldsymbol{\xi}\times\boldsymbol{B}_0)\cdot\nabla\times(\dot{\boldsymbol{\xi}}\times\boldsymbol{B}_0),$$

可以把它对应的积分,在形式上写成

$$\delta\dot{W}_2^{\mathrm{I}}=\delta W^{\mathrm{I}}(\boldsymbol{\xi},\dot{\boldsymbol{\xi}}).$$

而对应于被积函数第二项

$$\boldsymbol{B}_0\cdot\dot{\boldsymbol{B}}_2=\boldsymbol{B}_0\cdot\nabla\times(\dot{\boldsymbol{\xi}}\times\boldsymbol{B}_1)=\boldsymbol{B}_0\cdot\nabla\times[\dot{\boldsymbol{\xi}}\times\nabla\times(\boldsymbol{\xi}\times\boldsymbol{B}_0)]$$

的积分则可写成

$$\delta\dot{W}_2^{\mathrm{II}}=\delta W^{\mathrm{II}}(\dot{\boldsymbol{\xi}},\boldsymbol{\xi}).$$

被积函数的第三项为

$$\dot{P}_2=-\dot{\boldsymbol{\xi}}\cdot\nabla P_1-\gamma P_1\nabla\cdot\dot{\boldsymbol{\xi}},$$

考虑到 $P_1\propto\boldsymbol{\xi}$,故其相应的积分形式上可写成

$$\delta\dot{W}_2^{\mathrm{III}}=\delta W^{\mathrm{III}}(\dot{\boldsymbol{\xi}},\boldsymbol{\xi})+\delta W^{\mathrm{IV}}(\boldsymbol{\xi},\dot{\boldsymbol{\xi}}).$$

由于所有的 $\delta W^{\alpha}(\alpha=\mathrm{I},\mathrm{II},\cdots,\mathrm{IV})$ 中只含有一个 ξ 及一个 $\dot{\xi}$，因此可以合理地将总的二阶扰动势能写作

$$\delta W_2=\delta W_2(\xi,\xi). \tag{4.16}$$

这样在对它求微商时，才会有一半的导数作用在 (ξ,ξ) 的第一个 ξ 上（即产生形如 $\delta\dot{W}^{\mathrm{II}}$，$\delta\dot{W}^{\mathrm{III}}$ 的项），而另一半的导数则作用在后一个 ξ 上（产生形如 $\delta\dot{W}^{\mathrm{I}}$，$\delta\dot{W}^{\mathrm{IV}}$ 的项）.

下一步是证明一阶哈密顿量是守恒量（显然 $\dot{H}_0=\dot{W}_0=0$），即

$$\dot{H}_1=\delta\dot{W}_1=0.$$

首先将 δW_1 中的被积函数作以下的变化

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{B}_0\cdot\dot{\boldsymbol{B}}_1+\frac{1}{\gamma-1}\dot{P}_1\\
&=\boldsymbol{B}_0\cdot[\nabla\times(\boldsymbol{u}_1\times\boldsymbol{B}_0)]-\frac{1}{\gamma-1}\boldsymbol{u}_1\cdot\nabla P_0-\frac{\gamma}{\gamma-1}P_0\nabla\cdot\boldsymbol{u}_1\\
&=\boldsymbol{B}_0\cdot[\boldsymbol{u}_1(\nabla\cdot\boldsymbol{B}_0)-\boldsymbol{B}_0(\nabla\cdot\boldsymbol{u}_1)+(\boldsymbol{B}_0\cdot\nabla)\boldsymbol{u}_1-(\boldsymbol{u}_1\cdot\nabla)\boldsymbol{B}_0]\\
&\quad-\frac{\boldsymbol{u}_1\cdot\nabla P_0}{\gamma-1}-\frac{\gamma}{\gamma-1}P_0\nabla\cdot\boldsymbol{u}_1\\
&=-\left(\frac{B_0^2}{2}+\frac{P_0}{\gamma-1}\right)\nabla\cdot\boldsymbol{u}_1-\left(\frac{B_0^2}{2}+P_0\right)\nabla\cdot\boldsymbol{u}_1\\
&\quad-\boldsymbol{u}_1\cdot\nabla\left(\frac{B_0^2}{2}+\frac{P_0}{\gamma-1}\right)+\boldsymbol{B}_0(\boldsymbol{B}_0\cdot\nabla)\boldsymbol{u}_1\\
&=-\nabla\cdot\left[\left(\frac{B_0^2}{2}+\frac{P_0}{\gamma-1}\right)\boldsymbol{u}_1\right]-\left(\frac{B_0^2}{2}+P_0\right)\nabla\cdot\boldsymbol{u}_1\\
&\quad+(\boldsymbol{B}_0\boldsymbol{B}_0)\cdot\nabla\boldsymbol{u}_1.
\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}
\dot{H}_1&=-\int\nabla\cdot\left[\left(\frac{B_0^2}{2}+\frac{P_0}{\gamma-1}\right)\boldsymbol{u}_1\right]\mathrm{d}\boldsymbol{r}-\int\left(\frac{B_0^2}{2}+P_0\right)\nabla\cdot\boldsymbol{u}_1\mathrm{d}\boldsymbol{r}\\
&\quad+\int(\boldsymbol{B}_0\boldsymbol{B}_0)\cdot\nabla\boldsymbol{u}_1\mathrm{d}\boldsymbol{r}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&=\oint\left(\frac{B_0^2}{2}+\frac{P_0}{\gamma-1}\right)\boldsymbol{u}_1\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}-\left(\frac{B_0^2}{2}+P_0\right)\boldsymbol{u}_1\bigg|_S\\
&\quad+\int\nabla\left(\frac{B_0^2}{2}+P_0\right)\cdot\boldsymbol{u}_1\mathrm{d}\boldsymbol{r}+\boldsymbol{B}_0\boldsymbol{B}_0\cdot\boldsymbol{e}_\alpha\boldsymbol{u}_1\bigg|_{S_\alpha}\\
&\quad-\int\boldsymbol{u}_1\cdot[\nabla\cdot(\boldsymbol{B}_0\boldsymbol{B}_0)]\mathrm{d}\boldsymbol{r}.
\end{aligned}$$

由于本问题处理的是无限大体系，故在边界表面 S 及端面 $S_\alpha(\alpha=1,2,3)$ 上的扰动量均为零（对有界的磁流体，这些项构成了表面扰动势能），结果

$$\begin{aligned}
\dot{H}_1&=\int\boldsymbol{u}_1\cdot\left\{\nabla\cdot\left[\left(\frac{B_0^2}{2}+P_0\right)\overleftrightarrow{I}-\boldsymbol{B}_0\boldsymbol{B}_0\right]\right\}\mathrm{d}\boldsymbol{r}\\
&=\int\boldsymbol{u}_1\cdot\{\nabla\cdot\overleftrightarrow{T}_0\}\mathrm{d}\boldsymbol{r}=0,
\end{aligned}$$

其中已用到了平衡时的动量守恒定律 $\nabla\cdot\overleftrightarrow{T}_0=0$.

这样，由于理想磁流体体系是一个保守系，总哈密顿量（能量）守恒，其中零阶和一阶哈密顿量又分别守恒，所以（在准确到微扰展开的二阶）二阶的哈密顿量也应是守恒量

$$\dot{H}_2=0=\dot{K}_2+\delta\dot{W}_2.$$

其中

$$\dot{K}_2=\int\rho_0\frac{\partial\xi}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int\frac{\partial\xi}{\partial t}\cdot\boldsymbol{F}(\xi)\mathrm{d}\boldsymbol{r}.$$

由于

$$\delta\dot{W}_2=\delta\dot{W}_2(\xi,\xi)=\delta W_2(\dot{\xi},\xi)+\delta W_2(\xi,\dot{\xi}),$$

故有

$$\int\dot{\xi}\cdot\boldsymbol{F}(\xi)\mathrm{d}\boldsymbol{r}=-\delta W_2(\dot{\xi},\xi)-\delta W_2(\xi,\dot{\xi}).$$

交换 ξ 和 $\dot{\xi}$ 后

$$\int\xi\cdot\boldsymbol{F}(\dot{\xi})\mathrm{d}\boldsymbol{r}=-\delta W_2(\xi,\dot{\xi})-\delta W_2(\dot{\xi},\xi)$$

$$= \int \dot{\xi} \cdot \boldsymbol{F}(\dot{\xi}) \mathrm{d}\boldsymbol{r},$$

由此可知 $\boldsymbol{F}$ 是一个自伴算子. 而且当把上式中的 $\dot{\xi}$ 改成 ξ 时，上式就变成

$$\int \xi \cdot \boldsymbol{F}(\xi) \mathrm{d}\boldsymbol{r} = -\delta W_2(\xi,\xi) - \delta W_2(\xi,\xi),$$

这样还能得到二阶扰动势能的表达式

$$\delta W(\xi,\xi) \equiv \delta W_2(\xi,\xi) = -\frac{1}{2}\int \xi \cdot \boldsymbol{F}(\xi) \mathrm{d}\boldsymbol{r}. \qquad (4.17)$$

(2) 柱形磁流体体系

定义扰动磁流体体系的一个状态函数

$$H(t) = \int_v \left[\frac{1}{2}\rho_0 \dot{\xi}^2(\boldsymbol{r},t) - \frac{1}{2}\xi(\boldsymbol{r},t) \cdot \boldsymbol{F}(\xi(\boldsymbol{r},t))\right] \mathrm{d}\boldsymbol{r}.$$

其时间演化为

$$\dot{H}(t) = \int_v \left[\rho_0 \dot{\xi} \cdot \ddot{\xi} - \frac{1}{2}\dot{\xi} \cdot \boldsymbol{F}(\xi) - \frac{1}{2}\xi \cdot \boldsymbol{F}(\dot{\xi})\right] \mathrm{d}\boldsymbol{r}.$$

利用运动方程 $\rho_0 \ddot{\xi} = \boldsymbol{F}(\xi)$，可得

$$\dot{H} = \frac{1}{2}\int [\dot{\xi} \cdot \boldsymbol{F}(\xi) - \xi \cdot \boldsymbol{F}(\dot{\xi})] \mathrm{d}\boldsymbol{r}.$$

若能证明 $\dot{H}=0$，则显然可以得出以下结论：

——H 是一个守恒量，有扰动总能量的物理意义.

——$K = \int \frac{1}{2}\rho_0 \dot{\xi}^2 \mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 是扰动的动能.

——$\delta W = -\frac{1}{2}\int \xi \cdot \boldsymbol{F}(\xi) \mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 则是扰动造成的势能改变量.

而 $\dot{H}=0$ 的充要条件是，对任意的函数 ξ 及 $\dot{\xi}$，$\boldsymbol{F}$ 算子必须满足

$$\int \dot{\xi} \cdot \boldsymbol{F}(\xi) \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int \xi \cdot \boldsymbol{F}(\dot{\xi}) \mathrm{d}\boldsymbol{r},$$

即 $\boldsymbol{F}$ 是一个(Banach 空间)的自伴算子.

本节的目的是给出 $\boldsymbol{F}$ 自伴性的部分证明，并给出扰动势能的一些实用的表达式.

(i) 将扰动势能 δW 分成体积积分项 δW_F 和表面积分项 δW_a.

从 δW 的定义式(4.17)出发

$$\delta W = -\frac{1}{2}\int \xi \cdot \boldsymbol{F}(\xi) \mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

$$= -\frac{1}{2}\int \xi \cdot \left[-\nabla P_1 + \frac{1}{\mu}(\nabla \times \boldsymbol{B}_1) \times \boldsymbol{B}_0 + \boldsymbol{J}_0 \times \boldsymbol{B}_1\right] \mathrm{d}\boldsymbol{r},$$

下面要作的就是将上式诸项分成面积分项和剩余的体积分项. 上式被积函数第一项可化为

$$-\int \xi \cdot \nabla P_1 \mathrm{d}\boldsymbol{r} = -\oint P_1 \xi \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} + \int P_1(\nabla \cdot \xi) \mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

$$= \oint (\xi \cdot \nabla P_0 + \gamma P_0 \nabla \cdot \xi) \xi \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

$$- \int [(\xi \cdot \nabla P_0)(\nabla \cdot \xi) + \gamma P_0 (\nabla \cdot \xi)^2] \mathrm{d}\boldsymbol{r}.$$

而被积函数第二项可化成

$$\int \xi \cdot [(\nabla \times \boldsymbol{B}_1) \times \boldsymbol{B}_0] \mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

$$= \int (\nabla \times \boldsymbol{B}_1) \cdot (\boldsymbol{B}_0 \times \xi) \mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

$$= \int \nabla \cdot [\boldsymbol{B}_1 \times (\boldsymbol{B}_0 \times \xi)] \mathrm{d}\boldsymbol{r} + \int \boldsymbol{B}_1 \cdot \nabla \times (\boldsymbol{B}_0 \times \xi) \mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

$$= \oint [(\boldsymbol{B}_1 \cdot \xi)\boldsymbol{B}_0 - (\boldsymbol{B}_1 \cdot \boldsymbol{B}_0)\xi] \mathrm{d}\boldsymbol{S} - \int \boldsymbol{B}_1 \cdot \boldsymbol{B}_1 \mathrm{d}\boldsymbol{r}.$$

而最后一项

$$\int \frac{1}{\mu}\xi \cdot \boldsymbol{J}_0 \times \boldsymbol{B}_1 \mathrm{d}\boldsymbol{r} = -\int \frac{1}{\mu}\boldsymbol{J}_0 \cdot (\xi \times \boldsymbol{B}_1) \mathrm{d}\boldsymbol{r}.$$

所以 δW 的体积分项为

$$\delta W_F = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}\boldsymbol{r}\left[\frac{1}{\mu}|\boldsymbol{B}_1|^2 + \boldsymbol{J}_0 \cdot (\xi \times \boldsymbol{B}_1) + \gamma P_0 (\nabla \cdot \xi)^2 + (\xi \cdot \nabla P_0)(\nabla \cdot \xi)\right], \qquad (4.18)$$

表面积分项为

$$\delta W_a = -\frac{1}{2}\oint\Big[(\gamma P_0 \nabla\cdot\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\xi}\cdot\nabla P_0)\boldsymbol{\xi} + \frac{1}{\mu}(\boldsymbol{B}_1\cdot\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{B}_0 - (\boldsymbol{B}_1\cdot\boldsymbol{B}_0)\boldsymbol{\xi}\Big]\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}. \tag{4.19}$$

δW_F 的自伴性证明比较复杂,请参照文献[4]. 这里只给出 δW_a 的自伴性证明.

当磁流体表面被完全导电壳包围时,由壁的刚性可知 $\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{n}=0$ ($\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\mathrm{d}S\boldsymbol{n}$),也即 $\boldsymbol{\xi}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=0$,故显然有 $\delta W_a=0$(若磁流体为无穷大时,也有同样结果,如上节讨论的情况). 下面讨论的是 δW_a 不为零时的情况.(一般情况下的磁流体边界、连接条件请参考附录A)

(ii) 真空区方程,真空区在导电壳处的边条件.

一般实验室柱形等离子体的边界之外都有一层真空区,然后被一个导体壳包围. 在真空层中没有等离子体,故热压强 $P_v=0$. 但在真空区中仍然存在扰动磁场 $\boldsymbol{B}_v$,它满足方程

$$\nabla\cdot\mathbf{B}_v = 0,\quad \nabla\times\mathbf{B}_v = 0.$$

引进矢势 $\boldsymbol{A}$,令 $\boldsymbol{B}_v=\nabla\times\boldsymbol{A}$,则有二阶微分方程

$$\nabla\times(\nabla\times\mathbf{A}) = 0,$$

其外边界条件是真空-导电壳条件

$$\boldsymbol{n}_w\cdot\boldsymbol{B}_v = 0, \tag{4.20}$$

其中 $\boldsymbol{n}_w$ 是壳面的内法线方向矢量.

(iii) 真空区-磁流体界面的连接条件.

设真空区和磁流体的界面在柱半径 $\boldsymbol{r}_s$ 处,这时由平衡条件可以给出下面两个连接条件.

条件 1:界面两边的总(热+磁)压强相等

$$P(\boldsymbol{r}_s,t) + \frac{1}{2\mu}B^2(\boldsymbol{r}_s,t) = \frac{1}{2\mu}B_v^2(\boldsymbol{r}_s,t). \tag{4.21}$$

条件 2:界面也是磁面,故界面的法向方向 $\boldsymbol{n}$(从磁流体的位置来看)满足

$$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}_s,t) = \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{B}_v(\boldsymbol{r}_s,t) = 0. \tag{4.22}$$

应该指出,$\boldsymbol{r}_s$ 是扰动后的磁流体界面位置,因此上面连接条件中的 $\boldsymbol{B},\boldsymbol{B}_v,P$ 都是在扰动了的界面处的磁流体参量. 但另一方面,在 δW_a 中出现的量都是在未扰动平衡位置 r_0 处的量,所以下面要把连接条件中的量都用 $\boldsymbol{r}_0$ 处的值给出. 令

$$\boldsymbol{r}_s = \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{r}_0).$$

首先改写边条件 1,在展开到小参量一阶时,其中

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}_s,t)=\boldsymbol{B}_0(\boldsymbol{r}_s,t)+\boldsymbol{B}_1(\boldsymbol{r}_s,t)\approx\boldsymbol{B}_0(\boldsymbol{r}_0)+(\boldsymbol{\xi}\cdot\nabla)\boldsymbol{B}_0(\boldsymbol{r}_0)+\boldsymbol{B}_1(\boldsymbol{r}_0,t),$$

$$P(\boldsymbol{r}_s,t)\approx P_0(\boldsymbol{r}_0)+(\boldsymbol{\xi}\cdot\nabla)P_0(\boldsymbol{r}_0)+P_1(\boldsymbol{r}_0,t)=P_0-\gamma P_0(\nabla\cdot\boldsymbol{\xi}).$$

上式的推导中已代入了 P_1 的 $\boldsymbol{\xi}$ 表达式. 于是有

$$B^2(\boldsymbol{r}_s,t) = B_0^2 + 2\boldsymbol{B}_0\cdot(\boldsymbol{\xi}\cdot\nabla)\boldsymbol{B}_0 + 2\boldsymbol{B}_0\cdot\boldsymbol{B}_1.$$

再利用平衡方程

$$P_0(\boldsymbol{r}_0) + \frac{1}{2\mu}B_0^2(\boldsymbol{r}_0) = \frac{1}{2\mu}B_{v0}^2(\boldsymbol{r}_0),$$

则可以把条件 1 即(4.21)式写成在平衡位置 $\boldsymbol{r}_0$ 处的形式

$$-\mu\gamma P_0(\nabla\cdot\boldsymbol{\xi})+\boldsymbol{B}_0\cdot[\boldsymbol{B}_1+(\boldsymbol{\xi}\cdot\nabla)\boldsymbol{B}_0]=\boldsymbol{B}_v\cdot[\boldsymbol{B}_{v1}+(\boldsymbol{\xi}\cdot\nabla)\boldsymbol{B}_{v0}],$$

$$-\gamma P_0(\nabla\cdot\boldsymbol{\xi})+\frac{1}{\mu}\boldsymbol{B}_0\cdot\boldsymbol{B}_1=-\frac{1}{\mu}\boldsymbol{B}_0\cdot(\boldsymbol{\xi}\cdot\nabla)\boldsymbol{B}_0 + \frac{1}{\mu}\boldsymbol{B}_{v0}\cdot(\boldsymbol{\xi}\cdot\nabla)\boldsymbol{B}_{v0}+\frac{1}{\mu}\boldsymbol{B}_{v0}\cdot\boldsymbol{B}_{v1},$$

即

$$-\gamma P_0(\nabla\cdot\boldsymbol{\xi}) + \frac{1}{\mu}\boldsymbol{B}_0\cdot\boldsymbol{B}_1 = -\frac{1}{\mu}\Big[\frac{1}{2}(\boldsymbol{\xi}\cdot\nabla)(B_0^2 - B_{v0}^2) - \boldsymbol{B}_{v0}\cdot\boldsymbol{B}_{v1}\Big]. \tag{4.23}$$

其次来改写条件 2((4.22)式),令 $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{n}_0+\boldsymbol{n}_1$,可证在展开到一阶小量时

$$\boldsymbol{n}_1 = -(\nabla\boldsymbol{\xi})\cdot\boldsymbol{n}_0 + \boldsymbol{n}_0[\boldsymbol{n}_0\cdot(\nabla\boldsymbol{\xi})\cdot\boldsymbol{n}_0]. \tag{4.24}$$

此式的详细推导请参考附录B,或者文献[5]. 故条件 2 可写成

$$(\boldsymbol{n}_0 + \boldsymbol{n}_1)\cdot(\boldsymbol{B}_0(\boldsymbol{r}_0) + (\boldsymbol{\xi}\cdot\nabla)\boldsymbol{B}_0(\boldsymbol{r}_0) + \boldsymbol{B}_1(\boldsymbol{r}_0,t)) = 0.$$

以下略去所有 r_0 的下标"0",因为下面所有的量都取 r_0 处的值. 利用 $\boldsymbol{n}_0\cdot\boldsymbol{B}_0(\boldsymbol{r}_0)=0$,上式可写成

$$\boldsymbol{n}_0\cdot\boldsymbol{B}_1=-\boldsymbol{n}_0\cdot(\boldsymbol{\xi}\cdot\nabla)\boldsymbol{B}_0+\boldsymbol{n}_0\cdot(\boldsymbol{B}_0\cdot\nabla)\boldsymbol{\xi}$$
$$=\boldsymbol{n}_0\cdot[\nabla\times(\boldsymbol{\xi}\times\boldsymbol{B}_0)], \tag{4.25}$$

其中已用到了 $\boldsymbol{n}_0\cdot\boldsymbol{B}_0=0$ 及 $\nabla\cdot\boldsymbol{B}_0=0$. 同理有

$$\boldsymbol{n}_0\cdot\boldsymbol{B}_{v1}=\boldsymbol{n}_0\cdot[\nabla\times(\boldsymbol{\xi}\times\boldsymbol{B}_{v0})]. \tag{4.26}$$

式(4.25)在磁流体中和边界上成立是显然的(因为 $\boldsymbol{B}_1=\nabla\times(\boldsymbol{\xi}\times\boldsymbol{B}_0)$),但(4.26)式却不是显然的,因为在真空中 $\boldsymbol{\xi}=0$,不存在关系 $\boldsymbol{B}_{v1}=\nabla\times(\boldsymbol{\xi}\times\boldsymbol{B}_{v0})$,这个式子只有在界面上才成立. 在准确到一阶小量时,还可以把(4.25)、(4.26)式中的 $\boldsymbol{n}_0$ 用 $\boldsymbol{n}$ 直接替代而改写成

$$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{B}_1=\boldsymbol{n}\cdot[\nabla\times(\boldsymbol{\xi}\times\boldsymbol{B}_0)]_{r_0}, \tag{4.27}$$
$$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{B}_{v1}=\boldsymbol{n}\cdot[\nabla\times(\boldsymbol{\xi}\times\boldsymbol{B}_{v0})]_{r_0}. \tag{4.28}$$

由此而引起的误差是二阶小量. 进而利用 $\boldsymbol{B}_{v1}=\nabla\times\boldsymbol{A}_1$,可进一步把(4.28)式改写. 因为

$$\boldsymbol{n}\cdot\nabla\times\boldsymbol{A}_1\Big|_{r_0}=\boldsymbol{n}\cdot\nabla\times(\boldsymbol{\xi}\times\boldsymbol{B}_{v0})\Big|_{r_0},$$

因此在边界 $\boldsymbol{r}_0$ 上有 $\boldsymbol{A}_1\big|_{r_0}=\boldsymbol{\xi}\times\boldsymbol{B}_{v0}\big|_{r_0}$,故

$$\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{A}_1\Big|_{r_0}=\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{\xi}\times\boldsymbol{B}_{v0})\Big|_{r_0}=-\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{B}_{v0}\Big|_{r_0}+(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{B}_{v0})\boldsymbol{\xi}\Big|_{r_0}.$$

由于上式最后一项为零,所以有

$$\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{A}_1\Big|_{r_0}=-\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{B}_{v0}\Big|_{r_0}. \tag{4.29}$$

(iv) δW_a 的最后表达式.

由前面 δW_a 的表达式(4.19)

$$\delta W_a=-\frac{1}{2}\oint\Big[(\gamma P_0\nabla\cdot\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\xi}\cdot\nabla P_0)\boldsymbol{\xi}$$
$$+\frac{1}{\mu}(\boldsymbol{B}_1\cdot\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{B}_0-(\boldsymbol{B}_1\cdot\boldsymbol{B}_0)\boldsymbol{\xi}\Big]\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S},$$

可证它的第二项(由于平衡边条件,且在准确到二阶小量时)为零:

$$-\frac{1}{2\mu}\oint(\boldsymbol{B}_1\cdot\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{B}_0\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=-\frac{1}{2\mu}\oint(\boldsymbol{B}_1\cdot\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{B}_0(\boldsymbol{r}_0)\cdot(\boldsymbol{n}_0+\boldsymbol{n}_1)\mathrm{d}\boldsymbol{S}\approx 0.$$

于是 δW_a 的表达式只剩下两项. 接下来再利用压强连接条件(4.23)式,就得到

$$\delta W_a=-\frac{1}{2}\oint(\boldsymbol{\xi}\cdot\nabla)\Big[\Big(P_0+\frac{B_0^2}{2\mu}\Big)-\frac{B_{v0}^2}{2\mu}\Big]\boldsymbol{\xi}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$
$$+\frac{1}{2\mu}\oint\boldsymbol{B}_{v0}\cdot\boldsymbol{B}_{v1}\boldsymbol{\xi}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$
$$=\delta W_a^{(1)}+\delta W_a^{(2)}.$$

其中第一项是真正的边界项

$$\delta W_a^{(1)}=-\frac{1}{2}\oint\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{n}\frac{\partial}{\partial l_n}\Big[\Big(P_0+\frac{B_0^2}{2\mu}\Big)-\frac{B_{v0}^2}{2\mu}\Big]\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S$$
$$=-\frac{1}{2}\oint(\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{n})^2\nabla\Big(P_0+\frac{B_0^2}{2\mu}-\frac{B_{v0}^2}{2\mu}\Big)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}.$$

或把上式改写成

$$\delta W_s\equiv\delta W_a^{(1)}=-\frac{1}{2}\oint(\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{n})^2\Big[\!\!\Big[\nabla_n\Big(P_0+\frac{B_0^2}{2\mu}\Big)\Big]\!\!\Big]\mathrm{d}S, \tag{4.30}$$

其中〚 … 〛表示其内的量在边界两边的差值. 而另一方面,$\delta W_a^{(2)}$ 却表示真空区中的扰动磁能

$$\delta W_a^{(2)}=\frac{1}{2\mu}\oint\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{n}\boldsymbol{B}_{v0}\cdot\boldsymbol{B}_{v1}\mathrm{d}S$$
$$=-\frac{1}{2\mu}\oint(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{A}_1)\cdot\boldsymbol{B}_{v1}\mathrm{d}S\qquad(参见(4.29)式)$$
$$=-\frac{1}{2\mu}\oint\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{A}_1\times\boldsymbol{B}_{v1})\mathrm{d}S$$
$$=\frac{1}{2\mu}\oint(\boldsymbol{A}_1\times\boldsymbol{B}_{v1})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}_v\qquad(\mathrm{d}\boldsymbol{S}_v=-\boldsymbol{n}\mathrm{d}S)$$
$$=\frac{1}{2\mu}\int_{真空}\nabla\cdot(\boldsymbol{A}_1\times\boldsymbol{B}_{v1})\mathrm{d}\boldsymbol{r}$$
$$=\frac{1}{2\mu}\int_{真空}[(\nabla\times\boldsymbol{A}_1)\cdot\boldsymbol{B}_{v1}-\boldsymbol{A}_1\cdot(\nabla\times\boldsymbol{B}_{v1})]\mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

$$= \frac{1}{2\mu}\int_{\text{真空}} B_{v1}^2 \mathrm{d}\boldsymbol{r}. \qquad (\text{由} \nabla \times \boldsymbol{B}_{v1} = \boldsymbol{J}_{v1} \equiv 0)$$

其中 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}_v = \boldsymbol{n}_v \mathrm{d}S$，$\boldsymbol{n}_v$ 是从真空区内所看到的界面法线方向，它和原来从磁流体中所看到的界面法线方向 $\boldsymbol{n}$ 正好相反. 上式也可以改写成

$$\delta W_v \equiv \delta W_a^{(2)} = \int_{\text{真空}} \frac{B_{v1}^2}{2\mu} \mathrm{d}\boldsymbol{r}. \tag{4.31}$$

最后，总扰动势能可以写成

$$\delta W = \delta W_F + \delta W_a^{(1)} + \delta W_a^{(2)} \equiv \delta W_F + \delta W_s + \delta W_v. \tag{4.32}$$

下面给出几种不同形式的磁流体体内的扰动势能表达式，它们各有自己的优点(参考文献[2],[6]).

第一种，也就是本节推导出的表达式(4.18)、(4.30)和(4.31).

$$\delta W_F = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}\boldsymbol{r}\Big[\frac{|\boldsymbol{B}_1|^2}{\mu} - \boldsymbol{\xi}^* \cdot (\boldsymbol{J}_0 \times \boldsymbol{B}_1) + \gamma P_0 |\nabla \cdot \boldsymbol{\xi}|^2 + (\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla P_0)(\nabla \cdot \boldsymbol{\xi}^*)\Big],$$

$$\delta W_s = -\frac{1}{2}\oint |\boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{n}|^2 \nabla_n\Big(P_0 + \frac{B_0^2}{2\mu} - \frac{B_{v0}^2}{2\mu}\Big)\mathrm{d}S,$$

$$\delta W_s = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}\boldsymbol{r}\, \frac{|B_{v1}|^2}{\mu}.$$

这表达式是所有同类表达式中最早提出的(参见文献[7]).

第二种，其中各项的物理意义最明显(H. P. Furthetal, 1965; J. M. Greece, J. L. Johnson, 1968)

$$\delta W_F^{\mathrm{I}} = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}\boldsymbol{r}\Big[\frac{1}{\mu}|\boldsymbol{B}_{1\perp}|^2 + \frac{B_0^2}{\mu}|\nabla \cdot \boldsymbol{\xi}_\perp + 2\boldsymbol{\xi}_\perp \cdot \boldsymbol{\kappa}|^2 + \gamma P_0 |\nabla \cdot \boldsymbol{\xi}|^2 - \frac{\boldsymbol{J}_0 \cdot \boldsymbol{B}_0}{B_0^2}(\boldsymbol{\xi}^* \times \boldsymbol{B}_0) \cdot \boldsymbol{B}_{1\perp} - 2(\boldsymbol{\xi}_\perp \cdot \nabla P_0)(\boldsymbol{\xi}^* \cdot \boldsymbol{\kappa})\Big].$$

被积函数的第一项代表弯曲磁力线的扰动所导致的磁场势能的增加，相应的扰动就是剪切阿尔文波；这是一个正项，起稳定作用. 第二项代表同时压缩流体和磁场的扰动所产生的势能增加，相应的扰动即是稳定的压缩阿尔文波. 第三项代表单独压缩流体所增大的势能，对应于稳定的离子声波. 第四项是平行电流 $J_{0\parallel}$ 所驱动的解稳项，由此项产生的不稳定扰动通常称为扭曲(kink)模. 第五项是由压强梯度和曲率联合驱动的不稳定扰动，即所谓的交换(interchange)模. 其中第二项还能改写成物理上更明显的形式

$$\frac{B_0^2}{\mu}|\nabla \cdot \boldsymbol{\xi}_\perp + 2\boldsymbol{\xi}_\perp \cdot \boldsymbol{\kappa}|^2 = \frac{B_0^2}{\mu}|\nabla \cdot \boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla(B_0^2 + 2\mu P_0)/B_0^2|^2 = \mu\Big|\frac{1}{\mu}\boldsymbol{B}_{1\parallel} - \boldsymbol{B}_0 \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla P_0 / B_0^2\Big|^2.$$

这种表达式的详细推导请参考附录 C.

第三种为(它的推导请参见文献[8])

$$\delta W_F^{\mathrm{II}} = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}\boldsymbol{r}\Big[\frac{1}{\mu}|\boldsymbol{B}_1 + \mu \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\xi} \boldsymbol{J}_0 \times \boldsymbol{n}|^2 + \gamma P_0 |\nabla \cdot \boldsymbol{\xi}|^2 - 2\boldsymbol{J}_0 \times \boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{B}_0 \cdot \nabla \boldsymbol{n})(\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\xi})^2\Big],$$

其中 $\boldsymbol{n} = \nabla P_0 / |\nabla P_0|$. 这种表达式把自伴性表现得十分明显，而且解稳的只有第三项，这项还可以进一步写成

$$-2\boldsymbol{J}_0 \times \boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{B}_0 \cdot \nabla \boldsymbol{n})(\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\xi})^2 = [\kappa \boldsymbol{\nu} \cdot \nabla P_0 + (\boldsymbol{B}_0 \cdot \boldsymbol{J}_0)](\tau - \boldsymbol{b} \cdot \nabla \phi)](\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\xi})^2,$$

其中

$$\kappa \boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{b} \cdot \nabla \boldsymbol{b}, \quad \tau \boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{b} \cdot \nabla \boldsymbol{t}, \quad \tau \boldsymbol{t} - \kappa \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \cdot \nabla \boldsymbol{\nu},$$

而

$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{B}_0 / B_0, \quad \boldsymbol{n} = -\boldsymbol{t}\sin\phi + \boldsymbol{\nu}\cos\phi.$$

其中 $\boldsymbol{b}$ 是磁场方向，也即磁力线上任一点的切线方向；$\boldsymbol{\nu}$ 是磁场曲率，也即主法线方向；$\boldsymbol{t}$ 则是磁场挠率，也即次法线方向. 当力线的弯曲方向在压强梯度方向时 $\kappa \boldsymbol{\nu} \cdot \nabla P_0 < 0$，上式中的首项是解稳的；反之则是致稳的. 第二项中 $\boldsymbol{B}_0 \cdot \boldsymbol{J}_0$ 给出磁力线方向和电流方向间的正(同向)、负(反向)，而因子$(\tau - \boldsymbol{b} \cdot \nabla \phi)$则表征了压强梯度方向 $\boldsymbol{n}$ 相对于法线方向的扭曲，这两者共同决定了扰动的稳定性.

第四种形式用于螺旋对称柱几何位形(如螺旋箍缩位形)特别方便(请参见文献[9])

$$\delta W_F^N = \frac{1}{2}\int d\boldsymbol{r}\Big[\,|\boldsymbol{B}_0\cdot\nabla\boldsymbol{\xi}_\perp|^2 + B_0^2|\nabla\cdot\boldsymbol{\xi}_\perp + 2\boldsymbol{\xi}_\perp\cdot\boldsymbol{\kappa}|^2 + \gamma P_0|\nabla\cdot\boldsymbol{\xi}|^2 + \boldsymbol{\xi}_\perp^*\cdot(\boldsymbol{\xi}_\perp\cdot\nabla)\nabla\widetilde{P}_0 - 4B_0^2|\boldsymbol{\xi}_\perp\cdot\boldsymbol{\kappa}|^2\Big],$$

其中 $\boldsymbol{\kappa}=\boldsymbol{b}\cdot\nabla\boldsymbol{b}$，而 $\nabla\widetilde{P}_0=\nabla(P_0+B_0^2/2\mu)=\boldsymbol{B}_0\cdot\nabla\boldsymbol{B}_0$.

这个表达式的详细推导请参考附录 D.

(3) 理想磁流体模的本征值

由 $\boldsymbol{F}$ 的自伴性可以证明以下三点：

(i) ω^2 为实数；

(ii) 满足运动方程的 $\boldsymbol{\xi}$ 是实矢量；

(iii) 不同分立本征值 ω_n 所对应的本征矢 $\boldsymbol{\xi}_n$ 彼此正交.

下面来证明(i)：将关于 $\boldsymbol{\xi}$ 的运动方程(见(4.8)式)进行傅氏变换后，得

$$-\omega^2\rho_0\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{\xi}).$$

上式两边同时用 $\boldsymbol{\xi}^*$ 点乘后，对全空间积分，可得

$$-\omega^2\int\rho_0|\boldsymbol{\xi}|^2 d\boldsymbol{r} = \int\boldsymbol{\xi}^*\cdot\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\xi})d\boldsymbol{r}.$$

而对复共轭的运动方程进行相同运算后，同样可得

$$-(\omega^2)^*\int\rho_0|\boldsymbol{\xi}|^2 d\boldsymbol{r} = \int\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\xi}^*)d\boldsymbol{r}.$$

两式相减，并利用 $\boldsymbol{F}$ 的自伴性可得

$$(\omega^2-\omega^{2*})\int\rho_0|\boldsymbol{\xi}|^2 d\boldsymbol{r} = \int[\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\xi}^*) - \boldsymbol{\xi}^*\cdot\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\xi})]d\boldsymbol{r} = 0.$$

这表示 $\omega^2=(\omega^2)^*$；也即 ω^2 是实数. 于是 ω 或为实数($\omega^2>0$)，或为纯虚数($\omega^2<0$). 相应扰动的时间行为($\exp[-i\omega t]$)只能是周期振动($\exp[-i\omega_r t]$)或纯增长(阻尼)($\exp[\pm\omega_i t]$)，而不可能是增长(或阻尼)的振荡.

接着证明(ii)：因为 $\boldsymbol{F}$ 是实的线性算子而 ω^2 又是实数，故满足上述运动方程的矢量 $\boldsymbol{\xi}$ 也一定是实矢量. 有时在公式中或公式

的推导中还使用 $\boldsymbol{\xi}^*$，这只是为了便于看出自伴性或便于演算，并不意味着 $\boldsymbol{\xi}$ 是复数.

(iii) 的证明如下：若 ω 有分立谱(本征值)$\{\omega_n\}(n=1,2,\cdots)$，设相应的本征矢为$\{\boldsymbol{\xi}_n\}(n=1,2,\cdots)$. 则对 ω_n 有运动方程

$$-\omega_n^2\rho_0\boldsymbol{\xi}_n = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{\xi}_n);$$

而对另一个本征值 ω_m 有运动方程

$$-\omega_m^2\rho_0\boldsymbol{\xi}_m = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{\xi}_m).$$

这两个方程式分别点乘以 $\boldsymbol{\xi}_m$ 和 $\boldsymbol{\xi}_n$，相减后对全空间积分，得

$$(\omega_n^2-\omega_m^2)\int\rho_0\boldsymbol{\xi}_m\cdot\boldsymbol{\xi}_n d\boldsymbol{r} = \int[\boldsymbol{\xi}_n\cdot\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\xi}_m) - \boldsymbol{\xi}_m\cdot\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\xi}_n)]d\boldsymbol{r} = 0,$$

上式最后一步用到了算子 $\boldsymbol{F}$ 的自伴性. 因为 $\omega_n^2\neq\omega_m^2$，故一定有

$$\int\rho_0\boldsymbol{\xi}_n\cdot\boldsymbol{\xi}_m d\boldsymbol{r} = 0\quad(n\neq m), \tag{4.33}$$

这就表示 $\boldsymbol{\xi}_n$ 和 $\boldsymbol{\xi}_m$ 正交.

(4) 算子 $\boldsymbol{F}$ 的一般谱结构

在本征值问题中出现的算子 $\boldsymbol{F}+\rho_0\omega^2$，还可以不失一般性而写成更一般的形式

$$\boldsymbol{F}/\rho_0 - \lambda.$$

对所有可能的复数 λ 及线性算子 $\boldsymbol{F}$，一般的算子理论告诉我们上述新算子($\boldsymbol{F}/\rho_0-\lambda$)有以下几类关于 λ 的解.

(i) 预解式 (resolvent)的 λ 解.

这时，对应于这类 λ 值的逆算子$(\boldsymbol{F}/\rho_0-\lambda)^{-1}$一定存在并有界，以使非齐次方程

$$(\boldsymbol{F}/\rho_0-\lambda)\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{a}$$

有非平凡的 $\boldsymbol{\xi}$ 解

$$\boldsymbol{\xi} = (\boldsymbol{F}/\rho_0-\lambda)^{-1}\boldsymbol{a}.$$

当($\boldsymbol{F}/\rho_0-\lambda$)不满足上述条件时，又存在以下三种情况，这时相应的 λ 值就称为算子 $\boldsymbol{F}$ 的谱.

(ii) 分立谱，又称点谱或本征(eigen)谱.

它们是由这样的 λ 值组成的，在这些 λ 值下 $(\boldsymbol{F}/\rho_0-\lambda)^{-1}$ 虽然不存在，但是能使齐次方程

$$(\boldsymbol{F}/\rho_0 - \lambda)\boldsymbol{\xi} = 0$$

有非平凡的正则解 $\boldsymbol{\xi}$ 存在. 这时 λ 是分立取值的，其值就是分离谱的本征值 $\{\lambda_n\}$，不同本征值对应的本征矢 $\{\boldsymbol{\xi}_n\}$ 彼此正交.

(iii) 连续谱.

它们是由这样的 λ 组成，这时逆算子 $(\boldsymbol{F}/\rho_0-\lambda)^{-1}$ 存在，但无界. 这时齐次方程

$$(\boldsymbol{F}/\rho_0 - \lambda)\boldsymbol{\xi} = 0$$

有非平凡解 $\boldsymbol{\xi}$ 的充要条件是 $(\boldsymbol{F}/\rho_0-\lambda)=0$（如在连续谱阿尔文波情况中，$(\boldsymbol{F}/\rho_0-\lambda)=k_\parallel^2 V_A^2(x_0)-\omega^2=0$，也即 $f(x_0)=0$）. 当存在着一个能满足这个充要条件的、可连续取值的复数 λ 时，则称它为算子 $\boldsymbol{F}$ 的连续谱. 但相应的本征矢这时却是发散的.

(iv) 剩余谱.

指的是在 λ 复平面内，除去上面几种取值的 λ 后剩下的部分. 这些谱所对应的扰动，其时间行为比较复杂，至今尚无法阐明.

对于理想磁流体的力算子 $\boldsymbol{F}$ 来说，因为有自伴性，故其本征分立谱的 λ 值是实数，即只在实轴上取值. 取正值的部分称为稳定谱，而取负值的一半则称为不稳定谱(图 4.7). 一般在连续谱的端点处，分立谱会出现堆积现象（即各分立谱的本征值间隔愈来愈小，最后趋于无限小. 如分立阿尔文波在连续谱下端的无限堆积——类似原子中电子的分立能谱在电离后形成的连续能谱下的无限密集堆积）.

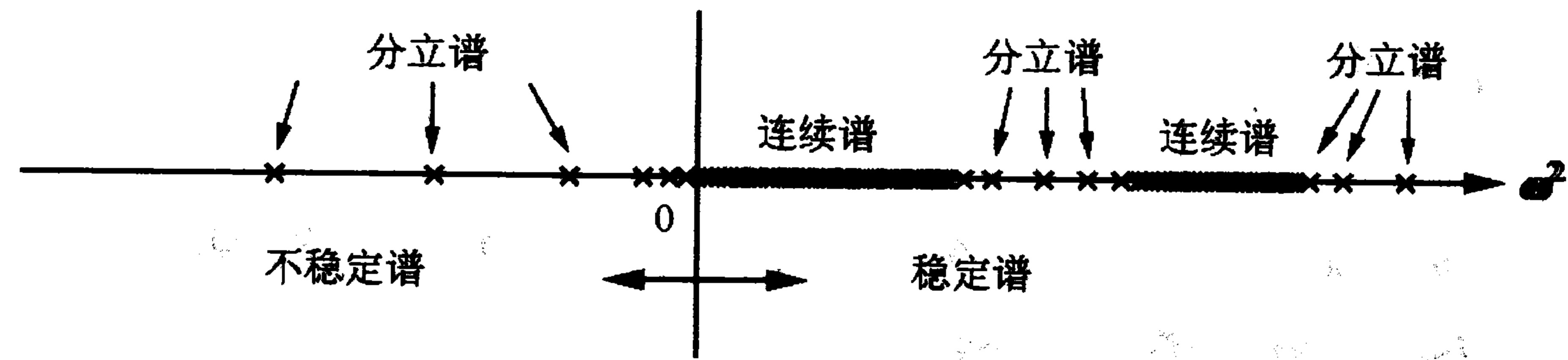


图 4.7 $\boldsymbol{F}$ 算子的谱

4.1.3 变分原理和能量原理

1. 变分原理

变分原理的实质是：在数学上用 $\boldsymbol{\xi}$ 泛函 $\Omega^2(\boldsymbol{\xi}^*,\boldsymbol{\xi})$ 的变分为零 $\delta\Omega^2=0$，来等价 $\boldsymbol{\xi}$ 的线性本征值方程 $-\omega^2\rho_0\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\xi})$，从而描述磁流体的不稳定扰动. 这样求解线性方程式的本征值问题就变成了一个变分的极值问题，从而开拓了一种新的数学描述方法.

令

$$\Omega^2(\boldsymbol{\xi}^*,\boldsymbol{\xi})=\frac{\delta W(\boldsymbol{\xi}^*,\boldsymbol{\xi})}{L(\boldsymbol{\xi}^*,\boldsymbol{\xi})},$$

$$\delta W(\boldsymbol{\xi}^*,\boldsymbol{\xi})=-\frac{1}{2}\int\boldsymbol{\xi}^*\cdot\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\xi})\mathrm{d}\boldsymbol{r},$$

$$L(\boldsymbol{\xi}^*,\boldsymbol{\xi})=\frac{1}{2}\int\rho_0\boldsymbol{\xi}^*\cdot\boldsymbol{\xi}\mathrm{d}\boldsymbol{r}.$$

变分原理：

任何使 Ω^2 成为静态（即使得 $\delta\Omega^2=0$）的函数 $\boldsymbol{\xi}^*$，都一定是理想磁流体本征模方程

$$-\omega^2\rho_0\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\xi})$$

的一个本征值为 $\omega^2=\Omega^2(\boldsymbol{\xi}^*,\boldsymbol{\xi})$ 的本征函数.

下面是上述原理的证明：令 $\boldsymbol{\xi}\to\boldsymbol{\xi}+\delta\boldsymbol{\xi}$，这使 $\Omega^2,L,\delta W$ 都会发生改变. 假定在积分的边界面上 $\boldsymbol{\xi}$ 不变，则由 $\Omega^2L=\delta W$ 可得

$$\delta(\Omega^2L)=\delta(\delta W),$$

即

$$(\delta\Omega^2)L+\Omega^2(\delta L)=\delta(\delta W).$$

当 Ω^2 处于静态时，对任何 $\delta\boldsymbol{\xi}\neq0$，都应有 $\delta\Omega^2=0$，因此 $\Omega^2(\boldsymbol{\xi}^*,\boldsymbol{\xi})$ 应该是和 $\boldsymbol{\xi}$ 具体形式无关的数值（即静态值）. 这样上式就简化成

$$\Omega^2(\delta L)=\delta(\delta W),$$

其中

$$\delta L=\frac{1}{2}\delta\left(\int\rho_0\boldsymbol{\xi}^*\cdot\boldsymbol{\xi}\mathrm{d}\boldsymbol{r}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\int \rho_0(\delta\boldsymbol{\xi}^* \cdot \boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\xi}^* \cdot \delta\boldsymbol{\xi})\mathrm{d}\boldsymbol{r},$$

$$\delta(\delta W) = -\frac{1}{2}\delta\left(\int \boldsymbol{\xi}^* \cdot \boldsymbol{F}(\boldsymbol{\xi})\mathrm{d}\boldsymbol{r}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\int[\delta\boldsymbol{\xi}^* \cdot \boldsymbol{F}(\boldsymbol{\xi}) + \boldsymbol{\xi}^* \cdot \boldsymbol{F}(\delta\boldsymbol{\xi})]$$

$$= -\frac{1}{2}\int[\delta\boldsymbol{\xi}^* \cdot \boldsymbol{F}(\boldsymbol{\xi}) + \delta\boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{F}(\boldsymbol{\xi}^*)].$$

上式的最后一步已经利用了 $\boldsymbol{F}$ 的自伴条件. 将 δL 及 $\delta(\delta W)$ 代入前一个方程,可得

$$\int \mathrm{d}\boldsymbol{r}\{\delta\boldsymbol{\xi}^* \cdot [\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\xi}) + \rho_0\Omega^2\boldsymbol{\xi}] + \delta\boldsymbol{\xi} \cdot [\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\xi}^*) + \rho_0\Omega^2\boldsymbol{\xi}^*]\} = 0.$$

由于 $\delta\boldsymbol{\xi}$ 及 $\delta\boldsymbol{\xi}^*$ 在积分区域内都是任意取值的,故必定有

$$-\Omega^2\rho_0\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{\xi}).$$

和前面的线性方程 $-\omega^2\rho_0\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{\xi})$ 相比,可知只要

$$\Omega^2 = \omega^2,$$

变分原理 $\delta\Omega^2 = 0$ 就和本征方程等价,泛函的静态值 Ω^2 就等于线性方程的本征值 ω^2,而 $\boldsymbol{\xi}$ 就是相应的本征矢.

2. 能量原理

通常理想磁流体不稳定性增长得很快($\tau \leqslant 50\ \mu s$),其特征时间总是比实验研究现象的特征时间(t 约在 1 ms 至 1 s 之间)短得多. 因此增长无论快慢,不稳定的扰动都会充分地在所研究的现象中显示出来. 这样,我们更关心的是某一平衡的磁流体位形对某种特定的扰动是否是稳定的.

如果只要求判断体系的稳定与否,则变分原理还可以简化,这就是下面要讨论的能量原理:

一种平衡位形,当且仅当对所有在能量守恒和边界条件可以允许的扰动位移 $\boldsymbol{\xi}$ 都存在

$$\delta W(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi}) \geqslant 0$$

时,才能是稳定的. (这是一个充要条件.)

这定理在物理上很容易理解: $\delta W > 0$,表示原来(未扰动)的体系已处于势能的最低态,任何的扰动都只会使体系的势能增加,因此这时体系一定是稳定的. 反之,如果 $\delta W < 0$,则表示扰动会使体系变化到势能更低的状态,因此体系对这种扰动来说就是不稳的. 当 $\delta W = 0$ 时,体系处于临界稳定态. 下面就分成两种情况来对能量原理作一简单证明.

(1) 当扰动属于分离本征模时,能量原理的证明

如果 $\boldsymbol{F}$ 只有分离的本征模,则一定存在一组完备基 $\{\boldsymbol{\xi}_n\}$,任何扰动都可以用它们展开:

$$\boldsymbol{\xi}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\boldsymbol{\xi}_n \exp[-\mathrm{i}\omega_n t].$$

假若 $\{\boldsymbol{\xi}_n\}$ 是带权 ρ_0 正交的

$$\int \rho_0\boldsymbol{\xi}_n \cdot \boldsymbol{\xi}_m \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \delta_{n,m},$$

则利用 $\boldsymbol{\xi}_n$ 的运动方程,可证

$$2\delta W = -\int \boldsymbol{\xi}^* \cdot \boldsymbol{F}(\boldsymbol{\xi})$$

$$= \sum_{n,m} a_m^* a_n \omega_n^2 \int \rho_0 \boldsymbol{\xi}_m^* \cdot \boldsymbol{\xi}_n \mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

$$= \sum_n |a_n|^2 \omega_n^2.$$

这样如果存在使 $\delta W < 0$ 的扰动 $\boldsymbol{\xi}(t)$,则至少应该有一个 $\omega_k^2 < 0$,这个本征值(ω_k)所对应的本征矢($\boldsymbol{\xi}_k$)就是不稳定的. 反之,如果对所有可能的扰动 $\boldsymbol{\xi}(t)$,都只能有 $\delta W \geqslant 0$,则一定要求每个 $\omega_n^2 \geqslant 0$($n = 1, 2, \cdots$),也即所有的模都是稳定的. 因此 $\delta W \geqslant 0$ 的确是体系稳定的充要条件.

(2) 当扰动具有更一般的谱,例如包括连续谱在内的情况

Laval 于 1965 年给出了一个不依赖于分离完备本征矢 $\{\boldsymbol{\xi}_n\}$ 集的对能量原理的证明. 其基本思路如下:

由能量守恒 $H = 0$, $H = K(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi}) + \delta W(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi})$ 可知: 扰动势能

δW 的随时间变化将会引起扰动动能 K 的反变化，故对 K 时间行为的讨论就可以判断体系的稳定与否.

(i) 能量原理是体系稳定充分条件的证明.

假若对所有允许的扰动 $\boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{r},t)$，$\delta W$ 都为正，则由能量守恒有

$$\delta W = H - K > 0.$$

由此可以看出 K 不可能随时间单调增长，否则过了一定的时间后会有 $K>H$，从而使 $\delta W<0$，因此违背了能量守恒. 这样，$\delta W>0$，加上能量守恒就能排除 K 随时间(指数地)增长，这表明 $\delta W>0$ 是体系对各种扰动保持稳定的充分条件.

(ii) 能量原理是稳定必要条件的证明.

假若存在某种扰动 $\eta(\boldsymbol{r})$，使 $\delta W(\eta,\eta)<0$，则可以用它来构造一个不随时间变化的位移矢量

$$\boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{r},t) = \eta(\boldsymbol{r}), \quad \dot{\boldsymbol{\xi}}(\boldsymbol{r},t) = 0.$$

然后由能量守恒及相应扰动动能为零可得

$$H(t) \equiv H(0) = K(\dot{\boldsymbol{\xi}}(0), \dot{\boldsymbol{\xi}}(0)) + \delta W(\eta,\eta) = \delta W(\eta,\eta) < 0.$$

再利用

$$L(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{2}\int \rho_0 \boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{\xi}\mathrm{d}\boldsymbol{r},$$

有

$$\ddot{L}(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\xi}) = \int \rho_0(\dot{\boldsymbol{\xi}}\cdot\dot{\boldsymbol{\xi}} + \boldsymbol{\xi}\cdot\ddot{\boldsymbol{\xi}})\mathrm{d}\boldsymbol{r}$$
$$= 2K(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\xi}) - 2\delta W(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\xi}),$$

其中用到了 $\ddot{\boldsymbol{\xi}}$ 满足的运动方程. 最后由

$$\delta W(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\xi}) = H(t) - K(\dot{\boldsymbol{\xi}},\dot{\boldsymbol{\xi}}),$$

可得

$$\ddot{L}(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\xi}) = 2K(\dot{\boldsymbol{\xi}},\dot{\boldsymbol{\xi}}) - 2[H(t) - K(\dot{\boldsymbol{\xi}},\dot{\boldsymbol{\xi}})]$$
$$= 4K(\dot{\boldsymbol{\xi}},\dot{\boldsymbol{\xi}}) - 2H(0)$$
$$\geq -2H(0) = -2\delta W(\eta,\eta) > 0,$$

其中用到了 $K(\dot{\boldsymbol{\xi}},\dot{\boldsymbol{\xi}}) = K(0,0) = 0$. 结果，扰动势能就随时间不断增大. 当 $t\to\infty$ 时，$L\to\infty$. 为此 $L=(1/2)\int\rho_0\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{\xi}\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 中的扰动位移也必须随时间不断增大($\boldsymbol{\xi}(t)\approx t^{\alpha}(\alpha>1)$)才能保证 $\ddot{L}>0$. 这就证明了：$\delta W<0$，一定会使扰动位移 $\boldsymbol{\xi}(t)$ 至少以时间的正幂指数不断增长，也即导致扰动不稳定.

上面的讨论中初始扰动是不随时间而增大的，如果 $\dot{\boldsymbol{\xi}}(t)>0$，则相应的扰动动能 $K(\dot{\boldsymbol{\xi}},\dot{\boldsymbol{\xi}})>0$，从而加大了 $\ddot{L}>0$，这将进一步驱使 $\boldsymbol{\xi}(t)$ 随时间更快地增长.

Laval 等人还证明了当 $\delta W(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\eta})<0$ 时，位移量随时间以指数变化

$$\boldsymbol{\xi}(t) \approx \mathrm{e}^{\lambda t}, \quad \lambda \geqslant [-\delta W(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\eta})/L(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\eta})]^{1/2}.$$

因此，只要 $\delta W<0$，就会有 $\lambda>0$，于是 $\boldsymbol{\xi}(t)$ 就会随时间指数地增长. 这样就证明了能量原理是稳定的必要条件.

3. 用不可压缩性来极小化 δW_F

能量原理的判据虽然简单，但必须先知道磁流体扰动 $\boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{r},t)$ 的具体形状，而能量原理本身并不能告诉我们如何去选取扰动的具体形式. 这样如果想要研究一个磁流体体系的稳定性，必须要在浩如烟海的各式各样的 $\boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{r},t)$ 中去摸索，这样当然是难以操作的. 因此如果事先对 $\boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{r},t)$ 的选取规定一个操作次序或者范围，就能大大减少试探的工作量.

由于使 $\delta W<0$ 的 $\boldsymbol{\xi}$ 是不稳定的扰动，使 δW 最负的扰动是最不稳定的扰动. 因此，我们可以用逐步挑选 $\boldsymbol{\xi}$ 使 δW 不断极小化的方法来求出尽可能低的扰动势能 δW. 如果这个最小的势能是小于零的，则使其取这个值的 $\boldsymbol{\xi}$ 就是使体系不稳定(或最不稳定)的扰动，这时体系的不稳定性和它相应的扰动模式同时求出. 此方法的实质是，将寻找使 $\delta W<0$ 的扰动 $\boldsymbol{\xi}$ 的问题，转换成寻找泛函 $\delta W(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\xi})$ 的变分极值问题，而后者是一个数学上成熟的方法.

通常，不可压缩性是用来极小化 δW 的首选途径，下面就作一

解释.

扰动矢量 $\boldsymbol{\xi}$ 包括三个分(标)量,首先可以把它按磁场方向分解成平行(方向)扰动和垂直扰动两部分 $\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{\xi}_{\parallel}+\boldsymbol{\xi}_{\perp}$. 在 K 及 δW_F 的表达式中含平行扰动 $\boldsymbol{\xi}_{\parallel}$ 的项很少而且形式比较简单,因此用适当选择它来使 δW_F 极小是一种比较容易做到的事. 剩余的 δW_F 中就只有含垂直扰动 $\boldsymbol{\xi}_{\perp}$ 的项,这时只需要再选择合适的 $\boldsymbol{\xi}_{\perp}$ 来极小化 δW_F 就行了.

具体做法是把扰动势能 δW_F 第二种表达式

$$\delta W_F=\frac{1}{2}\int \mathrm{d}\boldsymbol{r}\left[\frac{1}{\mu}|\boldsymbol{B}_{1\perp}|^2+\frac{B_0^2}{\mu}|\nabla\cdot\boldsymbol{\xi}_{\perp}+2\boldsymbol{\xi}_{\perp}\cdot\boldsymbol{\kappa}|^2+\gamma P_0|\nabla\cdot\boldsymbol{\xi}|^2 -\frac{\boldsymbol{J}_0\cdot\boldsymbol{B}_0}{B_0^2}(\boldsymbol{\xi}^*\times\boldsymbol{B}_0):\boldsymbol{B}_{1\perp}-2(\boldsymbol{\xi}_{\perp}\cdot\nabla P_0)(\boldsymbol{\xi}^*\cdot\boldsymbol{\kappa})\right] \tag{4.34}$$

中的含 $\boldsymbol{\xi}_{\parallel}$ 项分离出来. 可以看到 $\boldsymbol{\xi}_{\parallel}$ 只出现在第三项中,故可以令

$$\delta W_F(\boldsymbol{\xi}^*,\boldsymbol{\xi})=\delta W_F(\boldsymbol{\xi}_{\perp}^*,\boldsymbol{\xi}_{\perp})+\frac{1}{2}\int \mathrm{d}\boldsymbol{r}\gamma P_0|\nabla\cdot\boldsymbol{\xi}|^2$$
$$=\delta W_F(\boldsymbol{\xi}_{\perp}^*,\boldsymbol{\xi}_{\perp})+\delta W_{\parallel}.$$

从上式可以看出 $\delta W_{\parallel}$ 总是大于或者等于零的,现在来找出使其取极小值的条件. 令 $\boldsymbol{\xi}_{\parallel}\to\boldsymbol{\xi}_{\parallel}+\delta\boldsymbol{\xi}_{\parallel}$,但在边界上 $\delta\boldsymbol{\xi}_{\parallel}=0$. 在这种情况下 $\delta W_{\parallel}$ 的变分为

$$\delta(\delta W_{\parallel})=\delta W_{\parallel}(\boldsymbol{\xi}^*+\delta\boldsymbol{\xi}_{\parallel}^*,\boldsymbol{\xi}+\delta\boldsymbol{\xi}_{\parallel})-\delta W_{\parallel}(\boldsymbol{\xi}^*,\boldsymbol{\xi})$$
$$=\frac{1}{2}\int\gamma P_0[|\nabla\cdot\boldsymbol{\xi}+\nabla\cdot\delta\boldsymbol{\xi}_{\parallel}|^2-|\nabla\cdot\boldsymbol{\xi}|^2]\mathrm{d}\boldsymbol{r},$$

其中第一项被积函数可以进一步展开成

$$|\nabla\cdot\boldsymbol{\xi}+\nabla\cdot\delta\boldsymbol{\xi}_{\parallel}|^2=|\nabla\cdot\boldsymbol{\xi}|^2+(\nabla\cdot\boldsymbol{\xi}^*)(\nabla\cdot\delta\boldsymbol{\xi}_{\parallel})+(\nabla\cdot\delta\boldsymbol{\xi}_{\parallel}^*)(\nabla\cdot\boldsymbol{\xi})+|\nabla\cdot\delta\boldsymbol{\xi}_{\parallel}|^2.$$

略去二阶变分小量 $|\nabla\cdot\delta\boldsymbol{\xi}_{\parallel}|^2$,并考虑到 $\boldsymbol{\xi}$ 是实数后,平行扰动势能的变分为

$$\delta(\delta W_{\parallel})=\int\gamma P_0(\nabla\cdot\boldsymbol{\xi})(\nabla\cdot\delta\boldsymbol{\xi}_{\parallel})\mathrm{d}\boldsymbol{r}=-\int\gamma P_0[\nabla_{\parallel}(\nabla\cdot\boldsymbol{\xi})]\delta\boldsymbol{\xi}_{\parallel}\mathrm{d}\boldsymbol{r},$$

其中已进行了分部积分,并用到了 $\delta\boldsymbol{\xi}_{\parallel}$ 在界面上为零的条件. 这

样,在磁流体内部如果满足(极小化)条件

$$\nabla_{\parallel}(\nabla\cdot\boldsymbol{\xi})=0,$$

则对任意不为零的平行扰动 $\delta\boldsymbol{\xi}_{\parallel}$,必有 $\delta(\delta W_{\parallel})=0$,而相应的总扰动势能 δW_F 不但变小了,而且只是垂直扰动 $\boldsymbol{\xi}_{\perp}$ 的函数.

下面进一步来讨论极小化条件,它可以改写成

$$\boldsymbol{B}_0\cdot\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{\xi})=0, \tag{4.35}$$

并可分成两种情况分析:

(i) $\boldsymbol{B}_0\cdot\nabla\neq 0$ 的情况(平行磁场方向的导数存在且有界).

这时极小化条件就简化成

$$\nabla\cdot\boldsymbol{\xi}=0,$$

这就是所谓不可压缩条件(因为它意味着 $\nabla\cdot\boldsymbol{u}=0$). 由它不但可以直接得到 $\delta(\delta W_{\parallel})=0$,而且可以导出这时平行扰动必须满足的条件. 由

$$\nabla\cdot\boldsymbol{\xi}=0=\nabla_{\parallel}\cdot\boldsymbol{\xi}_{\parallel}+\nabla_{\perp}\cdot\boldsymbol{\xi}_{\perp},\quad\Rightarrow\quad\nabla_{\parallel}\cdot\boldsymbol{\xi}_{\parallel}=-\nabla_{\perp}\cdot\boldsymbol{\xi}_{\perp}.$$

而

$$\nabla_{\parallel}\cdot\boldsymbol{\xi}_{\parallel}=\nabla\cdot\left(\frac{\xi_{\parallel}}{B_0}\boldsymbol{B}_0\right)=\frac{\xi_{\parallel}}{B_0}\nabla\cdot\boldsymbol{B}_0+\boldsymbol{B}_0\cdot\nabla\left(\frac{\xi_{\parallel}}{B_0}\right)=(\boldsymbol{B}_0\cdot\nabla)\left(\frac{\xi_{\parallel}}{B_0}\right).$$

故形式上可把 $\xi_{\parallel}$ 写成

$$\xi_{\parallel}=-(\boldsymbol{B}_0\cdot\nabla)^{-1}B_0\nabla\cdot\boldsymbol{\xi}_{\perp}.$$

这是一种预解式情况的解.

(ii) $\boldsymbol{B}_0\cdot\nabla=0$ 的情况(这通常发生在有理面上).

一般这种情况只发生在空间的局部区域,在此处 $(\boldsymbol{B}_0\cdot\nabla)^{-1}$ 存在但发散,故此局部区域也称为奇异面. 这时虽然不存在不可压缩条件,因此无法确定平行扰动 $\xi_{\parallel}$ 的形式,但因

$$\nabla\cdot\boldsymbol{\xi}=\nabla_{\perp}\cdot\boldsymbol{\xi}_{\perp}+\frac{\boldsymbol{B}_0}{B_0}\cdot\nabla\xi_{\parallel}=\nabla_{\perp}\cdot\boldsymbol{\xi}_{\perp},$$

所以平行扰动势能 $\delta(\delta W_{\parallel})$ 自行为零,而剩余的仍是经过极小化了的势能——垂直势能

$$\delta W_F(\boldsymbol{\xi}^*,\boldsymbol{\xi})\equiv\delta W_F(\boldsymbol{\xi}_{\perp}^*,\boldsymbol{\xi}_{\perp}).$$

只是其中的

$$\frac{1}{2}\int \gamma P_0 |\nabla\cdot\boldsymbol{\xi}|^2 \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \frac{1}{2}\int \gamma P_0 |\nabla\cdot\boldsymbol{\xi}_\perp|^2 \mathrm{d}\boldsymbol{r}.$$

下面的讨论,就从垂直扰动势能 $\delta W_F(\boldsymbol{\xi}_\perp^*,\boldsymbol{\xi}_\perp)$ 出发来进一步极小化它. 只是在 $\boldsymbol{B}_0\cdot\nabla\neq 0$ 时,有不可压缩条件及 $\xi_\parallel$ 的表达式;而在 $\boldsymbol{B}_0\cdot\nabla=0$ 时,不能用不可压缩条件.

4.1.4 理想磁流体不稳定性的分类

1. 概述、分类

下面给出通过理想磁流体扰动势能 $\delta W=\delta W_F+\delta W_s$ 所能得到的不稳定模式的分类. 需要说明,由于在导出 δW 时,假定了平衡的流速 $u_0=0$,故这时平衡体系不存在由平衡流剪切所引起的不稳定性(如开尔文-亥姆霍兹不稳定性),也不会存在由于电阻以及流体挤压而产生的磁岛与磁重联这类的非理想磁流体力学模. 此外,下面的分类也不是唯一的,一种不稳定模式可以同时被列入几种不同的类型. 最后,在下面的分类中,有的模是按最容易引起不稳定性的试探函数的特征来命名的(如交换模),它们不一定能使扰动势能 δW_F 达到极小(但肯定能使 $\delta W_F<0$). 因此,这类模式是由不稳定的充分条件而不是由充要条件描述的.

按驱动不稳定的自由能源来分类时,有:电流(平行电流)驱动模;压强(垂直电流)驱动模.

按是否引起等离子边界面的扰动来分类时,有:内模(固定边界模,无边界扰动);外模(自由边界模).

按不稳定扰动 $\boldsymbol{\xi}$ 的特征来分类,其中最主要的有:扭曲(kink)模;交换(interchange)模;气泡(ballooning)模.

以上几种模又可以按前面的分类来描述,如:扭曲模属于电流驱动的内模及电流驱动的外模;气泡模属于压强驱动的内模及压强驱动的外模;而交换模则只是一种压强驱动的内模.

2. 扭曲模

如上所述,它们可以是内模也可以是外模,但都是由平行电流所携带的自由能所驱动的模.

(1) 外扭曲模

如图 4.8,这类扰动使原来以磁场方向为对称轴的直柱形磁流体"扭曲"成盘在磁力线上的螺旋形. 由于盘旋使冻结在流体中的磁力线略有弯曲,从而会引起磁势能的略微增加,反过来起稳定作用. 故可以出现的不稳定模式都有很长的平行(于磁场方向的)波长和较短的垂直方向波长,从而使它们对磁力线的弯曲尽可能地小. 如果设磁场在柱坐标的 $\boldsymbol{e}_z$ 方向,则可以按扰动在 (r,θ) 平面中投影的角向特征 m ($k_\theta=m/r$, m 取正整数)来把垂直波长的 ($\lambda_\theta=2\pi/k_\theta$) 不同扭曲模加以区分. $m=1$ 的模其垂直波长最大(因而垂直波数最小),因此其对平衡位形造成的危险也最大. 它是由总平行电流解稳(驱动)的,因此只要使总(平行)电流小于某一临界值 I_{ks} 就可以抑制这种最危险的外扭曲模. 高 m 的扭曲模其垂直波长比较小,危险性也小些,它们的解稳因素是比较平的(平行)电流径向剖面. 因此设法使电流分布在中心尖化就可以稳定它们,一般要稳定的模式愈高(m 值愈大)所需的电流分布就应该愈尖. 此外,对于低 m 扭曲模,还可以用紧靠磁流体边界的完全导体壳来稳定.

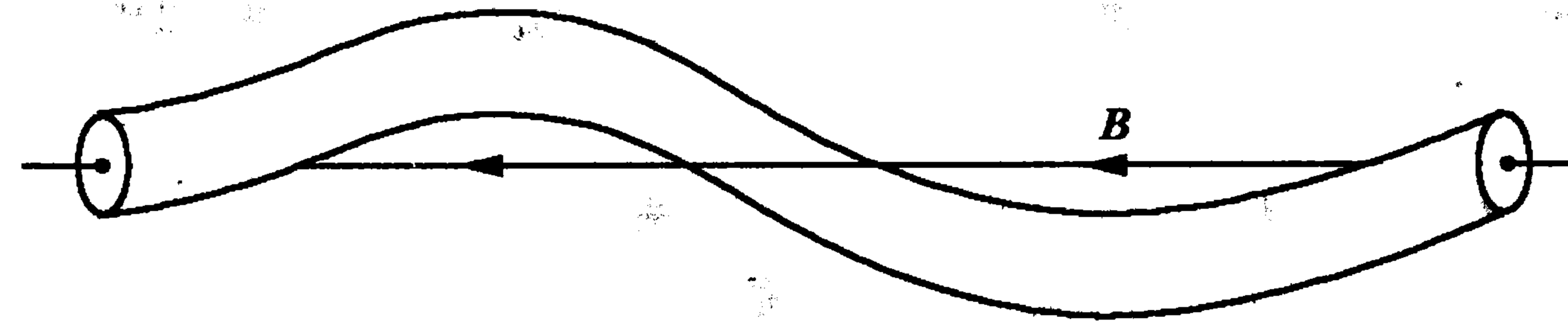


图 4.8 扭曲模的图形

(2) 内扭曲模

它们和外扭曲模的形状很相似,但扰动幅度一般要比外模的小. 事实上在 tokamak 中,只有 $m=1$ 的内扭曲模才会不稳定,其

稳定方法和 $m=1$ 的外模一样：低于某一临界值的总平行电流.

3. 交换模

这是压强梯度驱动的内部模，它并不一定是体系真正的扰动形式，而是代表一种特殊的不弯曲磁力线的试探函数(相应的 $\boldsymbol{B}_\perp \approx 0$，因而扰动引起的磁势能增量为零，没有稳定作用). 这种不稳定性是否会发生，要看磁力线曲率和压强梯度间的相对符号，其表达为

$$-2(\xi_\perp^* \cdot \nabla P_0)(\kappa \cdot \xi_\perp^*),$$

一般 $\nabla P_0<0$，故只有 $\kappa \cdot \xi_\perp^*<0$ 时，这项才为负. 而曲率 $\kappa<0$ 表示磁力线是凹向磁流体的(坏曲率). 反过来当磁力线凸向磁流体时(好曲率)，这项为正，不会产生不稳定扰动. 我们常把这种凸向磁流体的磁场位形称为磁阱、磁瓶或磁笼，即它们都能有效地克服磁流体的不稳定扰动而很好地约束磁流体. 由于标准的交换模不弯曲磁力线，相应的磁流体位移是沿磁力线整体隆起或凹下而表现成平行于磁力线的垄或槽，故有时又称这种模为槽形模.

最不稳定的交换模是垂直波长最短的扰动，因此它们在空间是高度局域化的(即对相应磁面的偏离很小). 它们往往和磁场的几何形态关系不大，比较容易作解析分析，从而给出由局部平衡量构成的、解析的稳定性判据(即稳定的必要条件). 在一维问题中这称为 Suydam 判据，而在二维问题中它被称为 Mercier 判据. 这是交换模所独有的，其他类型的不稳定模一般不存在类似的解析判据.

此外在垂直于磁场的方向上，中等或大尺度的交换型扰动也有可能存在(如 tokamak 等离子体中由压强梯度和平行电流共同驱动的内部 $m=1$ 扭曲模)，但由于尺度较大，一般只能通过数值方法来讨论. 唯一可用解析方法求解的是直 Z 箍缩中的 $m=0$ 的腊肠(sausage)模.

气泡模也是交换模的一种，只是其试探函数偏向磁化等离子体的坏曲率一侧，非常局域化(见下面的介绍).

稳定交换模的方法有：

(i) 足够强的磁剪切. 当剪切一大，在交换内、外相邻的磁通管时就容易弯曲磁力线，从而引起扰动磁能的较大提高，而正的扰动磁势能又会反过来抑制不稳定扰动的发展.

(ii) 平均磁阱. 在环形磁流体位形中，由于每根磁力线都会交替地经过好曲率(磁力线凸向等离子体中心)的内侧和坏曲率(磁力线凹向等离子体中心)的外侧，结果带电粒子在沿磁力线运动时就会平均地感受到一个好曲率的作用，使沿磁力线平均的扰动势能为正，从而抑制了平行扰动 $\xi_\parallel$ 非常长(超过环周长 $2\pi R$)的那类交换模. 但对平行(磁力线的)扰动较短的气泡模，这种平均磁阱就不起作用了.

4. 气泡模

它们由压强梯度驱动，可以是内模也可以是外模，但只出现在磁场几何位形在二维以上的磁流体中. 在 tokamak 等离子体中，人们主要对高 m(即在磁力线角向高度局域化)的内气泡模感兴趣. 因为这类模的稳定性判据限制了磁流体平衡位形可能达到的最大 β 极限，从而影响了磁约束装置的效率，也即未来聚变堆的经济效益.

气泡模的名称来自其扰动试探函数的形状：它们只集中在磁力线的坏曲率区而在其他区域则几乎为零，因此像一个突出于平滑磁面之上的小气泡. 这时对大尺度交换模很有抑制作用的环向平均"磁阱"，对它却不起什么作用了. 一般来说，气泡模总是多维的，而且由于在平行磁力线方向上的扰动 $\xi_\parallel$ 高度定域，使它不能用通常的傅氏分析来描述，而要用波包方法来分析——由此专门发展了适用描述它的气泡模表象.

4.2 一维位形下的理想磁流体不稳定性

一维位形指的是平衡位形可用一维磁流体平衡方程描述的磁

流体，如 θ 箍缩，Z 箍缩及螺旋箍缩. 其中 θ 箍缩和 Z 箍缩的讨论很简单，但可以帮助我们学会用能量原理来处理稳定性问题. 在螺旋箍缩上用能量原理就比较复杂，但从它导出的结果可以用来讨论环形磁流体位形(如 tokamak 等离子体)中的许多稳定性问题. 而且由螺旋箍缩能量原理的具体表达式还能得到三个重要的，和具体位形无关的，关于稳定性的结论：

(i) 定域交换模(指在径向、定域在某个有理面附近的一类不稳定扰动)的稳定性判据——Suydam 判据.

(ii) 对检验任意内模(在有理面或不在有理面附近)的试探函数其空间结构所作的一些规定——Newcomb 分析. 这使得选择最不稳定的试探函数变得比较容易和科学.

(iii) 给出不稳定性的本征值与相应本征函数在径向振荡行为之间的关系——振荡定理. 这样就对任意内模最不稳定的试探函数的形状作出了进一步的界定.

这几个结果在数值求解能量定理以判定是否存在不稳定性时特别有用，因为这时需要事先选取试探函数，而且要选的试探函数越不稳定越好.

4.2.1 θ 箍缩

令 $\boldsymbol{B}_0=(0,0,B_z(r))$，$\boldsymbol{J}_0=(0,J_\theta(r),0)$，平衡条件(方程)是

$$P(r)+\frac{B_z^2(r)}{2\mu}=\frac{B_a^2}{2\mu},$$

其中 B_a 是外磁场在边界 $r=a$ 处的值. 由于在 θ 箍缩中，外金属壳距等离子体边界很近，因此可以采取固定边界条件，即令边界扰动势能为零：$\delta W_s+\delta W_v=0$. 于是有

$$\delta W=\delta W_F=\frac{1}{2}\int \mathrm{d}\boldsymbol{r}\left[\frac{1}{\mu}|\boldsymbol{B}_{1\perp}|^2+\frac{B_0^2}{\mu}|\nabla\cdot\boldsymbol{\xi}_\perp|^2+\gamma P_0|\nabla\cdot\boldsymbol{\xi}|^2\right].$$

其中已经考虑到了在 θ 箍缩中，$\boldsymbol{J}_0\cdot\boldsymbol{B}_0=0$ 及 $\kappa=0$. 这样原式中的压强梯度及平行电流解稳项均为零. 于是从上式可以看出，无论取何种扰动，被积函数都是正的；也即 δW_F 永远为正——θ 箍缩不存在磁流体力学的不稳定性. 但为了帮助初学者熟悉处理能量原理的一般方法，下面仍形式上地来一步步演示.

在柱坐标下，磁流体在 z 向无限延伸，而在 θ 方向上有周期性，因此可以把试探函数写成

$$\boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{r})=\boldsymbol{\xi}(r)\exp[\mathrm{i}(m\theta+kz)],$$

其中 $m/r=k_\theta$ 是角向波数，k 是 z 向波数. 按前面的讨论，寻找使磁流体平衡位形发生不稳定扰动 $\boldsymbol{\xi}$ 的过程就是挑选合适的 $\boldsymbol{\xi}$，使 δW_F 不断极小化的过程. 前面也指出，极小化的第一步就是按不可压缩条件 $\nabla\cdot\boldsymbol{\xi}=0$ 来挑选平行扰动 $\xi_\parallel$. 由

$$\nabla_\parallel\cdot\boldsymbol{\xi}_\parallel=\boldsymbol{B}_0\cdot\nabla\frac{\xi_\parallel}{B_0}=-\nabla\cdot\boldsymbol{\xi}_\perp,$$

有

$$\boldsymbol{B}_0\cdot\nabla\frac{\xi_\parallel}{B_0}=B_z\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\xi_\parallel}{B_z}\right)=\frac{\partial\xi_\parallel}{\partial z}=\mathrm{i}k\xi_\parallel,$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{\xi}_\perp=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\xi_r)+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}(\xi_\theta)=\frac{1}{r}[(r\xi_r)'+\mathrm{i}m\xi_\theta].$$

故

$$\xi_\parallel=\xi_z=\frac{\mathrm{i}}{kr}[(r\xi_r)'+\mathrm{i}m\xi_\theta].$$

可以看到，只要 $k\neq 0$(即平行波长 λ_z 有限)，总存在满足不可压缩条件的 $\xi_\parallel$，当取这个 $\xi_\parallel$ 值时，扰动势能就被极小化成

$$\delta W_F=\frac{1}{2}\int \mathrm{d}\boldsymbol{r}\left[\frac{1}{\mu}|\boldsymbol{B}_{1\perp}|^2+\frac{B_0^2}{\mu}|\nabla\cdot\boldsymbol{\xi}_\perp|^2\right].$$

再代入

$$\boldsymbol{B}_{1\perp}=\boldsymbol{B}_r+\boldsymbol{B}_\theta,$$

$$|\boldsymbol{B}_{1\perp}|^2=|B_r|^2+|B_\theta|^2,\quad(\boldsymbol{B}_r\cdot\boldsymbol{B}_\theta=0)$$

其中

$$B_r=[\nabla\times(\boldsymbol{\xi}_\perp\times\boldsymbol{B}_0)]_r=-\frac{\partial}{\partial z}(\boldsymbol{\xi}_\perp\times\boldsymbol{B}_0)_\theta=\mathrm{i}kB_z\xi_r,$$

$$B_\theta = [\nabla\times(\boldsymbol{\xi}_\perp\times \boldsymbol{B}_0)]_\theta = \frac{\partial}{\partial z}(\boldsymbol{\xi}_\perp\times \boldsymbol{B}_0)_r = \mathrm{i}kB_z\xi_\theta,$$

故 $|\boldsymbol{B}_{1\perp}|^2=k^2B_z^2(|\xi_r|^2+|\xi_\theta|^2)$. 再利用

$$|\nabla\cdot\boldsymbol{\xi}_\perp|^2=\frac{1}{r^2}[|(r\xi_r)'|^2+m^2\xi_\theta^2+\mathrm{i}m(r\xi_r^*)'\xi_\theta-\mathrm{i}m(r\xi_r)'\xi_\theta^*],$$

将上二式代入扰动势能表达式后,可得

$$\delta W_F=\frac{1}{2}\int \mathrm{d}\boldsymbol{r}I(\xi_r,\xi_\theta)=\frac{1}{2}\int\mathrm{d}\boldsymbol{r}\Big[\frac{1}{\mu}k^2B_z^2(|\xi_r|^2+|\xi_\theta|^2)$$
$$+\frac{B_0^2}{\mu r^2}[|(r\xi_r)'|^2+m^2\xi_\theta^2+\mathrm{i}m(r\xi_r^*)'\xi_\theta-\mathrm{i}m(r\xi_r)'\xi_\theta^*]\Big].$$

为了进一步极小化上式,可以将其中的被积函数 $I(\xi_r,\xi_\theta)$ 对 ξ_r 或 ξ_θ 取极值. 但由于 ξ_θ 在被积函数中是以代数形式出现的,因此对它求上式的极值比较方便:

$$\frac{\partial I(\xi_\theta,\xi_r)}{\partial\xi_\theta}=k^2\xi_\theta^*+\frac{m^2}{r^2}\xi_\theta^*+\mathrm{i}\frac{m}{r^2}(r\xi_r^*)=0.$$

当取满足上面代数方程的 ξ_θ 时,即令

$$\xi_\theta^*=-\mathrm{i}\frac{m}{m^2+k^2r^2}(r\xi_r^*),$$

或

$$\xi_\theta=\mathrm{i}\frac{m}{m^2+k^2r^2}(r\xi_r),$$

就能使扰动势能进一步极小化. 将上式代入 δW_F,得

$$\frac{\delta W_F}{L}=\pi\int_0^a r\mathrm{d}r\frac{k^2B_z^2}{k_0^2r^2}[|(r\xi_r)'|^2+k_0^2r^2|\xi_r|^2].$$

其中 $k_0^2r^2=k^2r^2+m^2$,在导出上式时还用到了

$$\int\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_0^L\mathrm{d}z\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a r\mathrm{d}r=2\pi L\int_0^a r\mathrm{d}r,$$

其中 L 是 z 方向上柱的长度.

由上式可见除了在 $k^2=0$ 时 $\delta W_F=0$,从而体系处在临界稳定状态外,对其他任何的扰动 ξ_r,体系都是稳定的. 从物理上来看,稳定的原因是由于任何一个 ξ_r 都会弯曲或压缩平衡磁场,从而造成

磁能的增加,然后反过来抑制初始的扰动. 因此,θ 箍缩的磁流体位形有着最好的理想磁流体稳定性质.

4.2.2 Z 箍缩

这时 $\boldsymbol{B}_0=(0,B_\theta(r),0)$,$\boldsymbol{J}_0=(0,0,J_z(r))$,平衡条件为

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}r}+\frac{B_\theta}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(rB_\theta)=0.$$

首先,金属壳边条件仍然适用,因此 $\delta W=\delta W_F$,这表明只可能存在内模不稳定性. 其次,由于 $\boldsymbol{J}_0\cdot\boldsymbol{B}_0=0$,故不存在平行电流驱动的扭曲型不稳定模,只能有压强梯度驱动的交换模. 接下来是检查一下是否可以用不可压缩条件来极小化 δW_F. 同前,令

$$\boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{r})=\boldsymbol{\xi}(r)\exp[\mathrm{i}(m\theta+kz)],$$

从不可压缩条件可得

$$\xi_\parallel=\xi_\theta=\frac{\mathrm{i}}{m}[(r\xi_r)'+\mathrm{i}kr\xi_z].$$

这样,当 $m\neq0$ 时,仍可令 $\xi_\parallel=\xi_\theta(\xi_r,\xi_z)$,使 $\nabla\cdot\boldsymbol{\xi}=0$,从而极小化 δW_F. 但当 $m=0$ 时,不存在使 $\nabla\cdot\boldsymbol{\xi}=0$ 的合适 $\xi_\parallel$ 值. 但这时仍有 $\nabla_\parallel\cdot\xi_\parallel=(\mathrm{i}m/r)\xi_\theta=0$,故可取 $\nabla\cdot\boldsymbol{\xi}=\nabla\cdot\boldsymbol{\xi}_\perp$. 下面就分两种情况来继续讨论.

1. $m\neq0$ 情况

在取 $\nabla\cdot\boldsymbol{\xi}=0$,并考虑到 $\boldsymbol{J}_0\cdot\boldsymbol{B}_0=0$ 后,有

$$\frac{\delta W_F}{L}=\pi\int r\mathrm{d}r\Big[\frac{1}{\mu}|\boldsymbol{B}_{1\perp}|^2+\frac{B_0^2}{\mu}|\nabla\cdot\boldsymbol{\xi}_\perp$$
$$+2\boldsymbol{\xi}_\perp\cdot\boldsymbol{\kappa}|^2-2(\boldsymbol{\xi}_\perp\cdot\nabla P_0)(\boldsymbol{\kappa}\cdot\boldsymbol{\xi}_\perp^*)\Big].$$

利用

$$\boldsymbol{\kappa}=\boldsymbol{e}_b\cdot\nabla\boldsymbol{e}_b=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}(\boldsymbol{e}_\theta)=-\frac{1}{r}\boldsymbol{e}_r,$$

$$\boldsymbol{\xi}_\perp\cdot\boldsymbol{\kappa}=-\frac{\xi_r}{r},\quad \nabla\cdot\boldsymbol{\xi}_\perp=\frac{1}{r}[(r\xi_r)'+\mathrm{i}kr\xi_z].$$

右面被积函数中的第一项可进一步改写成

$$B_r = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}(\xi_\perp \times \boldsymbol{B}_\theta)_z = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}(\xi_r B_\theta) = \mathrm{i}\,\frac{m}{r}\xi_r B_\theta,$$

$$B_z = -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}(\xi_\perp \times \boldsymbol{B}_\theta)_r = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}(\xi_z B_\theta) = \mathrm{i}\,\frac{m}{r}\xi_z B_\theta,$$

$$|\boldsymbol{B}_{1\perp}|^2 = \frac{m^2}{r^2}B_\theta^2[|\xi_r|^2 + |\xi_z|^2].$$

第二项变为

$$|\nabla\cdot\xi_\perp + 2\xi_\perp\cdot\kappa|^2 = \left|\frac{1}{r}[(r\xi_r)' + \mathrm{i}kr\xi_z] - \frac{2}{r}\xi_r\right|^2$$

$$= \left|\xi_r' - \frac{\xi_r}{r} + \mathrm{i}k\xi_z\right|^2$$

$$= \left|\xi_r' - \frac{\xi_r}{r}\right|^2 + k^2|\xi_z|^2 + \mathrm{i}k\left(\xi_r^{*\prime} - \frac{\xi_r^*}{r}\right)\xi_z$$

$$- \mathrm{i}k\left(\xi'_r - \frac{\xi_r}{r}\right)\xi_z^*.$$

第三项成为

$$-2(\xi_\perp\cdot\nabla P_0)(\kappa\cdot\xi_\perp^*) = -2\left(\xi_r\frac{\partial P_0}{\partial r}\right)\left(-\frac{\xi_r^*}{r}\right) = \frac{2}{r}\frac{\mathrm{d}P_0}{\mathrm{d}r}|\xi_r|^2.$$

故最后得

$$\frac{\delta W_F}{L} = \pi\int_0^a r\mathrm{d}r\left[\frac{m^2}{r^2}B_\theta^2(|\xi_r|^2 + |\xi_z|^2) + B_\theta^2\left(\left|\xi_r' - \frac{\xi_r}{r}\right|^2 + k^2|\xi_z|^2\right.\right.$$

$$\left.\left. + \mathrm{i}k\left(\xi_r^{*\prime} - \frac{\xi_r^*}{r}\right)\xi_z - \mathrm{i}k\left(\xi_r' - \frac{\xi_r}{r}\right)\xi_z^*\right) + \frac{2}{r}\frac{\mathrm{d}P_0}{\mathrm{d}r}|\xi_r|^2\right].$$

其被积函数 $I(\xi_z,\xi_r)$ 中含 ξ_z 的项是代数型的，故可以用它来极小化 δW_F：

$$\frac{\partial I}{\partial \xi_z} = \frac{m^2}{r^2}B_\theta^2\xi_z^* + k^2B_\theta^2\xi_z^* + \mathrm{i}kB_\theta^2\left(\xi_r^{*\prime} - \frac{\xi_r^*}{r}\right) = 0,$$

有

$$\xi_z^* = -\frac{\mathrm{i}kr^3}{m^2 + k^2r^2}\left(\frac{\xi_r^*}{r}\right)'.$$

将它代入 $I(\xi_z,\xi_r)$后，得出对 ξ_z 极小化了的

$$I_{\min} = \frac{1}{r^2}(2rP_0' + m^2B_\theta^2)|\xi_r|^2 + \frac{m^2r^2B_\theta^2}{m^2 + k^2r^2}\left|\left(\frac{\xi_r}{r}\right)'\right|^2,$$

其中，k^2 出现在分母中，故可以令 $k^2\to\infty$来进一步极小化扰动势能 δW_F，这相当于集中注意力于一类最不稳定的、垂直于磁场方向上波长 $\lambda_z\to 0$ 的扰动. 这样最后可得

$$\frac{\delta W_F}{L} = \pi\int_0^a r\mathrm{d}rI_{\min,k\to\infty} = \pi\int_0^a \frac{\mathrm{d}r}{r}(2rP_0' + m^2B_\theta^2)|\xi_r|^2.$$

由此可得对于 Z 箍缩中 $m\neq 0$ 模，其稳定的充要条件是

$$2rP_0' + m^2B_\theta^2 > 0.$$

再利用平衡条件

$$P_0' = -\frac{1}{r}B_\theta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(rB_\theta),$$

上式就变成

$$\frac{r^2}{B_\theta}\left(\frac{B_\theta}{r}\right)' < \frac{1}{2}(m^2 - 4). \tag{4.36}$$

这就是内交换模的稳定性判据.

对传统的 Z 箍缩来说，B_θ/r 是 r 的递减函数，因此上式左面为负. 这样，只要 $m\geqslant 2$ 就能满足稳定性判据. 结果，$m=1$ 模是唯一可能不稳定的 $m\neq 0$ 模. 一般，在等离子体的外区(无电流，无洛伦兹力)，有 $B_\theta\sim 1/r$，于是

$$\text{不等式左面} = -2,$$

而这时

$$\text{判据的右边} = -3/2,$$

故稳定性条件满足. 在这部分等离子体中 $m=1$ 的内交换模也是稳定的. 而在等离子体的内区(热芯)，$B_\theta\sim r$，这样判据左面大于等于零，所以 $m=1$ 的内交换模将是不稳定的. 这样，对 Z 箍缩来说，在其内部的某一区域中总存在着 $m=1$ 的内交换不稳定性. 其物理图像如图 4.9，即初始扰动将磁流体弄弯后，弯曲段附近的磁场

在内侧增强而在外侧减弱，这样内侧的磁压强就超过外侧而使这段磁流体在原来扰动方向上进一步弯曲，也即使初始扰动不稳定地增大了. 这种使扰动不断放大的原理就是驱动磁流体不稳定性发生的机制. 从上面的讨论可以看到这种不稳定的模式是一种平行波长尽可能长($m=1$)、而垂直波长尽可能短($k_\perp=k_z\to\infty$)的扰动. 这使它们对磁力线 B_θ 的弯曲(从而磁扰动势能的增加)也尽可能地小，因此对初始扰动的抑制作用也是最小的，这就为这类扰动的不稳定增长预备了有利的发展条件.

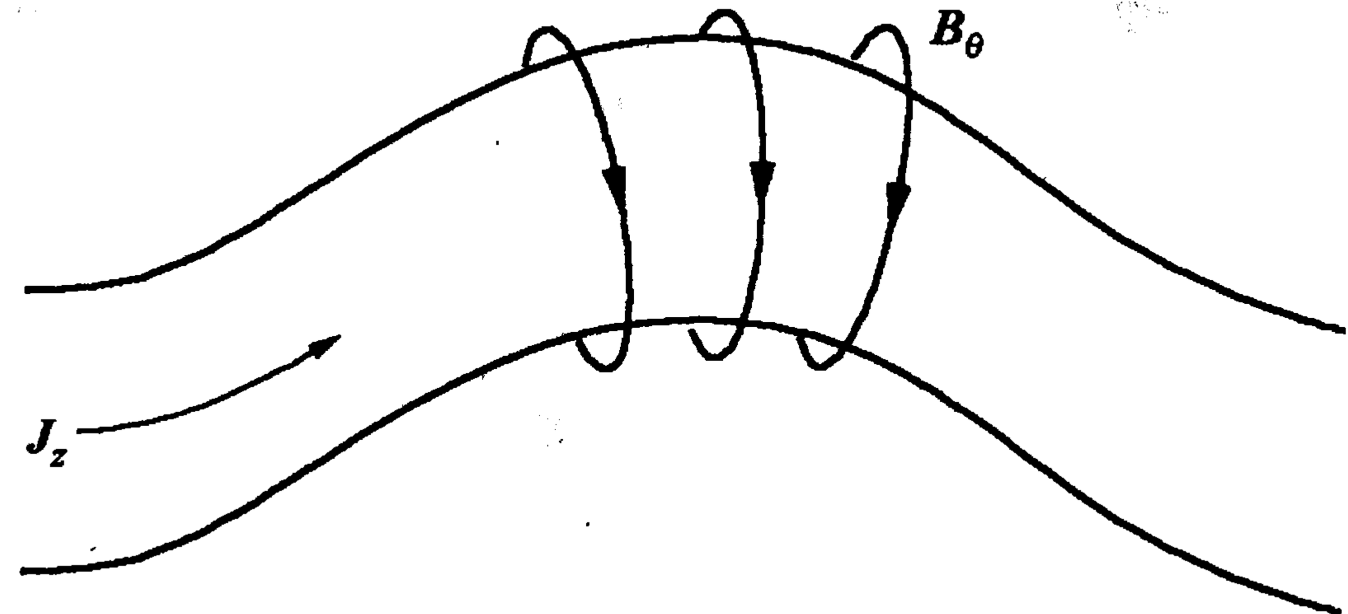


图 4.9 $m=1$ 的内交换模

2. $m=0$ 情况

因为 $m=0$，故 δW_F 中第一项 $|\boldsymbol{B}_{1\perp}|^2\propto m^2$(弯曲磁力线效应)为零，而第三项中 $\nabla\cdot\boldsymbol{\xi}=\nabla\cdot\boldsymbol{\xi}_\perp$，结果得

$$
\begin{aligned}
I(r) &= B_0^2|\nabla\cdot\boldsymbol{\xi}_\perp+2\boldsymbol{\xi}_\perp\cdot\boldsymbol{\kappa}|^2+\gamma P_0|\nabla\cdot\boldsymbol{\xi}_\perp|^2 \\
&\quad -2(\boldsymbol{\xi}_\perp\cdot\nabla P_0)(\boldsymbol{\kappa}\cdot\boldsymbol{\xi}_\perp^*) \\
&= B_0^2\left[r^2\left|\left(\frac{\xi_r}{r}\right)'\right|^2+k^2|\xi_z|^2+\mathrm{i}kr\left(\frac{\xi_r^*}{r}\right)'\xi_z-\mathrm{i}kr\left(\frac{\xi_r}{r}\right)'\xi_z^*\right] \\
&\quad +\frac{2}{r}\frac{\mathrm{d}P_0}{\mathrm{d}r}|\xi_r|^2+\gamma P_0\frac{1}{r^2}\left[|(r\xi_r)'|^2+k^2r^2|\xi_z|^2\right. \\
&\quad \left.+\mathrm{i}kr\xi_z(r\xi_r^*)'-\mathrm{i}kr\xi_z^*(r\xi_r)'\right].
\end{aligned}
$$

这时使 $I(r)$ 极小的 ξ_z 满足代数方程

$$
\frac{\partial I(r)}{\partial\xi_z}=0=B_0^2k^2\xi_z^*+\mathrm{i}krB_0^2\left(\frac{\xi_r^*}{r}\right)'+\gamma P_0k^2\xi_z^*+\mathrm{i}k\frac{\gamma P_0}{r}(r\xi_r^*)',
$$

结果有

$$
k\xi_z^*=-\frac{\mathrm{i}}{B_0^2+\gamma P_0}\left[rB_0^2\left(\frac{\xi_r^*}{r}\right)'+\frac{\gamma P_0}{r}(r\xi_r^*)'\right].
$$

注意到上式中 $B_0=B_\theta$，代入 δW_F 后，得

$$
\frac{\delta W_F}{L}=\pi\int_0^a\frac{\mathrm{d}r}{r}\left[\frac{4\gamma P_0B_\theta^2}{\gamma P_0+B_\theta^2}+2rP_0'\right]|\xi_r|^2.
$$

这样 $m=0$ 模的稳定充要条件就是

$$
\frac{4\gamma P_0B_\theta^2}{\gamma P_0+B_\theta^2}+2rP_0'>0,
$$

或写成通常采用的 Z 箍缩中 $m=0$ 模的稳定性判据

$$
-\frac{rP_0'}{P_0}<\frac{2\gamma B_\theta^2}{\gamma P_0+B_\theta^2}. \tag{4.37}
$$

因为 $P_0'<0$，故上式在 $|P_0'|$ 较小时是可以满足的. 但如果 $|P_0'|$ 较大，就会出现不稳定的 $m=0$ 内交换模，通常又称为腊肠模. 它的发生机制可以从图 4.10 中看出：当初始扰动使某一段磁流体柱变细后，由于流过等离子体的总电流不变，故流过这一段的电流密度就比平衡值大了一些，结果它附近的磁场就比平衡值增强了，从而使此地向内的磁压力超过平衡值(及平衡时的向外热压力)，于是这段磁流体就因被压缩而进一步变细，也即初始扰动被放大了. 这种正反馈式的驱动机制最终会使 Z 箍缩的放电柱被从当中勒断而崩溃.

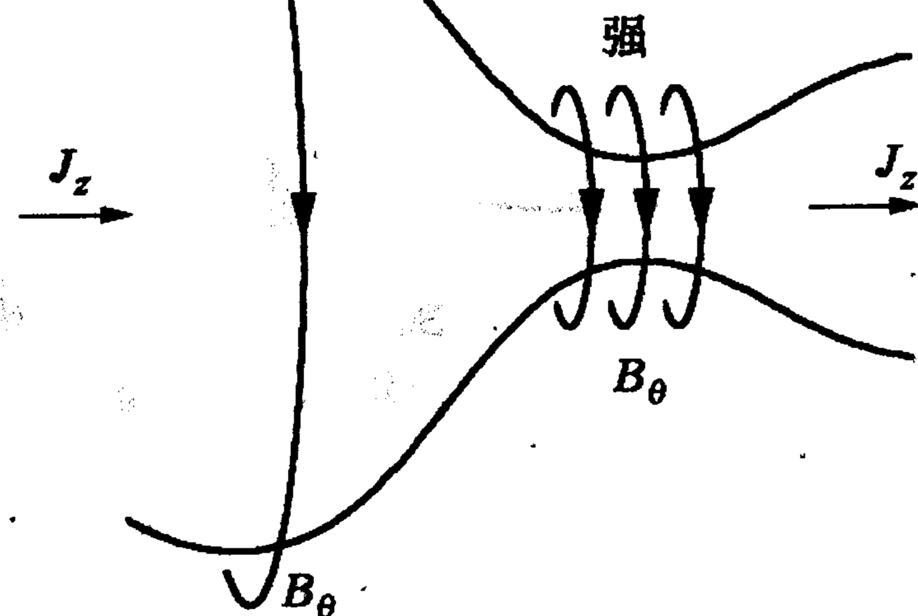


图 4.10 $m=0$ 的内交换模——腊肠模

4.2.3 螺旋箍缩

这时平衡磁场和电流分别为

$$\boldsymbol{B} = B_\theta(r)\boldsymbol{e}_\theta + B_z(r)\boldsymbol{e}_z, \quad \boldsymbol{J} = J_\theta(r)\boldsymbol{e}_\theta + J_z(r)\boldsymbol{e}_z.$$

平衡方程是(见 2.1.5 小节)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[P + \frac{1}{2\mu}(B_\theta^2 + B_z^2)\right] + \frac{B_\theta^2}{r} = 0.$$

一般这种位形的边界取成“磁流体＋真空区＋导电壳”的边条件，在磁流体和真空的界面$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_s$处有连接条件

$$P(\boldsymbol{r}_s) + \frac{1}{2\mu}B^2(\boldsymbol{r}_s) = \frac{1}{2\mu}B_v^2(\boldsymbol{r}_s),$$

其中B_v是真空区中的磁场. 上面所有表达式都是在柱坐标系(r,θ,z)中写出的，这时扰动矢量一般写成

$$\boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{\xi}(r)\exp[\mathrm{i}(m\theta + kz)].$$

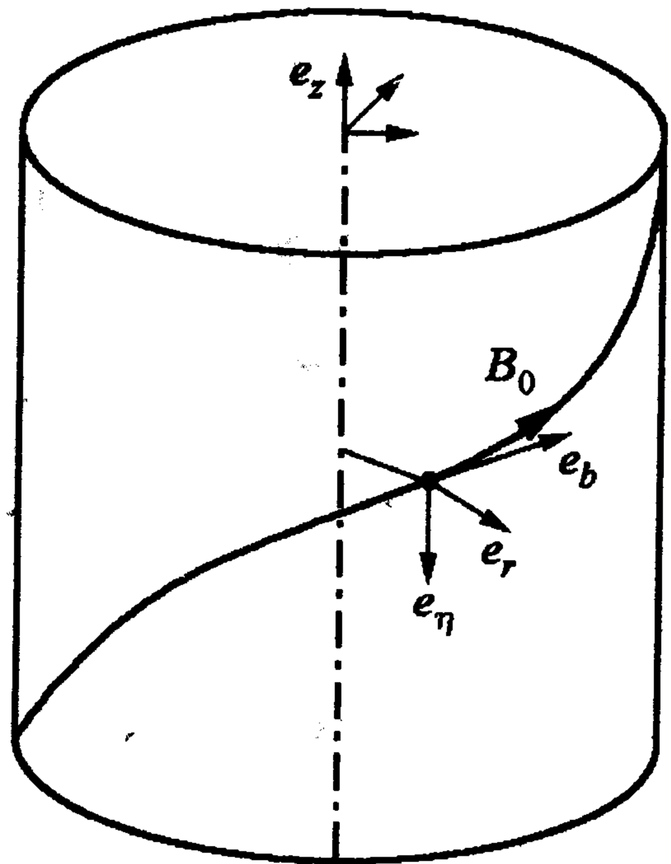


图 4.11 螺旋箍缩的坐标系

但在螺旋箍缩中往往用螺旋坐标系$(\boldsymbol{e}_r,\boldsymbol{e}_\eta,\boldsymbol{e}_b)$更方便. 其中$\boldsymbol{e}_r$是柱形磁面上某点处磁力线的法线方向，$\boldsymbol{e}_b$是切向也即磁力线的方向，而$\boldsymbol{e}_\eta$则是次法线方向，三者构成一个直角坐标系. 这种坐标系又称为磁力线坐标系，见图 4.11. 它们与普通柱坐标之间的关系是

$$\boldsymbol{e}_b = \frac{\boldsymbol{B}}{B}, \quad \boldsymbol{e}_\eta = (B_z\boldsymbol{e}_\theta - B_\theta\boldsymbol{e}_z)/B, \qquad (4.38)$$

其中$B^2 = B_\theta^2 + B_z^2$. 而扰动矢量这时可以写作$\boldsymbol{\xi}(r) = (\xi,\eta,\xi_\parallel)$，它们和柱坐标下的扰动分量间有变换关系

$$\xi_\parallel = (\xi_\theta B_\theta + \xi_z B_z)/B,$$
$$\eta = (\xi_\theta B_z - \xi_z B_\theta)/B.$$

极小化的第一步，照例是检验不可压缩条件，因为

$$\boldsymbol{B}\cdot\nabla\left(\frac{\xi_\parallel}{B}\right) = \left(B_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + B_z\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(\frac{\xi_\parallel}{B}\right)$$
$$= \left(\mathrm{i}B_\theta\frac{m}{r} + \mathrm{i}kB_z\right)\left(\frac{\xi_\parallel}{B}\right)$$
$$\equiv \mathrm{i}F(r)\frac{\xi_\parallel}{B},$$

其中$F(r) = \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{B} = (m/r)B_\theta + kB_z$是$\boldsymbol{B}\cdot\nabla$作用到$\exp[\mathrm{i}(m\theta + kz)]$上的结果，这在下面的讨论中是非常有用的一个量. 故由$\nabla\cdot\boldsymbol{\xi} = 0$，导致

$$\xi_\parallel = \mathrm{i}\frac{B}{F}\nabla\cdot\boldsymbol{\xi}_\perp.$$

这样，当$F\neq 0$时总可以选择合适的$\xi_\parallel$以满足不可压缩条件，并极小化δW_F. $F\neq 0$的平衡磁面一般称为无理磁面，而$F_s = F(r_s) = 0$的磁面则称为有理磁面.

下面将证明：在有理面处，虽然$\xi_\parallel$发散，但仍可以用不可压缩条件来极小化δW. 对应于$F_s = 0$的某个磁面，令

$$\xi_\parallel = \frac{\mathrm{i}BF}{F^2 + \sigma^2}\nabla\cdot\boldsymbol{\xi}_\perp,$$

其中$\sigma^2 > 0$，但是一个小量，等到计算完成后将取它为零. 在上式的定义下，当$F = 0$时$\xi_\parallel$并不发散，因此可以得出

$$\nabla_\parallel\cdot\boldsymbol{\xi}_\parallel = \mathrm{i}\frac{F}{B}\xi_\parallel = -\frac{F^2}{F^2 + \sigma^2}\nabla\cdot\boldsymbol{\xi}_\perp,$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{\xi} = \nabla_\parallel\cdot\boldsymbol{\xi}_\parallel + \nabla\cdot\boldsymbol{\xi}_\perp = \frac{\sigma^2}{F^2 + \sigma^2}\nabla\cdot\boldsymbol{\xi}_\perp.$$

故有

$$|\nabla\cdot\boldsymbol{\xi}|^2 = \frac{\sigma^2}{F^2 + \sigma^2}\frac{\sigma^2}{F^2 + \sigma^2}|\nabla\cdot\boldsymbol{\xi}_\perp|^2.$$

令$F = F_s + F_s'(r - r_s) = F_s'(r - r_s)$，于是

$$\frac{\sigma^2}{F^2 + \sigma^2} = \frac{\sigma^2}{F_s'^2(r - r_s)^2 + \sigma^2}.$$

当 $r\neq r_s$，但 $\sigma\to 0$ 时，利用

$$\frac{1}{\pi}\lim_{\sigma\to 0}\frac{\sigma}{(x-x_0)^2+\sigma^2}=\delta(x-x_0),$$

有(当 σ 足够小时)

$$\frac{\sigma^2}{F^2+\sigma^2}\approx \pi\sigma\delta[F_s'(r-r_s)]=\frac{\pi\sigma}{F_s'}\delta(r-r_s).$$

所以 δW_F 中和 $|\nabla\cdot\xi|^2$ 有关的项可表示成

$$\frac{1}{2}\int\gamma P|\nabla\cdot\xi|^2\mathrm{d}r=\frac{1}{2}\pi L\int_0^a\gamma P\frac{\sigma^2}{F^2+\sigma^2}\frac{\sigma^2}{F^2+\sigma^2}|\nabla\cdot\xi_\perp|^2r\mathrm{d}r$$

$$=\frac{\sigma}{2}\pi^2L\int_{r_s-\Delta}^{r_s+\Delta}\gamma P\frac{\sigma^2}{F^2+\sigma^2}|\nabla\cdot\xi_\perp|^2\frac{1}{F_s'}\delta(r-r_s)r\mathrm{d}r$$

$$=\frac{\sigma}{2}\pi^2L\left[\gamma Pr\frac{|\nabla\cdot\xi_\perp|^2}{F'}\right]_{r=r_s}.$$

当 $\sigma\to 0$ 时，上面的积分就趋于零. 这说明对于螺旋箍缩位形，即使在有理面处仍然可以用不可压缩条件 $\nabla\cdot\xi=0$ 来极小化 δW_F. 上述运算的物理意义是这样的，虽然在磁流体中的一个个有理面处 $F_s=0$，从而使平行扰动发散，但这些有理面都是分离的，而且厚度为无穷小，所以其积分效果仍然为零，而扰动势能 δW_F 正好是这样一个积分.

故在第一步，我们仍可以在磁流体内的任何地方取不可压缩条件 $|\nabla\cdot\xi|^2=0$ 来极小化 δW_F. 随之得到的扰动势能只是另两个扰动变量 ξ 和 η 的函数，而且在其中 η 以代数项的形式出现(详细的推导及表达式请见附录 E 及(E.7)式).

所以在第二步，可以通过对 η 的选取来进一步极小化 δW_F. 设 $\delta W_F=(1/2)\int\mathrm{d}rI(\xi,\eta)$，由

$$\frac{\partial I(\xi,\eta)}{\partial\eta}=0,$$

可得(见附录(E.9)式)

$$\eta=\frac{\mathrm{i}}{rk_0^2B}[G(r\xi)'+2kB_\theta\xi],\tag{4.39}$$

其中

$$k_0^2=k^2+\frac{m^2}{r^2},\quad G=\frac{m}{r}B_z-kB_\theta.\tag{4.40}$$

将这个 η 值代入 $I(\xi,\eta)$，最后可整理成(详见附录(E.10)式)

$$\frac{\delta W_F}{L}=\pi\int_0^a\mathrm{d}r(f\xi'^2+g\xi^2)+\frac{\pi}{2\mu}\left[\frac{k^2r^2B_z^2-m^2B_\theta^2}{k_0^2r^2}\right]_a\xi^2(a)$$

$$=\frac{\delta W_p}{L}+\frac{\delta W_s'}{L},\tag{4.41}$$

其中

$$\frac{\delta W_p}{L}=\pi\int_0^a\mathrm{d}r(f\xi'^2+g\xi^2),$$

$$\frac{\delta W_s'}{L}=\frac{\pi}{2\mu}\left[\frac{k^2r^2B_z^2-m^2B_\theta^2}{k_0^2r^2}\right]_a\xi^2(a)=\frac{\pi}{2\mu}\frac{Fh}{k_0^2}|\xi|^2\Big|_a.$$

在上面式子中，有一些在后面非常有用的简化符号表达式(参见附录(E.21)式)：

$$f=\frac{rF^2}{\mu k_0^2},\tag{4.42}$$

$$g=2\frac{k^2}{k_0^2}P'+\frac{k_0^2r^2-1}{\mu k_0^2r^2}rF^2+\frac{2k^2}{\mu rk_0^4}\left(kB_z-\frac{mB_\theta}{r}\right)F;\tag{4.43}$$

而

$$k_0^2=k^2+\frac{m^2}{r^2},\tag{4.44}$$

$$F=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{B}=\frac{m}{r}B_\theta+kB_z,\tag{4.45}$$

$$h=kB_z-\frac{m}{r}B_\theta.\tag{4.46}$$

上面给出的表达式还常被用在 $a/R\ll 1$(a 是环柱的小半径，而 R 是大半径)情况下的环形位形(如反场箍缩，tokamak 等)磁流体中. 这时直柱几何变成了直环，只须令环向角 ϕ 和环向波数 n 分别为

$$\phi = \frac{z}{R_0}, \quad n = -kR_0,$$

则傅氏因子就可从柱形变为环形

$$e^{i(m\theta+kz)} = e^{i(m\theta-n\phi)}.$$

这时上面的 F,h,f,g 对 k 的依赖则可以变成对直环波数 n 的依赖：

$$F = \frac{B_\theta}{r}(m - nq), \quad q = \frac{r}{R_0}\frac{B_z}{B_\theta}, \tag{4.47}$$

$$h = -\frac{B_\theta}{r}(nq + m), \tag{4.48}$$

$$f = \frac{rB_\theta^2}{\mu}\frac{(m-nq)^2}{m^2 + n^2r^2/R_0^2}, \tag{4.49}$$

$$g = \frac{2n^2r^2/R_0^2}{m^2+n^2r^2/R_0^2}\frac{dP}{dr} + \frac{B_\theta^2}{\mu r}\left[\frac{m^2 - 1 + n^2r^2/R_0^2}{m^2+n^2r^2/R_0^2}(m-nq)^2 + \frac{2n^2r^2/R_0^2}{(m^2+n^2r^2/R_0^2)^2}[(nq)^2 - m^2]\right]. \tag{4.50}$$

下面给出总扰动势能中的表面扰动能积分和真空扰动能积分在螺旋箍缩下的表达式. 首先来看表面扰动能，由

$$\delta W_s = \frac{1}{2}\oint_S dS|\boldsymbol{n}\cdot\xi_\perp|^2\boldsymbol{n}\cdot[\![\nabla(P + B^2/2\mu)]\!],$$

其中 $dS\boldsymbol{n}=d\boldsymbol{S}$. 当无面电流时，利用平衡方程可得

$$[\![\nabla_n(P + B^2/2\mu)]\!] = \frac{\partial}{\partial r}\left[P + \frac{B^2}{2\mu} - \frac{B_v^2}{2\mu}\right]\Bigg|_{r=r_s}.$$

对上式作分部积分，并利用磁流体-真空连接条件

$$P(r_s) + \frac{B^2(r_s)}{2\mu} = \frac{B_v(r_s)^2}{2\mu},$$

可得(当不存在边界面电流时)

$$\delta W_s = 0.$$

再来看真空扰动能

$$\delta W_v = \frac{1}{2}\int_{真空区} d\boldsymbol{r}|\boldsymbol{B}_{v1}|^2.$$

利用 $\nabla\cdot\boldsymbol{B}_1=0$ 及 $\nabla\times\boldsymbol{B}_1=0$，可令 $\boldsymbol{B}_1=\nabla\phi_1$，并可得

$$\nabla^2\phi_1 = 0.$$

作傅氏变换 $\phi_1(\boldsymbol{r})=\phi_1(r)\exp[i(m\theta+kz)]$后，上述方程在柱几何下的通解为

$$\phi(r) = C_1K_m(kr) + C_2I_m(kr).$$

其中 K_m 和 I_m 是虚宗量贝塞尔函数，而常数 C_1 和 C_2 可由内、外边界条件来定出.

首先，在 $r=b$ 的外边界(金属壳)处有：$B_{1r}(b)=0$；这导致

$$\phi_1'(b) = 0, \tag{4.51}$$

由此可定出(例如)C_2. 于是

$$\phi_1(r) = C_1\left[K_m(kr) - \frac{K_m'(kb)}{I_m'(kb)}I_m(kr)\right].$$

其次，在 $r=a$ 的内边界(磁流体-真空)处有未扰动的平衡条件

$$\boldsymbol{n}_0\cdot\boldsymbol{B}_{v0} = \boldsymbol{n}_0\cdot\boldsymbol{B}_0.$$

其中 $\boldsymbol{n}_0$ 是从真空区内来看的未扰动(平衡)磁面的法向方向. 因为在磁流体的一边，$B_{0r}(a)=0$，所以上式就意味着 $B_{v,0r}(a)=0$；这样，扰动的真空磁场在界面法线方向上的投影就可写成

$$\boldsymbol{n}_0\cdot\boldsymbol{B}_{v1}(a) = \boldsymbol{n}_0\cdot\nabla\times(\xi\times\boldsymbol{B}_{v0})|_a,$$

$$\begin{aligned}B_{v1,r}(a) &= \boldsymbol{B}_{v0}\cdot\nabla(\boldsymbol{n}_0\cdot\xi_\perp)|_a - (\boldsymbol{n}_0\cdot\xi_\perp)[\boldsymbol{n}_0\cdot(\boldsymbol{n}_0\cdot\nabla)\boldsymbol{B}_{v0}]|_a \\ &= \boldsymbol{B}_{v0}\cdot\nabla(-\xi_r)|_a - (-\xi_r)[(\boldsymbol{n}_0\cdot\nabla)B_{v0,r}]|_a \\ &= iF(a)\xi_r(a).\end{aligned}$$

其中已利用了 $\boldsymbol{n}_0=-\boldsymbol{e}_r$ 及

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{n}_0\cdot[\nabla\times(\xi_\perp\times\boldsymbol{B}_{v0})] \\ &= \boldsymbol{n}_0\cdot[\xi_\perp\nabla\cdot\boldsymbol{B}_{v0} - \boldsymbol{B}_{v0}(\nabla\cdot\xi_\perp) + (\boldsymbol{B}_{v0}\cdot\nabla)\xi_\perp - (\xi_\perp\cdot\nabla)\boldsymbol{B}_{v0}] \\ &= \boldsymbol{n}_0\cdot(\boldsymbol{B}_{v0}\cdot\nabla)\xi_\perp - \boldsymbol{n}_0\cdot(\xi_\perp\cdot\nabla)\boldsymbol{B}_{v0}\end{aligned}$$

$$=\boldsymbol{B}_{v0}\cdot\nabla(\boldsymbol{n}_0\cdot\boldsymbol{\xi}_\perp)-\boldsymbol{n}_0\cdot(\boldsymbol{\xi}_\perp\cdot\boldsymbol{n}_0\boldsymbol{n}_0\cdot\nabla)\boldsymbol{B}_{v0}$$
$$=\boldsymbol{B}_{v0}\cdot\nabla(\boldsymbol{n}_0\cdot\boldsymbol{\xi}_\perp)-(\boldsymbol{n}_0\cdot\boldsymbol{\xi}_\perp)[\boldsymbol{n}_0\cdot(\boldsymbol{n}_0\cdot\nabla)\boldsymbol{B}_{v0}].$$

于是第二个边界条件可写成

$$\phi_1'=\mathrm{i}F(a)\xi_a, \tag{4.52}$$

由此可以进一步定出 C_1,

$$C_1=\mathrm{i}\frac{F(a)\xi_a}{\mathrm{K}_m'(ka)}\left[1-\frac{\mathrm{K}_m'(kb)\mathrm{I}_m'(ka)}{\mathrm{I}_m'(kb)\mathrm{K}_m'(ka)}\right]^{-1}.$$

所以

$$\delta W_v=\frac{\pi L}{2\mu}\lambda\frac{r^2F^2}{m}\bigg|_a\xi^2(a), \tag{4.53}$$

其中

$$\lambda=-\frac{m\mathrm{K}_m(ka)}{ka\mathrm{K}_m'(ka)}\left[\frac{1-\mathrm{K}_m'(kb)\mathrm{I}_m(ka)/(\mathrm{I}_m'(kb)\mathrm{K}_m(ka))}{1-\mathrm{K}_m'(kb)\mathrm{I}_m'(ka)/(\mathrm{I}_m'(kb)\mathrm{K}_m'(ka))}\right]$$
$$\sim\frac{1+(a/b)^{2m}}{1-(a/b)^{2m}},$$

导出上式的最后一步时用到了近似($ka,kb\ll1$). 在这样的近似下有

$$\delta W_v=\frac{\pi L}{2}\xi^2(a)\frac{(krB_z+mB_\theta)_a^2}{m}\frac{1+(a/b)^{2m}}{1-(a/b)^{2m}}\quad(m\neq0).$$

以上表达式是用于柱形位形的,对环形位形有

$$\delta W_v=\frac{\pi L}{2\mu}\xi^2(a)B_{\theta a}^2\frac{(m-nq)_a^2}{m}\frac{1+(a/b)^{2m}}{1-(a/b)^{2m}}\quad(m\neq0).$$

最后,在不存在界面面电流时(这是一般的实验中常有的情况),在经过了对 $\xi_\parallel$ 和 η 的极小化后,总的螺旋箍缩扰动势能可写成 ξ 的函数

$$\delta W=\delta W_F+\delta W_v=\delta W_p+\delta W_s'+\delta W_v=\delta W_p+\delta W_a. \tag{4.54}$$

其中的体积扰动势能是

$$\delta W_p=\frac{\pi L}{2}\int_0^a\mathrm{d}r(f|\xi'|^2+g|\xi|^2).$$

而表面扰动势能是

$$\delta W_a=\frac{\pi L}{2\mu}\xi^2(a)\left[\frac{Fh}{k_0^2r^2}+\frac{\lambda}{m}r^2F^2\right]_a, \tag{4.55}$$

其中的各简化符号表达式已在前面分别给出(包括直柱和环形两种位形情况). 上述扰动势能只和 ξ,ξ' 及 ξ_a 有关,当磁流体边界扰动 $\xi_a=0$ 时,$\delta W_a=0,\delta W=\delta W_p$;这时若存在不稳定的扰动,就称为内(固定边界)模. 相反,计入了边界扰动的不稳定扰动,则称为外(自由边界)模.

从上面给出的螺旋箍缩扰动势能的一般表达式,可以看到它还和磁流体的平衡量(已略去了下标"0")$P(r)$,$\boldsymbol{B}(r)$,$J(r)$的具体形式和剖面形状有关,因此,只有给定了上述诸量后才能用能量原理来讨论相应的不稳定性. 但在对上面平衡量不作进一步规定时,仍可以得出一些关于稳定性的普遍性结论. 这就是

(i) 在有理面附近,定域内交换模的稳定性条件——Suydam 判据.

(ii) 关于非定域内模稳定性的充要条件——Newcomb 分析. 此分析由 14 个定理组成(详见文献[10]),它们规定了:为使任意内模(包括非定域内模)稳定,小扰动 $\xi(r)$ 必须满足的一组充要条件. 但这些条件不像 Suydam 判据那样是解析表达式,也并不通过平衡量给出,而是对 $\xi(r)$ 的函数结构作出一些规定,从而使得进一步的数值计算变得简单了.

(iii) 振荡定理:当定域内模是不稳定的时候,相应模数的非定域内模更是不稳定的. 这时可证,对于最不稳定的非定域内模、其扰动位移 $\xi(r)$ 是在有理面 r_s—a(边界)之间没有零点的函数. 因此,在进行能量原理的数值解时,就可以挑选上述类型的试探函数来作计算.

下面,我们只对 Suydam 判据作详细介绍,因为它将在讨论

tokamak 等离子体的定域内模时用到. 而另两个结论都和能量原理的数值解有关,就请参考有关文献了.

4.2.4 螺旋箍缩中定域内模的 Suydam 判据

在有理面 $r=r_s$ 处,$F(r_s)=0$,δW_p 中除了 P' 项外都为零. 而由于 $P'<0$,故此项总是负的,也即会驱动内交换模不稳的. 从物理上来看,在有理面处有 $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{B}_0=k_\parallel B_0=0$,也即平行波长无限大的扰动 $\xi(r_s)$因其不会弯曲磁力线,所以不会受到磁场的抑制. 但如果扰动发展到一定程度,波及附近 $F\neq 0$ 的磁面,这时就会弯曲和压缩磁力线、引起磁势能的增加,从而阻止扰动的进一步增长. 所以这类扰动在径向只能定域在某个有理面附近的一个窄层中——因此被称为定域内模.

对这类模,可以得出一个解析的稳定性判据. 但导出这个条件时用的 $\xi(r)$并不是按极小化操作得出的试探函数,而只是从物理上猜出的会使自己获得不稳定增长的一种扰动函数,并不能排除还存在着使平衡位形更加不稳定的其他扰动. 故这样得出的稳定性条件(Suydam 判据)只是充分条件而不是必要条件.

根据上面的定性分析,$\xi(r)$只有在有理面 r_s 附近的一薄层中才不为零,故可把 δW_p 中的 f,g 分别在 r_s 附近展开;令 $x=r-r_s$,则

$$f(r)=\frac{rF^2}{\mu k_0^2}\bigg|_r=f(r_s)+\frac{\partial f}{\partial r}\bigg|_{r_s}x+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}\bigg|_{r_s}x^2.$$

由于 $F(r_s)=0$,故展开的头两项为零,上式的最后一项成为展开的头一项:

$$f(r)=\frac{rF'^2}{\mu k_0^2}\bigg|_{r_s}x^2.$$

而 g 只需展开到零阶项,

$$g(r)=g(r_s)=2\frac{k^2}{k_0^2}P'\bigg|_{r_s}.$$

所以,

$$I\equiv f\left(\frac{d\xi}{dr}\right)^2+g\xi^2=\frac{r_sF'^2}{k_0^2}\bigg|_{r_s}\left[\frac{x^2}{\mu}\left(\frac{d\xi}{dx}\right)^2+\frac{2k^2P'}{rF'^2}\bigg|_{r_s}\xi^2\right].$$

这样

$$\frac{\delta W_p}{L}=\pi\left|\frac{rF'^2}{k_0^2}\right|_{r_s}\delta W_f.$$

而

$$\delta W_f=\int_{-\Delta}^{\Delta}\left[\frac{x^2}{\mu}\left(\frac{d\xi}{dx}\right)^2+\alpha\xi^2\right]dx,$$

其中 Δ 是扰动 $\xi(r)$的存在域($\Delta\ll a$). 而

$$\alpha=\left[\frac{2k^2P'}{rF'^2}\right]_{r_s}=\left[\frac{2P'\nu^2}{rB_z^2\nu'^2}\right]_{r_s}<0.$$

其中 $\nu=B_\theta/(rB_z)$正比于磁场 $\boldsymbol{B}_\theta$ 和 $\boldsymbol{B}_z$ 间的夹角,而 ν'则正比于磁场剪切. 求使 $\delta W_p<0$(也即 δW_f)的不稳定扰动 ξ 的步骤如下:首先通过求 δW_f 极小的方法得出这时 ξ 所应满足的欧拉-拉格朗日微分方程;其次求出此方程的解;由于此解在 $x=0$ 点是奇异的,不是物理上允许的扰动,故第三步是在上述解的基础上设法构成一个在 $x=0$ 处不奇异、但又能保持原来解特点的"人工"解;最后将此解代入 δW_f,以验证其是否小于零,也即这种扰动是否是不稳定的扰动.

δW_f 的欧拉-拉格朗日方程式可由其变分极小来求出

$$\delta(\delta W_f)=\delta W_f(\xi+\delta\xi)-\delta W_f(\xi)=0$$

$$=\int_{-\Delta}^{\Delta}dx\left[\frac{x^2}{\mu}\left(\frac{d\xi}{dx}+\frac{d\delta\xi}{dx}\right)^2+\alpha(\xi+\delta\xi)^2-\frac{x^2}{\mu}\left(\frac{d\xi}{dx}\right)^2-\alpha\xi^2\right].$$

在略去二阶变分项后,得

$$\int_{-\Delta}^{\Delta}dx\left[\frac{2x^2}{\mu}\frac{d\xi}{dx}\frac{d\delta\xi}{dx}+2\alpha\xi\delta\xi\right]=0.$$

分部积分,并利用 $\delta\xi(\Delta)=\delta\xi(-\Delta)=0$,上式可写成

$$\int_{-\Delta}^{\Delta}dx\left[-\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{\mu}\frac{d\xi}{dx}\right)+\alpha\xi\right]\delta\xi=0.$$

因为在$(-\Delta,\Delta)$之间，$\delta\xi$ 是任意的，故上式意味着

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{x^2}{\mu}\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}x}\right)-\alpha\xi=0. \tag{4.56}$$

这就是所谓的欧拉-拉格朗日方程. 设这方程式的解形为 $\xi=C_1x^{p_1}+C_2x^{p_2}$，代入后得一代数方程

$$p(p+1)-\alpha\mu=0,$$

其解为

$$p_{1,2}=-\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}(1+4\alpha\mu)^{1/2}. \tag{4.57}$$

当 $1+4\alpha\mu<0$ 时，$p_{1,2}$是复数，有

$$\xi=\frac{1}{|x|^{1/2}}[C_1\sin(k_r\ln|x|)+C_2\cos(k_r\ln|x|)], \tag{4.58}$$

$$k_r=\frac{1}{2}[-(1+4\alpha\mu)]^{1/2}.$$

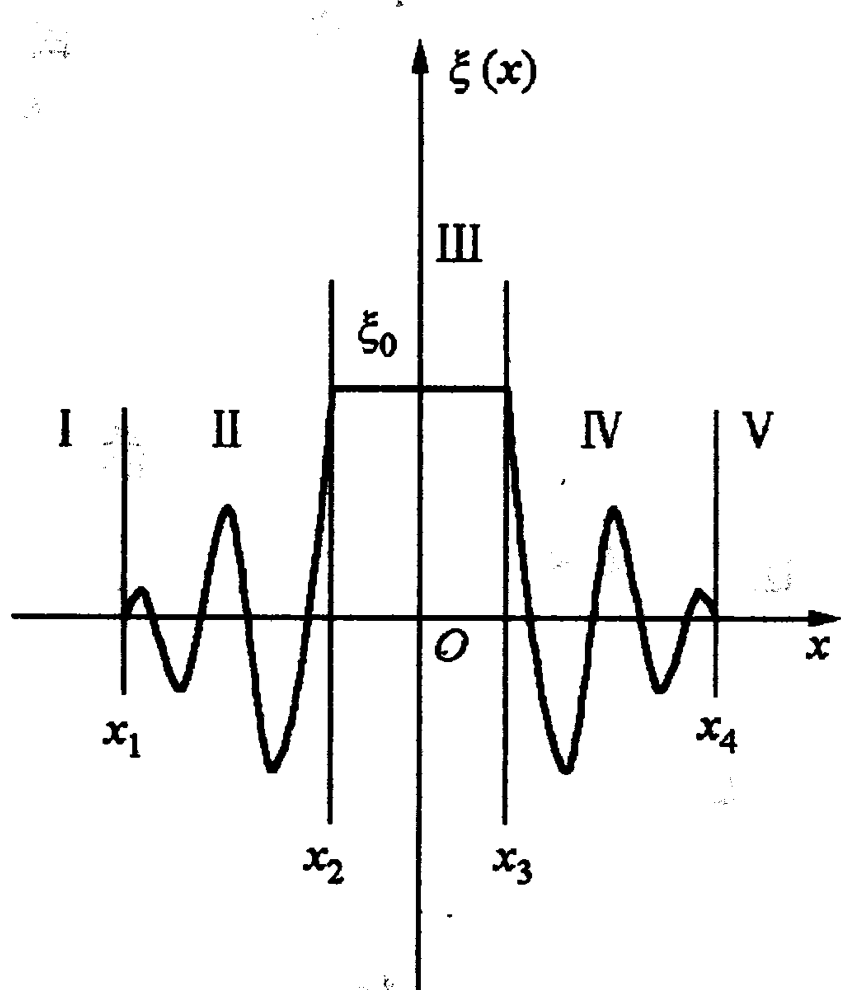


图 4.12　人为的试探函数 $\xi(x)$

上述解在 $x\to0$ 时，以 $1/|x|^{1/2}$为包络、快速振荡地增大乃至于发散(见图 4.12)，因而不是物理上允许的扰动. 但基于这种振荡行为，我们可以人为地构造一种试探函数 $\xi(r)$，它能使 $\delta W_f<0$，而在 $x\to0$ 时又具有好行为(不发散). 这种 $\xi(r)$虽然不一定能使 δW_f 极小，但却是物理上允许的. 它可以按下面的方法构成，按图中那样把整个区间分成五个部分. 在 Ⅰ、Ⅴ 区中，令$\xi(r)=0$. 在 Ⅱ 区和 Ⅳ 区中取上面(4.58)式所给的扰动，而在 Ⅰ 和 Ⅱ、Ⅳ 和 Ⅴ 的交界处 x_1 和 x_4 点上，令 $\xi(x_1)=\xi(x_4)=0$(之所以能这样设置，正是利用了 ξ 的振荡特性，可以把 x_1,x_4 选成振荡函数的零点). 最后，在 $x=0$ 附近的 Ⅲ 区，令 $\xi(r)=\xi(x_2)=\xi(x_3)=\xi_0$(常数)，$x_2,x_3$ 则选成振荡的极大值所在处. 这样构成的扰动位移 $\xi(x)$在$(-\infty,\infty)$全区域都有好行为.

于是

$$\delta W_f=\delta W_f(\mathrm{I})+\delta W_f(\mathrm{II})+\delta W_f(\mathrm{III})+\delta W_f(\mathrm{IV})+\delta W_f(\mathrm{V})$$
$$=\delta W_f(\mathrm{II})+\delta W_f(\mathrm{III})+\delta W_f(\mathrm{IV}).$$

可证其中的 $\delta W_f(\mathrm{II})=\delta W_f(\mathrm{IV})=0$. 证明如下：

$$\delta W_f(\mathrm{II})=\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{x^2}{\mu}\xi'^2+\alpha\xi^2\right)\mathrm{d}x$$
$$=\frac{x^2}{\mu}\xi'\xi\Big|_{x_1}^{x_2}-\int_{x_1}^{x_2}\xi\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{x^2}{\mu}\xi'\right)\mathrm{d}x+\int_{x_1}^{x_2}\alpha\xi^2\mathrm{d}x$$
$$=0.$$

上式右边第一项为 0 是因为 $\xi'(x_2)=0$ 及 $\xi(x_1)=0$，第二、三项中的被积函数正好构成欧拉-拉格朗日方程的左端，故为零. 同理可证 $\delta W_f(\mathrm{IV})=0$. 应该指出，这两项为零，正是利用了 ξ 在此区域中的高度振荡行为，以及由此而设置的边条件. 而另一项 $\delta W_f(\mathrm{III})$，由于在积分区内 $\xi=$常数，而可以容易地积出

$$\delta W_f(\mathrm{III})=\int_{x_2}^{x_3}\left(\frac{x^2}{\mu}\xi'^2+\alpha\xi^2\right)\mathrm{d}x=\alpha\xi_0^2(x_3-x_2).$$

由于这里讨论的是 $1+4\alpha\mu<0$ 情况，有 $\alpha\mu<-1/4$，故 $\delta W_f(\mathrm{III})<0$，也即 $\delta W_f<0$. 这说明上面所构置的扰动试探函数，是一种不稳定的扰动——通常称为定域内交换模.

当 $1+4\alpha\mu>0$ 时，$p_{1,2}$是实数. 但因为这时 $p_2<0$，故在 $x\to0$ 时相应的解 x^{p_2}是奇异的，而且并不振荡，因此无法按前面的方式来构成在 $x=0$ 附近有好行为的扰动 $\xi(x)$. 这样在 $1+4\alpha>0$ 时构造不了物理上允许的、又满足欧拉-拉格朗日方程的扰动位移. 即使硬用上面的“坏”$\xi(x)$来试着计算扰动势能，也会发现相应的 $\delta W_f>0$，即体系对局域内模的扰动是稳定的.

这样，综上所述，可得对于定域内模的普适的稳定性条件——Suydam 判据：

$$1+4\alpha\mu>0,$$

或用平衡量写出

$$rB_z^2\left(\frac{\nu'}{\nu}\right)^2 + 8\mu P' > 0, \tag{4.59}$$

其中所有平衡量都省略了下标“0”，$\nu=B_\theta/(rB_z)=1/(qR)$. 对一般的实验室等离子体，上式中 $P'<0$，因此是不稳定的驱动项；而 $(\nu'/\nu)^2>0$ 项总是起稳定作用，它实际上代表磁剪切的稳定作用. 磁剪切($\nu'\neq0$)的存在，使得 r 不同的相邻磁通管的走向总有点不同，因而交换它们的位置时总不可避免地要弯曲和压缩磁力线，从而使得扰动磁能增加，起到抑制交换型扰动的作用. Suydam 判据和 Z 箍缩中 $m=0$ 的稳定条件不同，Suydam 判据和 B_θ 的绝对值无关而只和其剪切 B_θ' 有关. 这是因为在 Z 箍缩中的磁场 B_θ 总是凹向磁流体的，即具有坏曲率. 所以在交换内外磁通管时，磁能总是下降，从而驱动不稳定性的发展.

4.3 直柱 tokamak

4.3.1 概　　述

环形的反场箍缩(RFP)及 tokamak 虽然属于二维磁流体位形，但在瘦(细)环情况下($a/R\ll1$，a 和 R 分别是环的小半径和大半径)可以取直柱近似——即当成直环而采用螺旋箍缩的能量原理来讨论其稳定性. 这里只介绍直环 tokamak 等离子体的理想磁流体不稳定性. 在 tokamak 中，

$$\frac{B_\theta}{B_z}\sim\varepsilon,\quad \frac{P}{B_z^2}\sim\varepsilon^2,\quad q\sim1.$$

这样，由平行电流(因而 $\boldsymbol{B}_\theta$)驱动的扭曲模其扰动势能是二阶小量，而由压力驱动的交换模其扰动势能却是四阶小量，也即在直环 tokamak 中扭曲模比交换模要更严重. 此外，由真实的环形位形所

引起的(对直柱位形的)环修正使 B_θ 产生量级为一阶小量的变化(见第二章磁流体平衡的讨论)，因此环修正对扭曲模的影响较小(只是定量上的)，而对交换模的影响则很大(有定性上的改变). 所以用螺旋箍缩的扰动势能通过能量原理得出的不稳定模的结论，对于扭曲模基本上是正确的(环效应只是给出一个同量级的数值因子的修正)，但对于交换模却可能在定性上(即在稳定与否问题上)不正确.

此外，考虑了环效应后，tokamak 中还会出现一类直柱 tokamak 中所没有的新模(如气泡模，轴对称模，……)，它们的稳定条件中包括了平衡位形的 β 值，因此会对 tokamak 所能达到的最大 β 值给出一个由不稳定性决定的上限，这在直柱 tokamak 中是不会出现的.

在把螺旋箍缩的 δW 用于直柱 tokamak 时，需要按 tokamak 平衡量的量级规定来展开它. 利用(下面已略去平衡量的下标“0”)

$$k=-\frac{n}{R},\quad q=\frac{r}{R}\frac{B_z}{B_\theta},\quad \frac{r}{R}=\varepsilon\ll1,$$

可得

$$\begin{aligned}\delta W &= \delta W^{(2)}+\delta W^{(4)},\\ \delta W^{(2)} &= \delta W_{p2}+\delta W_a,\\ \delta W^{(4)} &= \delta W_{p4},\end{aligned} \tag{4.60}$$

$$\delta W_{p\alpha}=\pi L\int_0^a(f^{(\alpha)}\xi'^2+g^{(\alpha)}\xi^2)\mathrm{d}r\quad(\alpha=2,4).$$

结果是(详细推导见附录(F.6)式和(F.7)式)

$$\frac{\delta W_{p2}}{L}=\frac{\pi B_0^2}{R^2}\int_0^a\left(\frac{n}{m}-\frac{1}{q}\right)^2[r^2\xi'^2+(m^2-1)\xi^2]r\mathrm{d}r, \tag{4.61}$$

$$\begin{aligned}\frac{\delta W_{p4}}{L}=\frac{\pi B_0^2}{R^2}\frac{n^2}{m^2}\int_0^a\Bigg\{&-\frac{r^4}{R^2}\left(\frac{n}{m}-\frac{1}{q}\right)^2\xi'^2\\ &+\left[r\beta'+\frac{r^2}{R^2}\left(\frac{n}{m}-\frac{1}{q}\right)\left(3\frac{n}{m}+\frac{1}{q}\right)\right]\xi^2\Bigg\}r\mathrm{d}r,\end{aligned} \tag{4.62}$$

其中 $\beta'=2\mu P'/B_0^2$. 当 $n=m=1$ 时,上式可简化成(参见(F.8)式)

$$\frac{\delta W_{p4}}{L}=\frac{\pi B_0^2}{R^2}\int_0^a\left\{-\frac{r^4}{R^2}\left(1-\frac{1}{q}\right)^2\xi'^2+\left[r\beta'+\frac{r^2}{R^2}\left(1-\frac{1}{q}\right)\left(3+\frac{1}{q}\right)\right]\xi^2\right\}r\mathrm{d}r. \quad (4.63)$$

而表面扰动能是二阶的(参见(F.9)式)

$$\frac{\delta W_a}{L}=\frac{\pi B_0^2}{R^2}\xi^2(a)a^2\left[(1+m)\left(\frac{n}{m}-\frac{1}{q_a}\right)^2+\frac{2}{q_a}\left(\frac{n}{m}-\frac{1}{q_a}\right)\right]. \quad (4.64)$$

4.3.2 定域内交换模

先把螺旋箍缩关于定域内交换模的稳定性判据改写成直柱 tokamak 的形式. 按(4.59)式,Suydam 判据是

$$rB_z^2\left(\frac{\nu'}{\nu}\right)^2+8\mu P'>0,$$

其中 $\nu=B_\theta/(rB_z)=1/(Rq)$. 定义 $\beta(r)=2\mu P(r)/B_0^2$,上式就改写成直柱 tokamak 的定域内交换模的稳定性判据:

$$\left(\frac{rq'}{q}\right)^2+4r\beta'>0.$$

在实际 tokamak 中 $\beta'<0$,但它只是一阶小量;而 $rq'/q\sim1$(即有限的非零磁剪切). 故在 tokamak 从 $0\to a$ 的整个剖面中,除了在剪切 $q'/q\sim0$ 的一些非常薄的区域(有理面)中,上面关于内交换模的稳定条件都是容易满足的. 这是因为磁剪切抑制了定域的内交换不稳定扰动.

环修正在 $q=1$ 附近很重要,但这个修正却是起稳定作用的——由于环效应使沿磁力线平均的曲率变成"好"的. 这相当于在扰动势能中使曲率 κ 从负变成了正,而压强梯度仍保持负值,所以相应的扰动势能变为正值,即起稳定作用. 其结果是使环形磁流体的定域内模稳定性条件变成

$$rB_z^2\left(\frac{\nu'}{\nu}\right)^2+8(1-q^2)\mu P'>0,$$

或写成另一种形式

$$\left(\frac{rq'}{q}\right)^2+4r(1-q^2)\beta'>0. \quad (4.65)$$

这就称为 Mercier 判据. 在 $q<1$ 的内芯,上式的第二项仍是负的,压强梯度仍能驱动不稳(但已被削弱). 特别是在 $r=0$ 附近,往往磁剪切 $q'(0)$ 为零,它对交换模的抑制作用也不复存在,这里内交换不稳定扰动最容易发展起来. 因此对于这种不稳定性,可以有稳定的充分条件:

$$q(0)>1.$$

这样,Mercier 判据左面的两项在整个等离子体剖面上都为正,从而使此稳定条件总能得到满足,也即定域内交换模永远不可能出现.

4.3.3 非定域内(扭曲、交换)模

这时 Suydam 判据不能用,而 Newcomb 分析过于繁杂. 但从直柱 tokamak 的扰动势能可以直接得出其稳定性判据. 由于只讨论内模,故

$$\delta W=\delta W_p=\delta W_{p2}+\delta W_{p4}.$$

令 $L=2\pi R$,先看最高阶

$$\frac{\delta W_{p2}}{2\pi R}=\frac{\pi B_0^2}{R^2}\int_0^a\left(\frac{n}{m}-\frac{1}{q}\right)^2[r^2\xi'^2+(m^2-1)\xi^2]r\mathrm{d}r.$$

从中可以看出:

(i) $m\geqslant2$ 时,$\delta W_{p2}>0$,故 $m\geqslant2$ 的非定域内模总是稳定的.

(ii) 当 $m=0$ 时,以前给出的量级分析不对了,这时要从螺旋箍缩的最基本表达式出发

$$\delta W_p=\frac{\pi L}{2}\int_0^a(f|\xi'|^2+g|\xi|^2)\mathrm{d}r.$$

在 $m=0$ 时，其中的

$$f^{(2)}=\frac{r}{\mu}B_z^2,\quad g=2\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}r}+\frac{B_z^2}{\mu r}+\frac{r^2n^2B_z^2}{\mu rR^2},\quad f^{(4)}=0.$$

故二阶和四阶的扰动势能分别是

$$\delta W_{p2}=\frac{\pi L}{2\mu}\int_0^a[B_z^2|\xi'|^2+\frac{1}{r^2}B_z^2|\xi|^2]r\mathrm{d}r>0,\qquad(4.66)$$

$$\delta W_{p4}=\frac{\pi L}{2}\int_0^a\left[2\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}r}+\frac{n^2r}{\mu R^2}B_z^2\right]|\xi|^2\mathrm{d}r\sim 0.\qquad(4.67)$$

由于二阶势能为正，所以 $m=0$ 的非定域内模也总是稳定的，四阶势能这时不可能改变此模的稳定性.

(iii) 当 $m=1$ 时，

$$\frac{\delta W_{p2}}{2\pi R}=\frac{\pi B_0^2}{R^2}\int_0^a\left(n-\frac{1}{q}\right)^2\xi'^2r^3\mathrm{d}r.\qquad(4.68)$$

这时又可分成以下两种情况：

(a) 当 $q(r_s)=1/n$ 的共振面 r_s 不在 $(0,a)$ 之间时，上面的积分不会遇到 $n-1/q=0$ 的情况，故整个被积函数总是大于零的；因此 $\delta W_{p2}>0$，即 $m=1$ 的非定域内模总是稳定的.

一般 tokamak 中安全因子 $q(r)$ 从 $0\to a$ 是单调上升的；而且 $q(a)\geqslant 2$，故只有当 $q(0)>1/n$ 时，才会有 $1/n$ 的共振面不在等离子体中的情况出现. 因为 n 是正整数，所以 $m=1,n\geqslant 1$ 非定域内模的稳定性条件是

$$q(0)>1.$$

(b) 当 $q(r_s)=1/n$ 的共振面 r_s 存在于 $(0,a)$ 之间时，一般有 $q(0)<1<q(a)$，故可以按图 4.13 所示的方式选取扰动

$$\xi(r)=\begin{cases}\xi_0, & 0\leqslant r\leqslant r_s-\delta/2,\\ 0, & r_s+\delta/2<r<a.\end{cases}$$

$$\xi'(r)=\begin{cases}0, & 0\leqslant r\leqslant r_s-\delta/2,r_s+\delta/2<r<a,\\ \xi_0/\delta, & r_s-\delta/2<r<r_s+\delta/2.\end{cases}$$

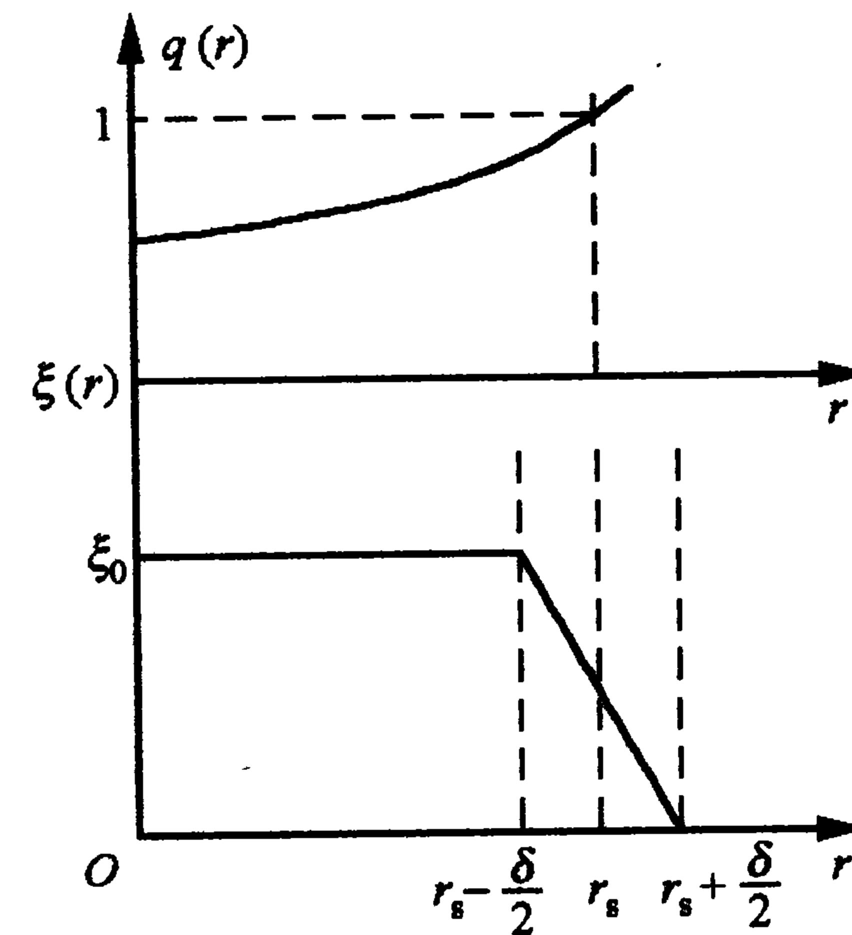


图 4.13 $\xi(r)$的图形

这样的选择相当于使 δW_{p2}进一步极小化. 因为这使其中的 ξ'^2 在共振面以外的大部分积分区中都为零，而仅剩下

$$\delta W_{p2}=\frac{2\pi^2B_0^2}{R}\int_{r_s-\delta/2}^{r_s+\delta/2}\left(n-\frac{1}{q}\right)^2\left[r^2\frac{\xi_0^2}{\delta^2}\right]r\mathrm{d}r=\frac{2\pi^2B_0^2}{R}\frac{\xi_0^2}{\delta^2}\int_{r_s-\delta/2}^{r_s+\delta/2}I_2\mathrm{d}r.$$

其中 $I_2=r^3(n-1/q)^2$. 把 I_2 在有理面 r_s 处展开，令 $r=r_s+x$，则

$$I_2(r)=I_2(r_s)+I_2'(r_s)x+\frac{1}{2}I_2''(r_s)x^2.$$

由于 $q(r_s)=1/n$，故 $I_2(r_s)=I_2'(r_s)=0$. 又由于

$$I_2''(r_s)=2r_s^3\left(-\frac{1}{q}\right)'^2\bigg|_{r_s}=\frac{2r_s^3}{q^2(r_s)}q'^2(r_s)=2n^4r_s^3q'^2(r_s),$$

所以

$$\delta W_{p2}=\frac{2\pi^2B_0^2}{R}\frac{\xi_0^2}{\delta^2}n^4r_s^3q'^2(r_s)\frac{1}{3}x^3\bigg|_{-\delta/2}^{\delta/2}=\frac{2\pi^2B_0^2}{R}n^4r_s^3q'^2(r_s)\frac{\xi_0^2}{12}\delta.$$

当 $\delta\to 0$ 时，$\delta W_{p2}=0$. 这说明只要 $q(r_s)=1/n$ 的共振面处在等离子体中时，总可以通过挑选合适的扰动函数 $\xi(r)$ 而使二阶势能 $\delta W_{p2}=0$. 这样为了确定 $m=1$ 非定域内模的稳定性，就必须考虑展开的下一阶 δW_{p4}：

$$\frac{\delta W_{p4}}{2\pi R}=\frac{\pi B_0^2}{R^2}n^2\int_0^a\left\{-\frac{r^4}{R^2}\left(n-\frac{1}{q}\right)^2\xi'^2\right.$$
$$\left.+\left[r\beta'+\frac{r^2}{R^2}\left(n-\frac{1}{q}\right)\left(3n+\frac{1}{q}\right)\right]\xi^2\right\}r\mathrm{d}r.$$

由于此模的共振面在等离子中，故仍可以取与上面一样的试探函数，于是有

$$\frac{\delta W_{p4}}{2\pi R}=\frac{\pi B_0^2}{R^2}\left\{\int_0^{r_s-\delta/2}\xi_0^2\left[r\beta'+\frac{r^2}{R^2}\left(n-\frac{1}{q}\right)\left(3n+\frac{1}{q}\right)\right]r\mathrm{d}r\right.$$
$$\left.+\int_{r_s-\delta/2}^{r_s+\delta/2}\left(-\frac{r^4}{R^2}\right)\left(n-\frac{1}{q}\right)^2\frac{\xi_0^2}{\delta^2}r\mathrm{d}r\right\}.$$

当 $\delta\to0$ 时，上式中后一个积分为零，剩下的是

$$\frac{\delta W_{p4}}{2\pi R}=\frac{\pi B_0^2}{R^2}\xi_0^2\int_0^{r_s}\left[r\beta'+\frac{r^2}{R^2}\left(n-\frac{1}{q}\right)\left(3n+\frac{1}{q}\right)\right]r\mathrm{d}r.$$

如果在上面的积分区域 $(0,r_s)$ 中 $q(r)<1/n$，则上式右面的第二项将小于零；加上 $\beta'\propto P'<0$，故可得

$$\delta W_{p4}<0.$$

这时将存在由压力（第一项）和电流（第二项）共同驱动的，$m=1$，n 为任意正整数的非定域、交换、扭曲模. 但是如果有

$$q(0)>\frac{1}{n},$$

或更充分

$$q(0)>1, \tag{4.69}$$

则扰动势能的第二项就不会小于零，而上述不稳定性就不会出现，这时 $m=1$，$n\geqslant1$ 的内模总是稳定的. 当 $q(r)$ 是 r 的单调递增函数时，上面的条件就意味着 $q(r_s)<1$ 的有理面永远不会出现在等离子体之中，这时扰动总会使磁能增大，从而抑制了这种不稳定性. 但如果 $q(r)$ 不是 r 的单调递增函数时，上面的条件并不能保证内模的稳定（见下面的讨论）.

即使当 $q(0)<1$ 时，在等离子体芯部所驱动的 $m=1$，$n=1$ 内模也不是很强的，因为它是由四阶的扰动势能驱动的，所以其增长率比起由二阶扰动能 δW_{p2} 驱动的不稳定性要小一个数量级. 这种不稳定扰动只能作用于 $q<1$ 的等离子体中心区（图 4.14），使其中的温度、密度的分布均匀化，从而导致电流剖面变平，这样一来又会让芯部的 $q(0)$ 上升，反过来抑制了初始扰动.

环效应对 $m=1$，$n=1$ 的内模有致稳作用，Bassuc 等人证明（1976）：当 $\beta_p<0.3$ 时，环效应可以完全抑制住此模；只有在 $\beta_p\geqslant0.3$ 后（精确值和具体的平衡参数取法有关），此模才可能被激发.

近年来在实验中还发现了一种先进 tokamak 运行方式——高效率的反剪切模式（enhanced reversed sheared mode），其中的 $q(r)$ 剖面不是单调变化的（图 4.15），这种平衡位形能大大降低 tokamak 等离子体中的粒子和能量损失，但理论上尚没有给出公认的解释. 不过从内模的角度来看，这时 q 值小于 1 的区域会出现在等离子体的中间层，如果这时 $m=1$ 的内模能被激发，则被搅匀的将是等离子体环柱的中间区域.

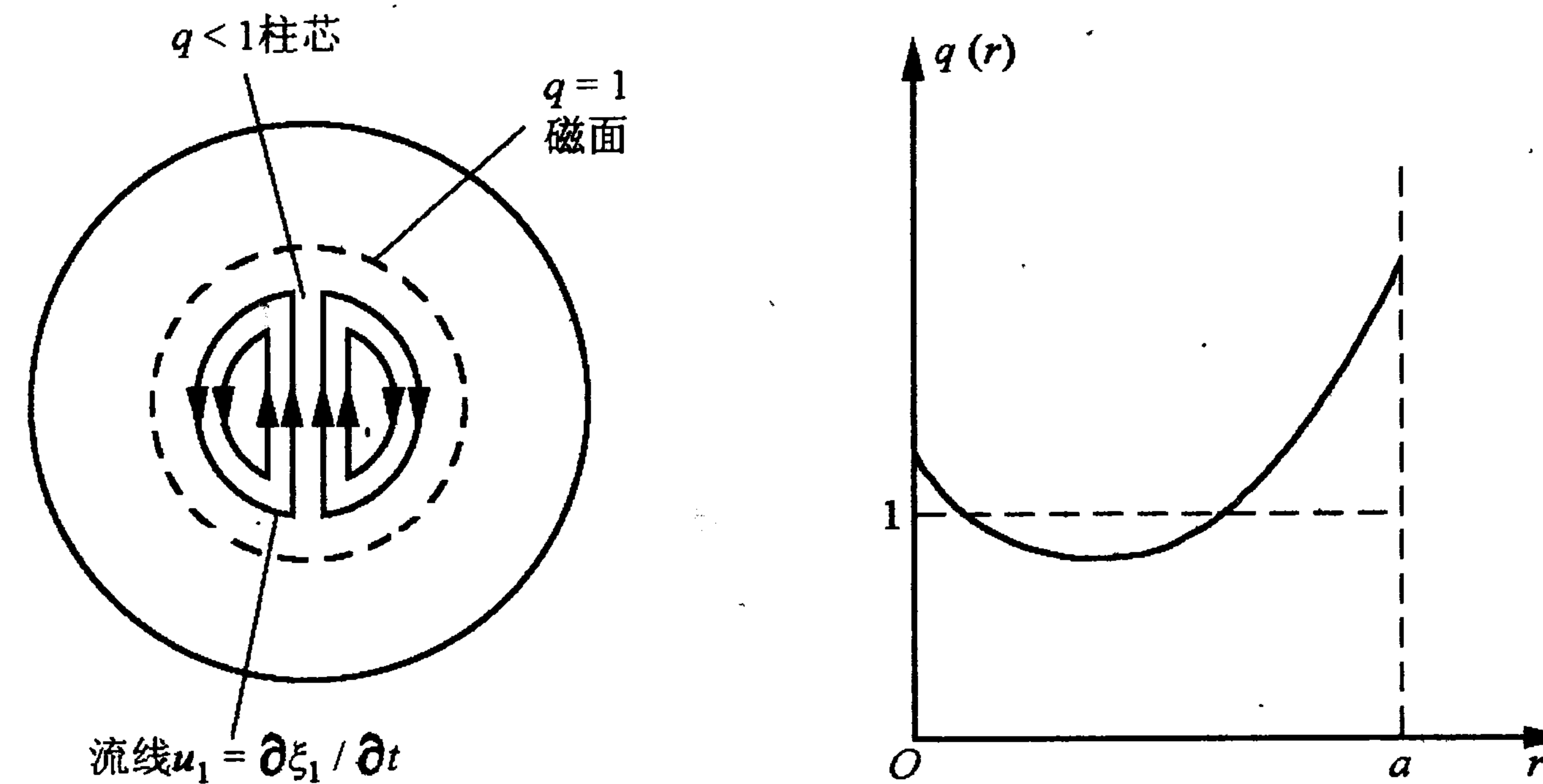


图 4.14　$q=1$ 磁面内的扰动流线图形

图 4.15　反剪切的 $q(r)$ 图形

4.3.4 $m=1$ 的外扭曲模，Kruskal-Shafranov 极限

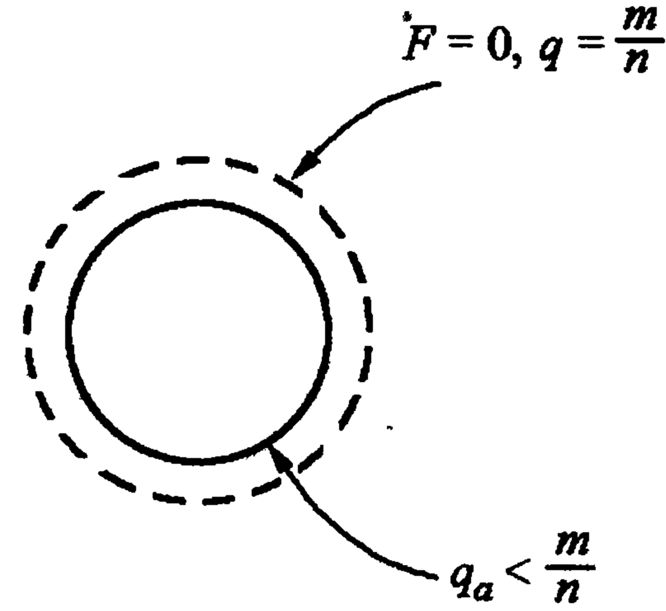


图 4.16 外扭曲模的有理面

tokamak 中最危险的理想磁流体不稳定扰动是外扭曲模. 它们都是被电流驱动的，并且相应的有理(共振、奇异)面(即 $F=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{B}=0$ 的面，或 $q(r_s)=m/n$ 的磁面)刚好位于等离子体表面外的真空区中(即这时 $q(a)\lesssim m/n$)(见图 4.16). 这样，在整个等离子体中 F 都不会为零，因此包含 F 的平行电流驱动项始终会在起作用. 这项是二阶项 $\delta W^{(2)}$，因此所驱动的不稳定增长率比内交换模要更大；因而也更危险. 再者，由于在扰动势能的二阶项中不包含压力项 P'，它们的稳定性条件也和压力无关.

在处理外模时，扰动势能中要计入体积分项 $\delta W_p^{(2)}$ 以及边界、真空项 δW_a，它们对二阶扰动势能均有贡献：

$$\frac{\delta W^{(2)}}{2\pi R}=\frac{\pi B_0^2}{R^2}\left\{\int_0^a\left(\frac{n}{m}-\frac{1}{q}\right)^2[r^2\xi'^2+(m^2-1)\xi^2]r\mathrm{d}r\right.$$
$$\left.+a^2\xi^2(a)\left[(1+m)\left(\frac{n}{m}-\frac{1}{q_a}\right)^2+\frac{2}{q_a}\left(\frac{n}{m}-\frac{1}{q_a}\right)\right]\right\}.$$

对于 $m=1$ 的扭曲模，因为 $q=1$ 的有理面这时在等离子体的边界($r=a$)之外的真空之中，故在整个等离子体中都可以把扰动试探函数取成常数 $\xi(r)=\xi_a$. 这样上式中的积分项(即等离子体内的扰动势能)为零，只需计算边界及真空扰动势能 δW_a. 取这种常数的扰动试探函数 ξ_a，实际上就是对总扰动势能的一次极小化(使总是非负的体积分项取最小值——零). 这时

$$\frac{\delta W^{(2)}}{2\pi R}=\frac{\delta W_a}{2\pi R}=2\pi\frac{a^2}{R^2}B_0^2\xi_a^2 n\left(n-\frac{1}{q_a}\right).$$

从上式可以看到，δW_a 的正、负只取决于表面的 q_a，而它又只和等

离子体的总电流 I，而不是电流分布 $J(r)$ 有关：

$$q_a=\frac{a}{R}\frac{B_z(a)}{B_\theta(a)},\quad B_\theta(a)=\frac{\mu I}{2\pi a}.$$

由能量原理 $\delta W>0$，可得 $m=1$ 外扭曲模的稳定条件：

$$q(a)\equiv q_a>\frac{1}{n}.$$

考虑到 $n\geqslant1$，故只要 $q(a)>1$ 就足以稳定所有的 $m=1$(n 任意)外扭曲模. 它对应于

$$I<I_{\mathrm{ks}}=\frac{2\pi a^2B_0}{\mu R},\tag{4.70}$$

即只要等离子体总电流 I 小于某个临界值 I_{ks}，$m=1$ 的所有外扭曲模就都是稳定的. I_{ks} 又称为 Kruskal-Shafranov 极限(电流). 同时，此极限在几何上限制了最不稳定的($n=1$)$m=1$ 外扭曲模的波长 $\lambda_{1,1}<2\pi R$.

在实际上，由于高 m 的扭曲模会对 q 加上更为严格的限制(如 $q_a>m/n$，见下一小节)，因此远在 q_a 降低到 1 之前，别的(高 m)外扭曲模就会出现，从而制止了 q_a 的进一步下降以及 $m=1$ 外扭曲模的不稳(通常 tokamak 等离子体的 q_a 都在 3 以上，只有极少数情况下才能略低于 2).

4.3.5 $m\geqslant2$ 的外扭曲模

同样，从上节给出的势能表达式 $\delta W^{(2)}$ 中可以看出，对给定模数为(m,n)的外扭曲模，有一个稳定的充分条件：

$$q(a)>\frac{m}{n},$$

它能保证 $\delta W_p^{(2)}$ 和 δW_a 都大于零. 这条件给出了比 Kruskal-Shafranov 极限 I_{ks} 更低的总电流限制. 但这条件其实并没有什么用处. 因为即使在 $q(a)<m/n$ 时 $\delta W^{(2)}$ 其实也并不一定为负，因为其中的积分项(即等离子体内的扰动势能)总是为正，而这积分的

具体取值又和$\xi(r)$的细致结构有很大关系. 所以真正的 $m\geqslant 2$ 外扭曲模的稳定条件非常敏感地依赖于试探函数 $\xi(r)$的分布,特别是它在 $r\gtrsim a$ 附近一层内的精确结构.

使 $\delta W_{\mathrm{p}}^{(2)}$ 极小化的扰动 $\xi(r)$满足相应的欧拉方程,其解与 $q(r)$,也即 $B_\theta(r)$,因而电流密度 $J(r)$的具体形状有关. 所以不同的 $J(r)$会给出不同的稳定性条件. 对于(m,n)外扭曲模,使其不稳定的条件(有时也称为 q_a 的不稳定窗口)为

$$y\left(\frac{m}{n},J(r)\right)\leqslant q(a)\leqslant\frac{m}{n}. \tag{4.71}$$

其中"y"是略小于或等于 m/n 的一个数,它和所讨论的外扭曲模的模式 m/n 有关,还敏感地依赖于电流的剖面 $J(r)$;一般 $J(r)$ 的分布愈尖,$y(m/n,J(r))$值就愈接近 m/n. 因此对某一确定(m,n)模,存在一个足够尖的电流密度剖面 $J(r)$,它使 $y(m/n,J(r))=m/n$. 这样上式所规定的使此模不稳定的"$q(a)$窗口"就消失了,这意味着(m,n)外扭曲模将被稳定. 例如取下面的(简单通道)电流分布(图 4.17):

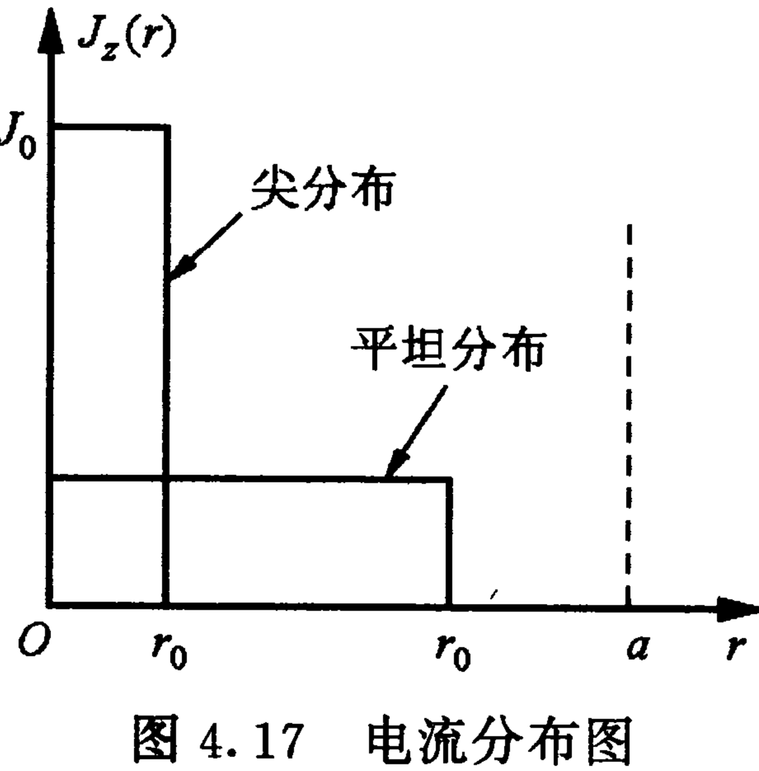


图 4.17 电流分布图

$$J_z(r)=\begin{cases}J_0, & 0<r<r_0,\\ 0, & r_0\leqslant r\leqslant a.\end{cases}$$

用 ξ 极小化 $\delta W_{\mathrm{p}}^{(2)}$ 后,(m,m)模的扰动势能为

$$\delta W^{(2)}=-m\xi_a^2B_{\theta a}^2\frac{(1-nq_a/m)^2[1-m+nq_a(r_0/a)^2]}{(r_0/a)^{2m}+[-1+m-nq_a(r_0/a)^2]}.$$

若要 $\delta W^{(2)}>0$(即让外扭曲模稳定),需要

$$1-m+nq_a(r_0/a)^2<0,\quad\Rightarrow\quad\left(\frac{r_0}{a}\right)^2<\frac{m-1}{nq_a}.$$

对(m,n)模来说,其奇异层在等离子体界面外一点,故 $q_a<m/n$(即 $1/(nq_a)>1/m$),所以使外扭曲模(m,n)稳定(也即令 $\delta W^{(2)}>0$)的充分条件是

$$\left(\frac{r_0}{a}\right)^2<\frac{m-1}{m}<\frac{m-1}{nq_a}. \tag{4.72}$$

于是只要等离子体电流密度剖面足够窄(即 r_0/a 足够小),对任何 nq_a 值就都可以有$\delta W^{(2)}>0$;也就是说这时任何 $m\geqslant 2$ 的外扭曲模都是可以被稳定的. 例如,对 $m=2$ 的模,$r_0/a<0.7$;$m=3$,$r_0/a<0.82$;$m=4$,$r_0/a<0.87$;$m=5$,$r_0/a<0.89$;…. 这说明模数愈低(小),要稳定它所需的电流分布就应愈尖.

当考虑比较实际一点的电流分布时,通常只能用数值方法来给出外扭曲模的稳定性条件. 图 4.18 是取电流分布为

$$J(r)=J_0(1-r^2/a^2)^\nu,\quad \nu=0,1,2,3,\cdots$$

时,外扭曲模的不稳定"q_a"窗口. ν 愈大,电流的分布愈尖(见图 4.18 最右面的小图示),相应地,

$$q(r)=q_a\frac{r^2}{a^2}\Big/[1-(1-r^2/a^2)^{\nu+1}],\quad\Rightarrow\quad\frac{q(a)}{q(0)}=\nu+1.$$

(见图 4.18 中最左面的标尺)

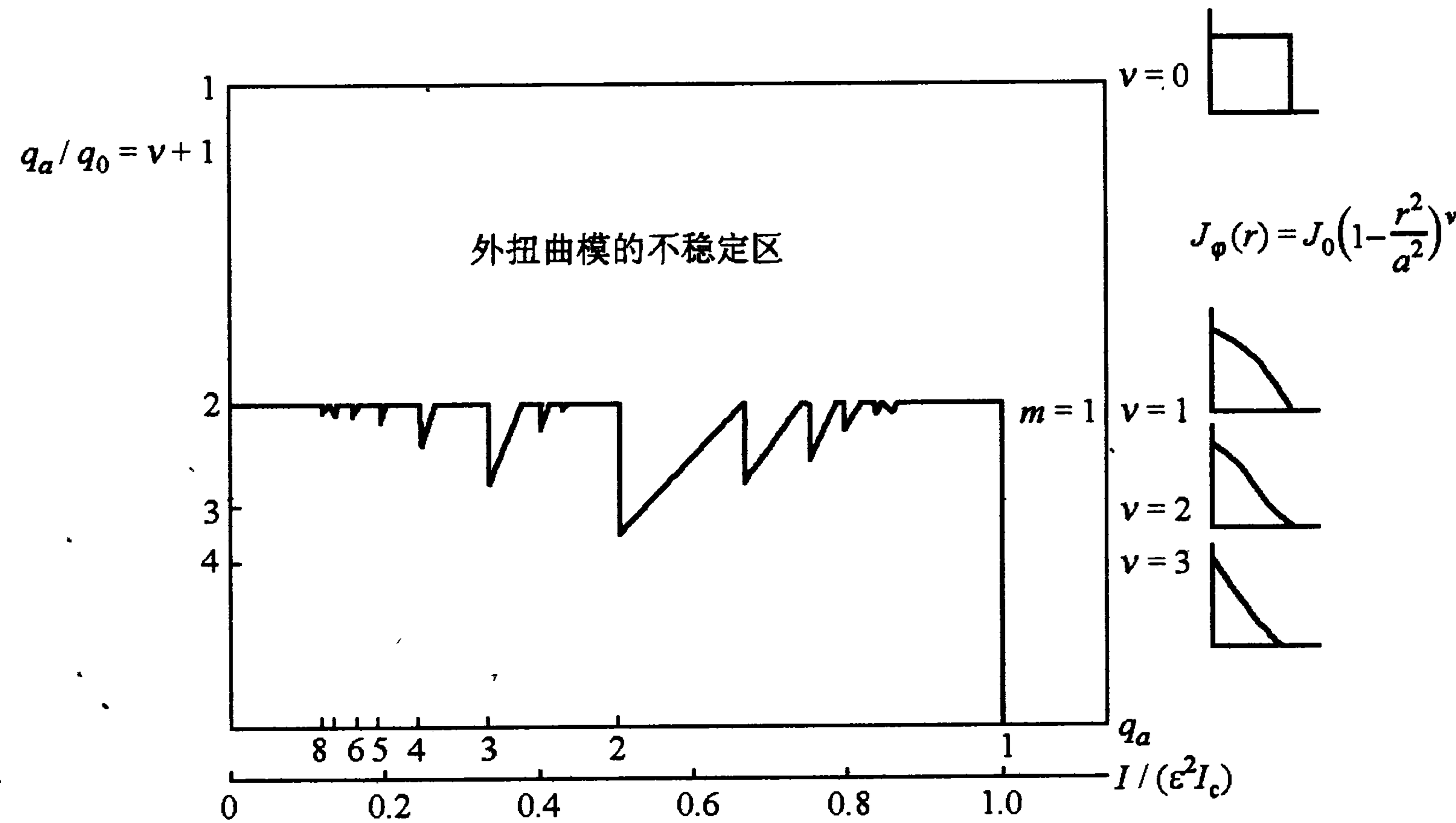


图 4.18 外扭曲模的临界稳定图

从图 4.18 中可以看出,当电流分布比较平时(如 $\nu=1$),外扭

曲模的不稳定区在 q_a(横坐标)上呈现出一个个窗口. 而当电流分布变尖(ν 值变大)时,这些窗口就逐渐缩小并消失. 其中 $m=2$ 的外扭曲模是最不稳定的,因此要稳定它所需的电流分布最尖,其次的是 $m/n=3/4,\ 2/1,\cdots$的模式.

4.4 环形 tokamak 中新的理想磁流体不稳定模

环效应会引起两种在直柱 tokamak 中不可能存在的不稳定模式,一种是内气泡模,另一种是轴对称的刚性(Z 向)位移模.

4.4.1 气 泡 模

前面说过,当 $q(0)>1$ 时,tokamak 等离子体中沿磁力线平均的曲率是"好"的(这是由于在直柱弯曲成环时,其各内磁面的中心均向大环的外侧移动了一个 Δ——Shafranov 位移),因此波长大于、等于大环周长的内模,在这一平均磁阱的抑制下即使有压强梯度也激发不了. 但是对平行(磁力线)波长很短的内模,例如扰动试探函数只存在于环外侧沿磁力线很局域的范围内,而在其他区域中却为零的模,平均磁阱对它们起不了抑制作用,因而有可能发展起来. 平行波数 $k=-n/R$,故短波长(即大波数)的模就相当于高 n 模. 高 n 气泡模的稳定性条件等价于对平衡 β 的一个限制,这点可以从下面的讨论来半定性地给出,由内模的扰动势能表达式

$$\delta W_p=\frac{1}{2}\int d\boldsymbol{r}\left\{\frac{1}{\mu}|\boldsymbol{B}_{1\perp}|^2+\frac{B_0^2}{\mu}|\nabla\cdot\boldsymbol{\xi}_\perp+2\boldsymbol{\xi}_\perp\cdot\boldsymbol{\kappa}|^2+\gamma P_0|\nabla\cdot\boldsymbol{\xi}|^2\right.$$
$$\left.-2(\boldsymbol{\xi}_\perp\cdot\nabla P_0)(\boldsymbol{\kappa}\cdot\boldsymbol{\xi}_\perp^*)-\frac{\boldsymbol{J}_0\cdot\boldsymbol{B}_0}{B_0^2}(\boldsymbol{\xi}_\perp^*\times\boldsymbol{B}_0)\cdot\boldsymbol{B}_{1\perp}\right\},$$

可以看出:其中最后一项是电流驱动项,和气泡模关系不大,下面讨论时可以略去. 最先仍是用不可压缩条件 $\nabla\cdot\boldsymbol{\xi}=0$ 来极小化 δW_p. 其次可以通过选取 $\nabla\cdot\boldsymbol{\xi}_\perp=-2\boldsymbol{\xi}_\perp\cdot\boldsymbol{\kappa}$ 来进一步极小化(因为含此项的被积函数第二项总是大于等于零,这种选取法相当于使第二项取最小值——零). 结果对气泡模有效的扰动势能经过两次极小化后变成

$$\delta W_p=\frac{1}{2}\int d\boldsymbol{r}\left\{\frac{1}{\mu}|\boldsymbol{B}_{1\perp}|^2-2\boldsymbol{\xi}_\perp\cdot\nabla P_0\boldsymbol{\xi}_\perp\cdot\boldsymbol{\kappa}\right\}.$$

其中第一项是气泡模扰动弯曲了磁力线后所造成的磁场势能的增大,它是一个稳定因素. 前面对螺旋箍缩讨论时曾给出

$$|\boldsymbol{B}_{1\perp}|^2=B_{1r}^2+B_{1\eta}^2$$
$$=F^2(|\xi|^2+|\eta|^2)+\beta^2|\xi|^2+iF\beta(\xi^*\eta-\xi\eta^*),$$

其中

$$\beta\xi=\frac{1}{B}\left[\frac{B_\theta}{r}(r\xi B_z)'-(\xi B_\theta)'B_z\right].$$

再从气泡模的图像可知 ξ 的径向分量

$$\xi\sim\xi|_{\text{outside}}=\xi_R\gg\eta,$$

故有

$$|\boldsymbol{B}_{1\perp}|^2\approx F^2|\xi|^2|_{\text{outside}}=F_R^2|\xi_R|^2,$$
$$\Rightarrow\quad\delta W_p\approx\frac{1}{2}\int d\boldsymbol{r}\left(F_R^2+\frac{2P_0'}{R}\right)|\xi_R|^2.$$

上式中的第二项即是气泡模的驱动能源,考虑到气泡模总发生在环的外侧,故可令

$$F_R=|\boldsymbol{B}\cdot\nabla|_{\text{outside}}=\frac{B}{l}.$$

l 是此模在磁力线方向上的特征长度,近似可取为磁力线在环外侧的特征长度. 由前面的讨论可知,磁力线要在大环方向上绕 q 圈后才回到小环的起点附近,故一根磁力线的长度大致是 $L=2\pi Rq$. 假若这根磁力线在环外侧的部分是赤道面上下张角 θ 各为半个弧度的一段沿大环方向的弧(这是环形磁力线上曲率最坏的区域),则 $l=L/2\pi=Rq$,于是有

$$F_R=B/Rq.$$

再考虑到

$$-2P_0'/R \sim \frac{2}{R}\left|\frac{P_0}{a}\right|,$$

将它们一起代入前面的稳定性条件,最后有

$$\frac{2P_0}{B^2} < \frac{a}{R}\frac{1}{q^2} = \frac{\varepsilon}{q^2}.$$

或写成更显示物理意义的形式

$$\beta < \frac{\varepsilon}{q^2}.$$

这就是高 n 内气泡模对 β 值所加的限制,它和由磁流体平衡条件对 β_θ 的限制量级相当. 在那里使等离子体界面不破裂的条件是对角向 β_θ 给出的. 利用(2.65)式,令在分界面(separatrix)处 $B_v = B_{\theta0}(a)$,结果有

$$\beta_\theta < \frac{R}{a} = \varepsilon^{-1},$$

而换算成总 β 后,成了

$$\beta = \beta_\theta \frac{B_\theta^2}{B_z^2} < \frac{\varepsilon}{q^2}.$$

这正是气泡模给出的稳定性判据. 通过对能量原理更准确的计算,可以得到更精确的气泡模稳定条件,它是对截面平均后的 β 值的一个限制

$$\langle\beta\rangle < \frac{2}{3\sqrt{3}}\frac{\varepsilon}{q_0^2}\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{q_0}{q_a}\right)^{1/2}\left(3 - \frac{q_0}{q_a}\right)\right].$$

取 $q_0/q_a \gtrsim 1/3$,ε 约在 0.2～0.3,可得 $\langle\beta\rangle < 0.1\varepsilon/q_0^2 \approx 0.03$.

在高 $\beta(\beta\sim\varepsilon)$ 的 tokamak 中,因为压力驱动项变得和电流驱动项同样大(它们的扰动势能都是二阶的),故可以共同驱动一个外(扭曲+交换)模. 对于圆截面高 β 的 tokamak 来说,通过近似的表面电流分布模型,可得稳定此模的条件是

$$\langle\beta\rangle \leqslant \frac{\pi^2}{16}\frac{\varepsilon}{16q_a^2},$$

或 $\langle\beta_\theta\rangle \leqslant \pi^2/(16\varepsilon)$. 对当前运行的圆截面 tokamak,上述条件给出的 $\langle\beta\rangle_{max} = 0.21\varepsilon$,约在 0.04～0.06.

进一步的研究(这里不仔细讨论)表明,如果把圆截面变成椭圆形(垂直方向半轴 b 和赤道方向半轴 a 不等)可以提高约束比. 例如当 $b/a = 2.2$ 时,$\langle\beta\rangle_{max} = 0.37\varepsilon$. 而流线型截面(椭圆截面加上一点向外指的三角形截面)——也称 D 型截面则可以进一步提高 β 值:$\langle\beta\rangle_{max} = 0.5\varepsilon$.

4.4.2 轴对称模

这是一种使等离子体环整体作轴对称移动的外模,例如环在垂直(Z)方向上作刚性平移或在大半径(R)方向上扩张或缩小. 为了保持大环在 R 方向上的平衡,在第二章中指出需要一个外加垂直磁场 $\boldsymbol{B}_v = B_z\boldsymbol{e}_z$,如果 B_z 是一个常数——即均匀磁场,则环虽然对 R 方向的扰动是稳定的,但对于垂直方向上的扰动 δZ 是中性(随遇)稳定的,也就是说环可以被置于任意 Z 值处. 这点也可以从直柱 tokamak 中 $m=1$ 外扭曲模的能量表达式中看出:

$$\delta W^{(2)} = \delta W_a = 2\pi L B_0^2\xi_a^2\varepsilon^2 n(n - 1/q_a), \quad \varepsilon^2 = a^2/R^2.$$

这时,对于 $n=0$ 的轴对称扰动,$\delta W_a = 0$,因而是临界稳定的. 在环形和非圆截面的 tokamak 等离子体中,$n=0$ 扰动的稳定性讨论必须涉及二维磁流体位形的问题,其准确的计算要依靠数值解. 下面先半定量地讨论圆截面等离子体环的轴对称模的稳定条件,然后定性地讨论一下非圆截面的轴对称模稳定性.

1. 圆截面情况

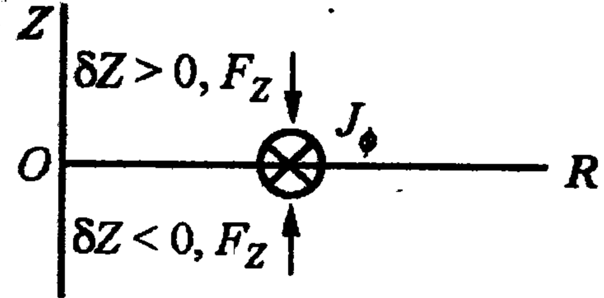
由于 $n=0$ 模是外模,因此内部压强及磁通均可忽略,可以用一个导体环来代替等离子体环,只是导体环中的电流 I 应当随环的平衡位置而变化 $I = I(R,Z)$. 根据电工学,这个环电流本身的自感磁能为

$$\varphi = (1/2)L(R)I^2(R,Z),$$

所产生的角向磁通为

$$\psi_I = L(R)I(R,Z).$$

而圆环的自感（见第二章讨论）$L\approx\mu R[\ln(8R/a)-2]$，其中 $a=\sqrt{A/\pi}$，A 是导体环的小截面积.



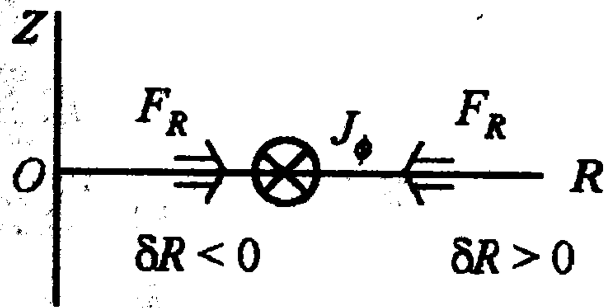


图 4.19　讨论轴对称模式稳定性的示意图

当平衡条件满足时，设导体（等离子体）环处在平衡位置(R_0,Z_0)，这一般是指在赤道面上$(Z_0=0,R=R_0)$的位置（见图 4.19）. 这时如果导体环受到了一个刚性的垂直扰动使其从 $Z_0\to Z_0+\delta Z$，则从第二章中我们已经知道，均匀垂直（Z 向）场并不能使环回到原来位置(Z_0)，这时只有一个略向 $\boldsymbol{e}_R$ 方向凸出的垂直场才可以抑制这种扰动. 设这样的垂直场可表示成

$$\boldsymbol{B}_\mathrm{v} = B_R\boldsymbol{e}_R + B_Z\boldsymbol{e}_Z = \boldsymbol{B}_R + \boldsymbol{B}_Z,$$

它和环电流 J_ϕ 产生的洛伦兹力为

$$\boldsymbol{F}_R = \boldsymbol{J}_\phi \times \boldsymbol{B}_Z,\quad \boldsymbol{F}_Z = -\boldsymbol{J}_\phi \times \boldsymbol{B}_R.$$

在平衡位置(R_0,Z_0)处，为方便设

$$F_R(R_0,Z_0) = F_Z(R_0,Z_0) = 0.$$

当存在扰动 δZ 和 δR 时，从物理上看，只有在

$$\left.\frac{\partial F_Z}{\partial Z}\right|_0 \equiv \left.\frac{\partial F_Z}{\partial Z}\right|_{R=R_0,Z=Z_0} < 0, \tag{4.73}$$

$$\left.\frac{\partial F_R}{\partial R}\right|_0 \equiv \left.\frac{\partial F_R}{\partial R}\right|_{R=R_0,Z=Z_0} < 0 \tag{4.74}$$

时电流环才会被 $F_Z(R_0,Z_0+\delta Z)=(\partial F_Z/\partial Z)\delta Z$ 或 $F_R(R_0+\delta R,Z_0)=(\partial F_R/\partial R)\delta R$ 推回平衡位置(R_0,Z_0). 故这两个条件是稳定的充要条件.

当外加垂直场 $\boldsymbol{B}_\mathrm{v}$ 存在时，它也会产生一个角向磁通，故总的角向磁通由两部分组成

$$\psi_\mathrm{t} = \psi_I + \psi_\mathrm{v}.$$

由于 $\delta R,\delta Z$ 的特征扰动时间比起平衡的特征时间要短得多，因此可以合理地假定：总角向磁通在扰动中守恒，即

$$\delta\psi_\mathrm{t} = \psi_\mathrm{t}(R_0+\delta R,Z_0+\delta Z) - \psi_\mathrm{t}(R_0,Z_0) = 0.$$

这又可表示成

$$\frac{\partial\psi_\mathrm{t}}{\partial R} = \frac{\partial\psi_\mathrm{t}}{\partial Z} = 0.$$

下面就从这些定义和假定出发，把导电环平衡位置对轴对称扰动的上述稳定条件写成对垂直场外凸程度的某种限制. 首先把我们的出发点整理如下：

(i) 磁场及磁通.

$$\boldsymbol{B}_\mathrm{v} = \boldsymbol{B}_R + \boldsymbol{B}_Z,\quad \psi_\mathrm{t} = \psi_I + \psi_\mathrm{v}.$$

它们有关系

$$B_{\alpha R} = -\frac{1}{2\pi R}\frac{\partial\psi_\alpha}{\partial Z},\quad B_{\alpha Z} = \frac{1}{2\pi R}\frac{\partial\psi_\alpha}{\partial R},\quad \alpha = I,\mathrm{v}.$$

角向磁通为

$$\psi_I(R,Z) = L(R)I(R,Z),$$

而垂直磁通为

$$\psi_\mathrm{v}(R,Z) = -2\pi\int_0^R B_{\mathrm{v}Z}(R',Z)R'\mathrm{d}R'.$$

(ii) 平衡力及平衡势能.

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_R + \boldsymbol{F}_Z,\quad \boldsymbol{F}_R = \boldsymbol{J}_\phi \times \boldsymbol{B}_Z,\quad \boldsymbol{F}_Z = -\boldsymbol{J}_\phi \times \boldsymbol{B}_R.$$

引入平衡势能 $\boldsymbol{F}=-\nabla\varphi$，有

$$\varphi(R,Z) = -\int^{R,Z}\boldsymbol{F}(R',Z')\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}(R',Z').$$

由功、能转换守恒定律（扰动所作的功＝电流环自感储能的增加），可得

$$\varphi(R,Z) = \frac{1}{2}L(R)I^2(R,Z).$$

(iii) 约束条件——扰动中总角向磁通守恒. 由上面的讨论，总磁通守恒 $\delta\psi_\mathrm{t}=0$ 意味着

$$\frac{\partial\psi_t}{\partial R}=\frac{\partial\psi_t}{\partial Z}=0.$$

这可以看成是推导稳定条件时应当遵守的两个约束条件. 下面将用平衡量来表示出轴对称模的稳定条件.

(iv) 稳定充要条件的具体推导.

有两个稳定条件:

(a) 由垂直方向稳定条件 $\partial F_Z/\partial Z<0$ 所导出的结论.

由 $\varphi=(1/2)LI^2$, 及 $\boldsymbol{F}=-\nabla\varphi$, 有

$$F_Z=-\frac{\partial\varphi}{\partial Z}=-LI\frac{\partial I}{\partial Z},$$

$$F_R=-\frac{\partial\varphi}{\partial R}=-LI\frac{\partial I}{\partial R}-\frac{I^2}{2}\frac{\partial L}{\partial R}.$$

由平衡时 $F_Z|_{Z_0}=0$, 可得 $\partial I/\partial Z|_{Z_0}=0$, 于是有

$$\left.\frac{\partial F_Z}{\partial Z}\right|_0=\left.\frac{\partial F_Z}{\partial Z}\right|_{Z_0}=\left[-L\left(\frac{\partial I}{\partial Z}\right)^2-LI\frac{\partial^2 I}{\partial Z^2}\right]_0=-LI\left.\frac{\partial^2 I}{\partial Z^2}\right|_0.$$

为了进一步求出 $\partial^2 I/\partial Z^2$, 先求 $\partial I/\partial Z$. 利用 $\partial\psi_t/\partial Z=0$ 和

$$\psi_t=\psi_I+\psi_v=LI-2\pi\int_0^R B_Z(R',Z)R'\mathrm{d}R',$$

可得

$$L\frac{\partial I}{\partial Z}=2\pi\int_0^R\frac{\partial B_{vZ}}{\partial Z}R'\mathrm{d}R'. \tag{4.75}$$

再利用 $\nabla\cdot\boldsymbol{B}_v=0$, 可得

$$\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}(RB_{vR})+\frac{\partial B_{vZ}}{\partial Z}=0.$$

故

$$\int_0^R\frac{1}{R'}\frac{\partial}{\partial R'}(R'B_{vR})R'\mathrm{d}R'=-\int_0^R\frac{\partial B_{vZ}}{\partial Z}R'\mathrm{d}R',$$

$$RB_{vR}=-\int_0^R\frac{\partial B_{vZ}}{\partial Z}R'\mathrm{d}R'.$$

将上式代入(4.75)式,得

$$L\frac{\partial I}{\partial Z}=-2\pi RB_{vR}, \quad\Rightarrow\quad B_{vR}=-\frac{L}{2\pi R}\frac{\partial I}{\partial Z}.$$

由上式可知,在平衡位置处有 $B_{vR}|_0\propto(\partial I/\partial Z)_0=0$,所以有

$$\left.\frac{\partial F_Z}{\partial Z}\right|_0=I2\pi R\left.\frac{\partial B_{vR}}{\partial Z}\right|_0,$$

再利用

$$(\nabla\times\boldsymbol{B})_\phi=0=\frac{\partial B_{vR}}{\partial Z}-\frac{\partial B_{vZ}}{\partial R}, \quad\Rightarrow\quad \frac{\partial B_{vR}}{\partial Z}=\frac{\partial B_{vZ}}{\partial R},$$

结果得

$$\left.\frac{\partial F_Z}{\partial Z}\right|_0=-2\pi IB_{vZ}n, \quad n=-\frac{R}{B_{vZ}}\left.\frac{\partial B_{vZ}}{\partial R}\right|_0, \tag{4.76}$$

其中 n 是一个无量纲的量,又称为磁场的衰减因子(decay index),在物理上代表垂直磁场在 $\boldsymbol{e}_R$ 方向上的弯曲程度. 如果 $n>0$,就说明 $\boldsymbol{B}_v$ 朝大环外侧凸出;反之,则表明垂直磁场向环内侧凹陷. 下一步的推导就是给出稳定对 n 的限制条件. 为此应将 B_{vZ}用前面给出的平衡量表示出来,利用

$$\frac{\partial\psi_t}{\partial R}=0, \quad\Rightarrow\quad L\frac{\partial}{\partial R}+I\frac{\partial L}{\partial R}-2\pi RB_{vZ}=0,$$

于是有

$$B_{vZ}=\frac{1}{2\pi R}\left(L\frac{\partial I}{\partial R}+I\frac{\partial L}{\partial R}\right).$$

又由

$$F_R|_0\equiv-\left.\left(\frac{\partial\varphi}{\partial R}\right)\right|_0=\left[-LI\frac{\partial I}{\partial R}-\frac{I^2}{2}\frac{\partial L}{\partial R}\right]_0=0,$$

可得

$$\left.\frac{\partial I}{\partial R}\right|_0=-\frac{I}{2L}\left.\frac{\partial L}{\partial R}\right|_0,$$

所以最后终于可得

$$B_{vZ}|_0=\frac{1}{2\pi R_0}\left[-\frac{1}{2}I\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}R}+I\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}R}\right]_0=\frac{I_0}{4\pi R_0}\frac{\mathrm{d}L_0}{\mathrm{d}R_0}.$$

代入(4.76)式后，有

$$\left.\frac{\partial F_Z}{\partial Z}\right|_0 = -\frac{I_0^2}{2R_0}\frac{\mathrm{d}L_0}{\mathrm{d}R_0}n.$$

最后，由垂直稳定条件

$$\left.\frac{\partial F_Z}{\partial Z}\right|_0 < 0, \quad \Rightarrow \quad n > 0. \tag{4.77}$$

其物理意义是：为了使得环的平衡对垂直方向的扰动稳定，“垂直”磁场需要凸向大环的外侧(即 $\boldsymbol{e}_R$ 的正向).

(b) 由环的径向稳定条件$(\partial F_R/\partial R)_0<0$ 所得到的结论.

用和上面同样的方法可以得出

$$\frac{\partial F_R(R_0,Z_0)}{\partial R_0} = \frac{I_0^2}{2R_0}\frac{\mathrm{d}L_0}{\mathrm{d}R_0}\left\{n-1-\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}(\ln L_0)}{\mathrm{d}(\ln R_0)}+\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}[\ln(\mathrm{d}L_0/\mathrm{d}R_0)]}{\mathrm{d}(\ln R_0)}\right\}. \tag{4.78}$$

当 $R_0 \gg a$ 时，$\ln(8R_0/a)\gg 1$，这样水平($\boldsymbol{e}_R$)稳定条件

$$\frac{\partial F_R}{\partial R} < 0, \quad \Rightarrow \quad n < \frac{3}{2}. \tag{4.79}$$

因此综合两个方向的稳定性讨论，对圆截面的等离子体瘦环来说，其平衡对于轴对称扰动的稳定性条件可简单地表示成

$$0 < n < \frac{3}{2}. \tag{4.80}$$

上述条件意味着，垂直场的外凸要适当，才能兼顾垂直和大环径向两方面的稳定需要.

2. 拉长截面情况

当等离子体的小截面不是圆的而是(垂直方向)拉长的椭圆或D形时，垂直扰动的稳定性条件 $n>0$ 并不足以保持环在垂直方向的稳定. 这是由于为了把等离子体从圆形挤长，一般要加一个四极磁场(如图 4.20 所示).

如果垂直场是直的($n=0$)，则拉长截面等离子体环的成形场就是内凹的($n<0$)，它对垂直方向的刚性位移就一定是不稳定的.

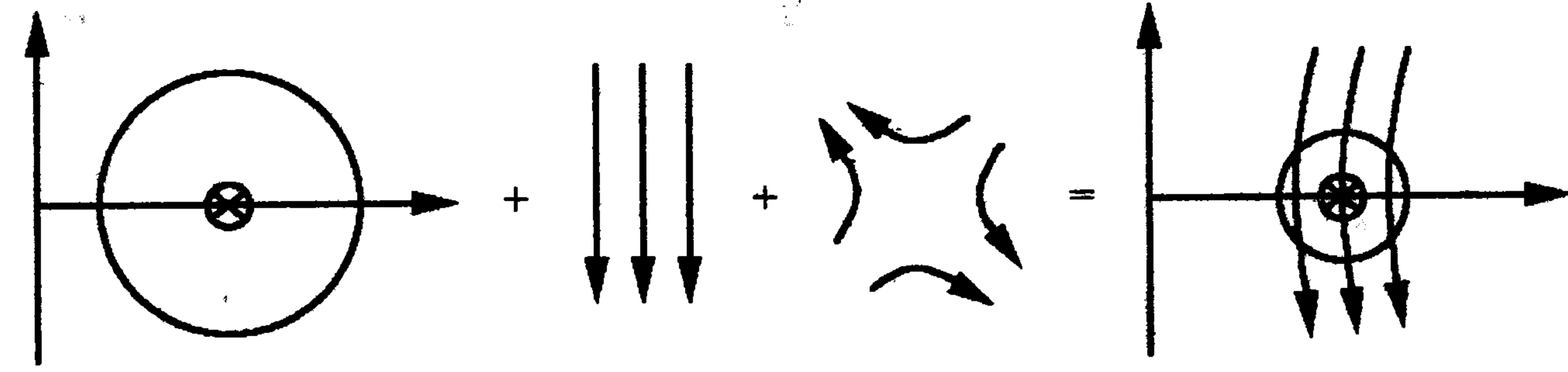


图 4.20　拉长截面的成形示意图

为了分析拉长截面的轴对称稳定性，一定得考虑二维几何位形，因此只能作数值讨论. Haas，Papalaizou[11]曾指出：对一个任意截面形状、任意纵横比(R/a)的轴对称环来说，当小截面上的环向电流密度剖面是向着边界单调下降，而且在等离子体中成形场的衰减因子总是负值时，如果没有附加的被动或主动的稳定系统，则等离子体环对垂直位移的扰动总是不稳定的. 这种不稳定的增长率相当快，大约是磁流体扰动的特征时间——微秒量级. 因此为了保持拉长截面环的平衡，一定得考虑额外的平衡方法. 通常对拉长截面环所采取的稳定手段有以下三种.

(i) 被动法. 这是最简单的稳定方法，就是在环的上、下两端各加一块厚导体板. 当等离子体环从 $Z=0$ 的中心(赤道)面向上或向下偏离时，其磁通在垂直方向上的改变就会在导体板中感应出涡形电流，此涡流所产生的磁场与等离子体环向电流所产生的洛伦兹力反过来会把环推回中心平面. 但这种稳定方法只有在垂直磁通的磁场没有穿透导体板时才起作用，这个穿透时间大约是几十 ms(10^{-2} s). 因此如果我们所需的平衡时间超过上述时间，就必须靠反馈或程序的平衡场这类主动控制法来实现了(这种方法和用厚铜壳维持圆截面环的 $\boldsymbol{e}_R$ 向平衡是完全一样的).

(ii) 程序控制平衡场. 通过安装在等离子体外的平衡场线圈中馈入按程序编排的电流，以调节不同时刻的成形磁场大小，达到抑制环的垂直移动的目的.

(iii) 负反馈控制平衡场. 通过安装在等离子体上、下方的磁探针测定等离子体环对中心平面的偏离程度，接着将此信号经过处理并确定为抑制偏离应当馈入平衡(成形)场线圈中的电流大

小，最后启动供电系统进行实时控制. 这种反馈控制方法虽然可以长时间的保持环的平衡，但受大电流、大功率反馈技术的限制(例如最快的反应时间在目前也只能达到毫秒数量级)，因此通常需要将它和其他几种控制方法结合在一起，才能达到长时间(例如分钟数量级或更长的时间尺度)维持环平衡位置的目的.

目前，通过对轴对称垂直位移稳定性的理论和实验研究，得到了如下的一些结论：

(i) 必须将被动(导体板)和主动(程控或反馈控制)方法结合起来，才能控制环在垂直方向上的位置. 在使用被动方法时，导体板的大小、厚度、材料以及放置的具体位置都很重要. 通常认为在等离子体环的上、下方各放一块导体板效果较好.

(ii) 如对等离子体小截面作一些三角形的畸变会达到增稳效果，其中(加了三角畸变后成为)正 D 形截面(即磁面外凸)要比反 D 形或椭圆形截面的垂直稳定性更好.

(iii) 但是，等离子体小截面的拉长比(垂直方向长度与水平方向宽度之比)不可能太大，它受到临界的衰减因子值 n(当 n 超过此值时大环径向的平衡将不稳定) 以及反馈电源系统的功率响应等一系列技术问题的限制. 目前各种非圆截面 tokamak 等离子体的截面拉长比一般不超过 2.

4.5　电阻撕裂模和磁重联

考虑了磁流体的有限电阻后，磁流体方程组的最大变化是广义欧姆定律变成

$$\boldsymbol{E} + \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{B} = \eta \boldsymbol{J},$$

它直接影响法拉第定律

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = -\nabla \times \boldsymbol{E} = \nabla \times (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{B}) - \nabla \times (\eta \boldsymbol{J}).$$

若再代入安培定律，则得出

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = \nabla \times (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{B}) + \frac{\eta}{\mu} \nabla^2 \boldsymbol{B} - \frac{\nabla \eta}{\mu} \times (\nabla \times \boldsymbol{B}). \quad (4.81)$$

上面方程右面第一项就是第一章中所说的磁力线冻结(在流体上的)效应；第二项代表磁扩散，它使磁场和流体缓慢分离(扩散)，η/μ 即是磁场的扩散系数. 如果流体的扰动足够缓慢，则不会引起磁场的扰动而致使扰动磁势能增加，故这时电阻 η 起的是解稳作用. 尤其是在有理面 $F(r_s)=0$ 处，扰动势能 δW 中所有由磁力线扰动而造成的磁能增加项均为零，这时只剩下数量级较低的热压力驱动项，这时电阻 η 引起的磁扩散项就会显示出明显的解稳作用，从而产生了一种新的不稳定扰动——撕裂模(在磁力线方向上具有有限空间结构——磁岛)或磁重联(在磁力线方向上无限延伸). 第三项中的 $\nabla \eta$ 在磁流体中起着使磁力线对流的作用(类似普通流体中造成流体对流的重力)，当 $\nabla \eta < 0$ 时它会引起电流的对流不稳定性——涟波模(rippling mode).

在 $\eta \neq 0$ 时，导出的关于扰动位移量 $\boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{r})$ 的二阶微分方程是

$$-\omega^2 \rho_0 \boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{\xi}) + \boldsymbol{M}(\boldsymbol{\xi}).$$

其中新出现的算子 $\boldsymbol{M}$ 是和电阻有关的线性算子，由于电阻是一种耗散因素、破坏能量守恒，故 $\boldsymbol{M}$ 并不是自伴算子. 这样就对建立能量原理造成了困难，因此在描述电阻不稳定性时，通常采取简正模方法.

4.5.1　撕裂模的唯象描述

1. 剪切磁场及平板几何

能产生撕裂模——也即能使磁力线的初始扩散得以放大——的平衡磁场通常都具有非零剪切，$\partial \boldsymbol{B}/\partial \boldsymbol{x} \neq 0$. 地球空间磁场中的磁场剪切最为明显(图 4.21). 但实验室中的许多磁流体其磁剪切往往缺乏直观性. 下面以 tokamak 等离子体环为例，来把其中某一磁面(通常是有理面)附近的磁剪切场剥离开来(图 4.22).

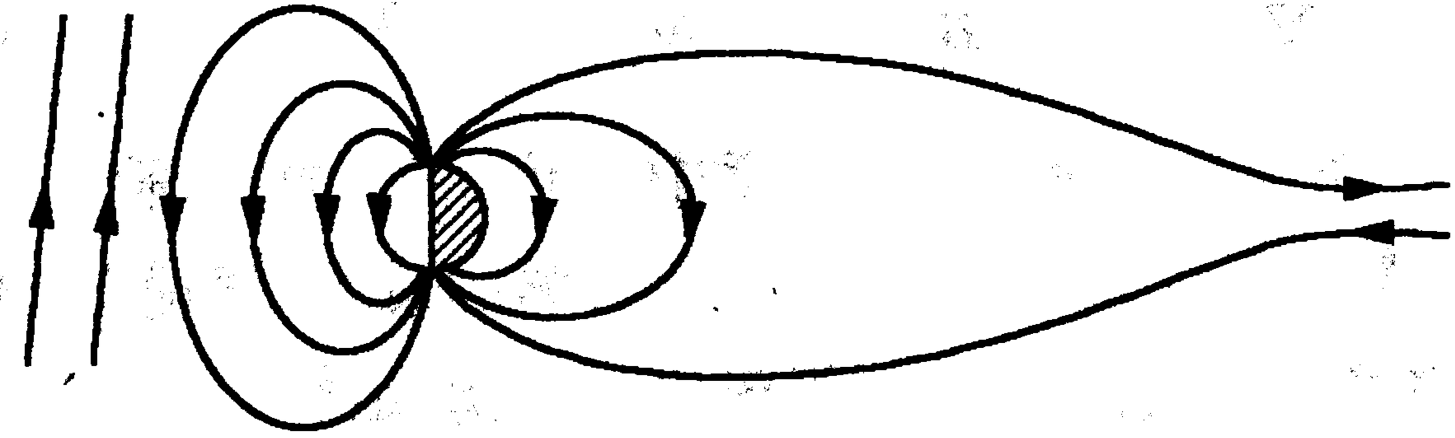
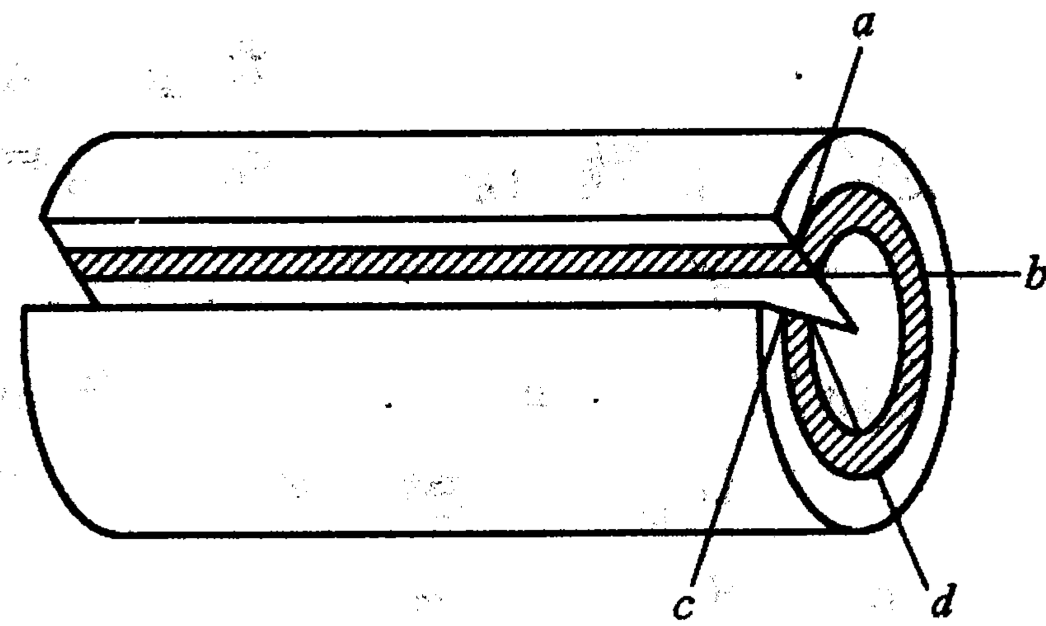
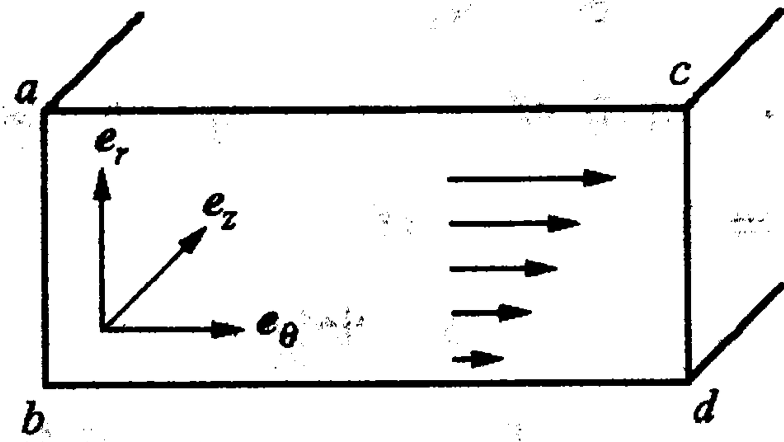
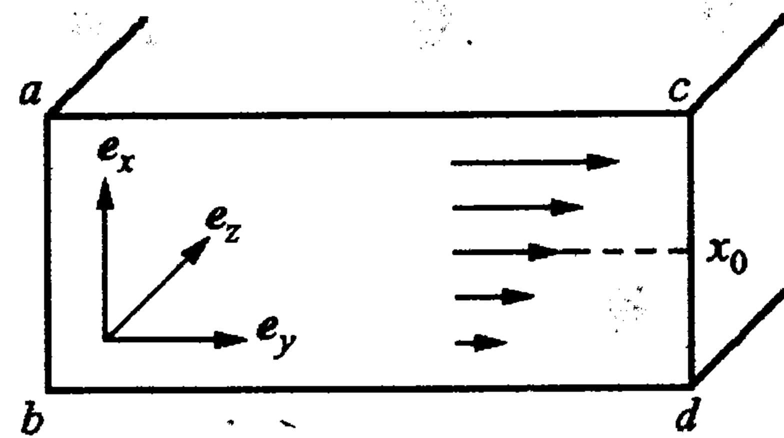


图 4.21 地球磁尾中的磁力线剪切







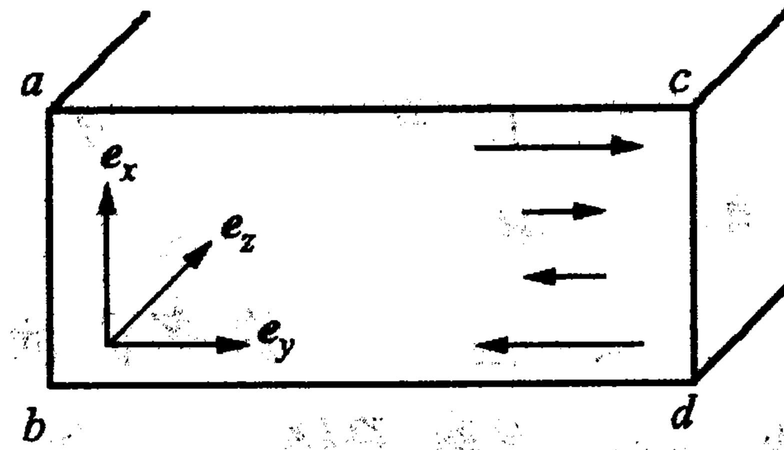


图 4.22 tokamak 等离子体有理面附近的磁场剪切示意图

2. 磁岛形成的过程

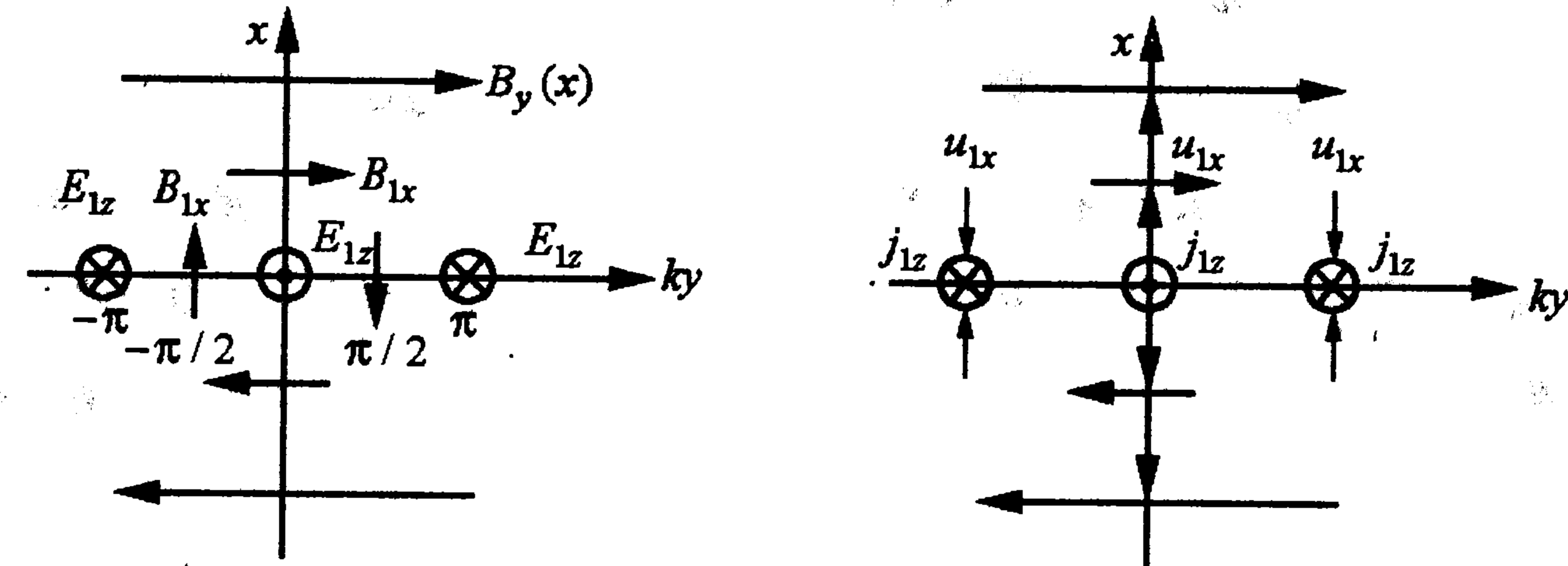


图 4.23 磁岛生成示意图

(a)扰动的磁场和电场,(b)扰动的流场和电流

设有如图 4.23(a)的平衡剪切磁场 $B_y(x)$,其中 $B_y(0)=0$ 且磁场在 e_z 方向上均匀. 假定一开始存在扰动磁场

$$B_{1x}(y)=-\sin ky e^{\gamma t},$$

则由法拉第定律 $\partial B_{1x}/\partial t=-\partial E_{1z}/\partial y$,可得

$$E_{1z}=-\frac{\gamma}{k}\cos ky e^{\gamma t}.$$

当 $\eta\neq 0$ 时,由 E_{1z}可以产生电流,而电流又可以通过洛伦兹力产生流体的扰动(见图 4.23(b))

$$E_{1z}=-u_{1x}B_y+\eta J_{1z},$$

$$\rho_0\frac{\partial u_{1x}}{\partial t}=-J_{1z}B_y.$$

将 E_{1z}代入上式、并设所有扰动的时间行为正比于 $\exp(\gamma t)$,则由上式可解得

$$J_{1z}=-\frac{\gamma/k}{\eta+B_y^2/\rho_0\gamma}\cos ky e^{\gamma t},$$

$$u_{1x}=\frac{\gamma B_y/k}{\rho_0\gamma\eta+B_y^2}\cos ky e^{\gamma t}.$$

它们还可以进一步构成新的感应电场 $E_{1z}^*=-u_{1x}B_y+\eta J_{1z}$;而这个电场又会产生出新的感应磁场 B_{1x}^*,它也在 e_x 方向,但数值由法拉第定律决定:

$$\frac{\partial B_{1x}^*}{\partial t} = B_y \frac{\partial u_{1x}}{\partial y} - \eta \frac{\partial J_{1z}}{\partial y} = \gamma B_{1x}.$$

上式最后的 B_{1x}就是初始的垂直于平衡剪切场的磁扰动. 当 $\gamma>0$ 时,$B_{1x}^*>B_{1x}$,因此初始扰动就可以被放大——直到使平衡的剪切磁场交连而形成磁岛. 这种正反馈循环就是由电阻造成的磁岛的形成机制. 从上面给出的 B_{1x}和 u_{1x},通过 $\nabla\cdot \boldsymbol{B}_1=0$ 和 $\nabla\cdot \boldsymbol{u}_1=0$ 还可以推导出

$$B_{1y} = -\frac{\cos ky}{k}\frac{\partial B_{1x}(x)}{\partial x},\quad u_{1y} = -\frac{\sin ky}{k}\frac{\partial u_{1x}(x)}{\partial x}.$$

在图 4.24 中,给出了当磁场形成磁岛时,相应的扰动磁场、电场、电流及流速的位置与方向.

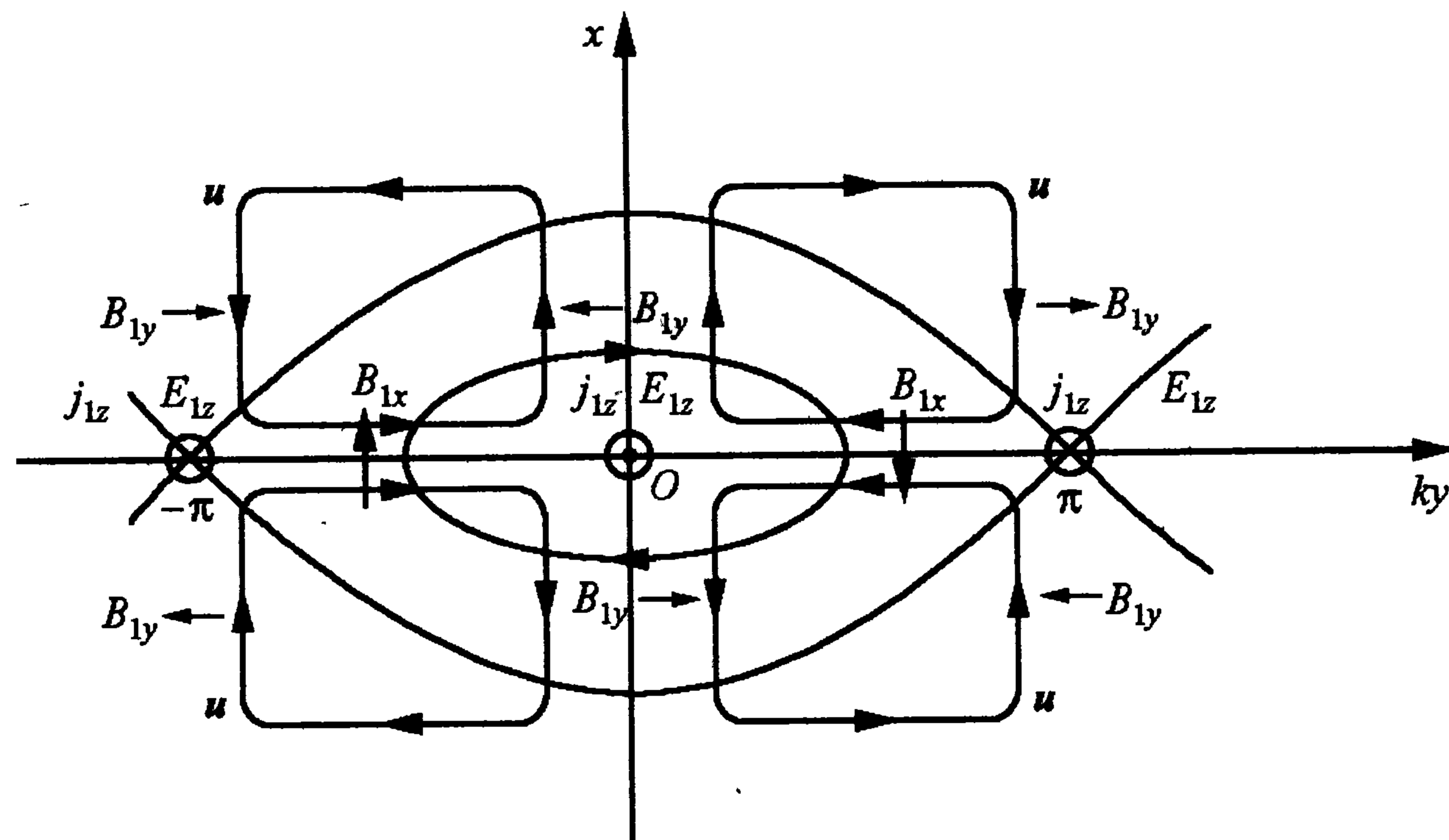


图 4.24 磁岛结构图

4.5.2 空间和天体等离子体中的磁重联(Sweet-Parker 模型简介)

1. 磁重联研究简史

1947 年 R. G. Giovanelli 及 1949 年 F. Hoyle 指出在磁中性点(磁力线交会处,也即 $B=0$ 点)带电粒子可以被加速,以此来解释日珥(aurora)和耀斑(flare).

1953 年 J. Dungey 研究了 X 型中性点(X-point)附近的等离子体行为.

1958 年 P. A. Sweet 探讨了在中性面附近,磁能转换成等离子体动能的速率.

1963 年 E. N. Parker 改进了 Sweet 模型,将磁流体理论用于磁重联的研究. 开创了磁重联理论研究的先河.

2. Sweet-Parker 模型的基本图像

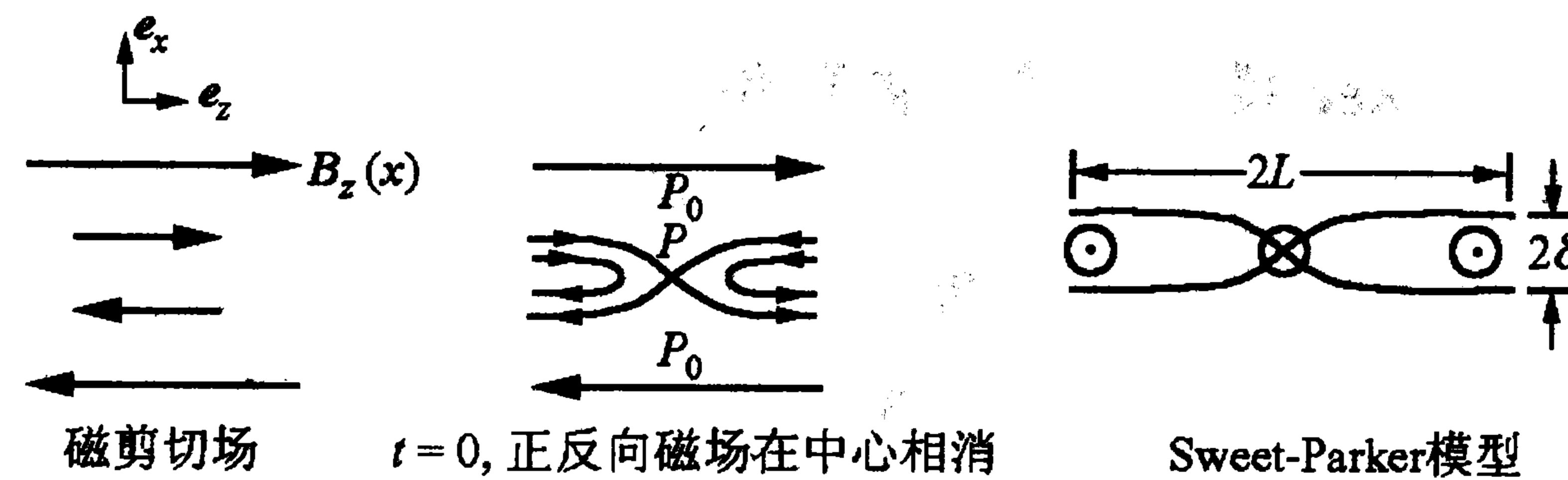


图 4.25 Sweet-Parker 模型的图示

Sweet-Parker 模型是一个二维(x,z)空间模型(见图 4.25),它在 $\boldsymbol{e}_x$ 方向(也即磁场不均匀方向)上的特征尺度为 δ,而在 $\boldsymbol{e}_z$ 方向(平衡磁场方向)上的特征尺度是 L. 在 $t=0$ 时刻,存在一个平衡的剪切磁场 $B_z(x)$,中性面在 $x=0$ 处. 磁流体中存在均匀的热压强 P_0,因而有密度 ρ. 当 $t>0$ 时,如果要求扰动使中性面附近正反向磁场相消,而出现一个 X 型中性点的话,这类扰动就必须由一个在 X 点处的负 y 向电流 J_y 产生. 考虑到有限电阻后,此电流就会对应一个相同方向的电场

$$E_y = \eta J_y,$$

接下来此电场和磁场将产生一个 x 方向的漂移流

$$U_x = -E_y/B_z. \tag{4.82}$$

这将使流体横越磁力线而运动(这时认为磁场位形不动),反过来也可以说由于电阻使磁场(相对于流体而)扩散,而 U_x 就是磁场的扩散速度. 所以,Sweet-Parker 模型的基本假定是: U_x 就是磁场在中性面附近发生重联(相会而抵消)的速率 v_d,也是磁能转换

成等离子体动能的速率. 下面将进一步证明: U_x 正好相当于因电阻而引起的磁扩散速率. 从电漂移公式$U_x=-E_y/B_z$ 出发,通过欧姆定律 $E_y=J_y/\sigma$,再利用安培定律 $\mu J_y=\partial B_z/\partial x\sim B_z/\delta$($\delta$ 是磁场 B_z 在 $\boldsymbol{e}_x$ 方向上的特征尺度),最后可得

$$U_x=-\frac{E_y}{B_z}=-\frac{J_y}{\sigma}\frac{1}{B_z}=-\frac{1}{\delta\mu\sigma}. \tag{4.83}$$

而上式的右端正好是第一章中给出的磁场(因电阻而产生的)扩散速率.

3. Sweet-Parker 模型的磁流体理论

理论的目的: 求出 U_x 与平衡等离子体参数间的依赖关系.

利用静态的连续性方程 $\nabla\cdot\boldsymbol{U}=0$,可得 $\partial U_x/\partial x+\partial U_z/\partial z=0$,然后利用 Sweet-Parker 模型的特征空间尺度可得

$$U_xL=-U_z\delta. \tag{4.84}$$

再从静态运动方程 $\rho\boldsymbol{U}\cdot\nabla\boldsymbol{U}=-\nabla P$,可得

$$\rho U_z\partial U_z/\partial z\sim-\partial P/\partial z;$$

将上式对 z 作积分$\int\cdots\mathrm{d}z$,可近似得到

$$\frac{1}{2}\rho U_z^2\Big|_{\text{in}}^{\text{out}}=-P\Big|_{\text{in}}^{\text{out}},\quad\Rightarrow\quad\frac{1}{2}\rho U_z^2=-P_0+P. \tag{4.85}$$

其中用到了内、外区中的平衡量值,在内区 $U_z\sim0$,压强为 P;在外区有 $U_z\neq0$ 及 $P=P_0$. 而在内外区的边界$(-\delta,+\delta)$上有总(磁+热)压强的平衡条件

$$P=P_0+\frac{B_z^2}{2\mu}. \tag{4.86}$$

其中左边代表内区,这里由于磁重联 $B_z|_{\text{in}}\sim0$,右面代表外区未重联时的平衡值. 由(4.84)和(4.85)式,并再代入(4.83)式后,有

$$U_x^2L^2=U_z^2\delta^2=\frac{2}{\rho}(P-P_0)\delta^2=\frac{2(P-P_0)}{\rho\mu^2\sigma^2}\frac{1}{U_x^2},$$

代入平衡方程(4.86)后,得

$$U_x^4=\frac{2(P-P_0)}{\rho L^2\mu^2\sigma^2}=\frac{2}{\rho L^2\mu^2\sigma^2}\frac{B_z^2}{2\mu}.$$

所以最后得

$$U_x^2=\frac{B_z}{\sqrt{\mu\rho}}\frac{1}{L\mu\sigma}=\frac{V_{\text{A}}}{L\mu\sigma},\quad V_{\text{A}}=\frac{B_z}{\sqrt{\mu\rho}},$$

其中 V_{A} 是阿尔文速度. 如果引用和 V_{A} 相关的磁雷诺数

$$(Rm)_{\text{A}}=\mu\sigma LV_{\text{A}}, \tag{4.87}$$

则

$$U_x=\frac{V_{\text{A}}}{\sqrt{(Rm)_{\text{A}}}}\propto\frac{1}{\sqrt{L}}.$$

对于磁流体来说$(Rm)_{\text{A}}$是一个很大的数,故一般 $U_x\ll V_{\text{A}}$. 这样算出的磁能转换成等离子体能的速率要比实际观测值小 10~100 倍.

4. Petschek 模型

1964 年 H. Petschek 指出,Parker-Sweet 模型只适用于重联发生的初期,当重联发展起来后,由于被重联区域的不断扩大,X 型点也在变大. 这时如果把重联层在 x 方向的宽度 2δ 假设成是不变的话,则它在 z 方向的特征长度从重联初期的 $2L$ 收缩成约 2δ. 相应的重联速率就变成

$$U_x^2=\frac{V_{\text{A}}}{\delta\mu\sigma}.$$

由于 $\delta\ll L$,故上式得出的重联速度要比 Parker-Sweet 模型所给出的值大得多. 而且从(4.83)式可知: 上式中的$(\delta\mu\sigma)^{-1}$正好相当于因电阻而引起的磁扩散速率 U_x,于是可知

$$|U_x|=V_{\text{A}}.$$

这样磁重联的速率在重联后期就由 V_{A} 决定,此值大得足以解释日珥和耀斑现象. 以上只是 Petschek 模型的唯象描述,它的磁流体方程严格解请参考有关文献[12];[13].

磁重联的电阻磁流体理论有以下缺点:

(i) 空间等离子体中粒子几乎是无碰撞的,这时电阻如何产生? 广义欧姆定律是否仍成立?

(ii) 上述磁场重联图像尚无实验的确切证明.

近十多年,又发展出一种快速磁重联理论.它认为如果在体系外有一个垂直于中性面并向中性面流来的等离子体流,则在速度足够大时它将强行挤压中性面附近的磁力线而导致其重联(见图4.6的左侧和右侧).这种挤压甚至可以导致沿中性面的多点磁重联(多X型点重联).它的最大特点是不需要电阻参与,而只需有非局部大尺度的等离子体流动,这正是许多空间和天体等离子体所具有的.而且,由于许多空间和天体等离子体的大尺度特征度流速都在阿尔文速度附近,故它所导致的磁重联特征速率自然也是阿尔文速率.这个速率大大高于 Sweet-Parker 模型给出的磁重联速率,而接近 Petschek 模型的磁重联速率,但又没有电阻问题的困扰.同时在一些空间等离子体的观测中也发现有多X型点重联的证据,这在快重联理论中可以得到自然解释,而在电阻磁重联理论中则很难设想.此外近年来还发展了湍流磁重联、涡旋磁重联等一些全新的磁重联理论模型,有兴趣的读者可参考上面给出的文献[12],[13].

对于实验室等离子体,虽然近年来也在一些特殊的不稳定模式中运用了快重联的机制,但在多数情况下电阻磁扩散仍然是最主要的磁场交连机制.下面就着重地介绍这方面的理论.

4.5.3 线性撕裂模理论

在撕裂模理论中,经常用到一些特征长度.它们是磁岛宽度 W,电阻起主要作用的奇异层宽度 X_T,有理面 r_s 附近、剪切磁场的特征长度 L_s,以及等离子体环的小半径 a(一般有 $X_T \ll L_s \ll a$).线性理论描述的是扰动初期的时间行为,这时 $W \ll X_T$;准线性理论讨论磁岛增长到 $W \sim X_T$ 时的撕裂模演化行为;而非线性理论则处理 $W > X_T$ 时的撕裂模时间行为.由于撕裂模不但和 tokamak 等离子体的许多主要的磁流体活动(包括等离子体电流的突然中断——所谓大破裂)有密切关系,也有很大可能和困扰人们已久的反常输运有关,所以它自1963年被提出以来就始终经久而不衰,一直是理论研究的热点,所积累的文献不可数计.这里只介绍最简单而物理图像又最清楚的线性平板模型.

在平板模型中,假定磁流体是静止的($\boldsymbol{u}_0=0$),其密度(ρ)为常数,而且平衡磁场取成:

$$\boldsymbol{B}_0 = B_z\boldsymbol{e}_z + B_y(x)\boldsymbol{e}_y,$$

其中

$$B_z = 常数, \quad B_y(x) = BF(x),$$

$$F(x) = \tanh(x).$$

上式中的 x 已归一化到 L_s(图4.26).

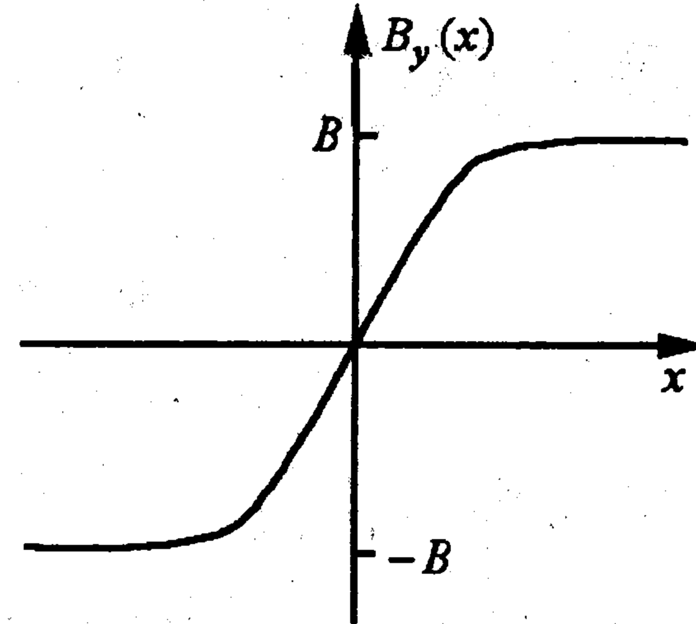


图4.26 平板模型中的平衡剪切磁场

由于在平板模型中只涉及二维几何 (x,y),故基本的线性方程组是 $\boldsymbol{u}_0=0$,$\rho_0=\rho=$常数的约化 MHD 方程组,

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}_1}{\partial t} = -\nabla\times\boldsymbol{E}_1,$$

$$\rho\frac{\partial \boldsymbol{u}_1}{\partial t} = -\nabla P_1 + \boldsymbol{J}_1\times\boldsymbol{B}_0 + \boldsymbol{J}_0\times\boldsymbol{B}_1,$$

$$\mu\boldsymbol{J}_1 = \nabla\times\boldsymbol{B}_1,$$

$$\boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{u}_1\times\boldsymbol{B}_0 = \eta\boldsymbol{J}_1, \quad \boldsymbol{E}_0 = \eta\boldsymbol{J}_0,$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}_1 = 0,$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{u}_1 = 0.$$

由于上面最后二个方程(其中一个表示磁流体扰动是不可压缩的),所以在二维问题中可以分别引进二个标量场:角向磁通 $\psi(x,y)$ 和流函数 $\phi(x,y)$,来描述磁场 $B_y(x)$,$\boldsymbol{B}_1$ 和流速场 $\boldsymbol{u}_1$,

$$\boldsymbol{B} = \nabla\psi\times\boldsymbol{e}_z + B_z\boldsymbol{e}_z,$$

$$\boldsymbol{u} = \nabla\phi\times\boldsymbol{e}_z.$$

1. 利用这两个式子可以把约化 MHD 方程改写成对 ψ 和 ϕ 的方程组

(1) 磁场演化方程式的改写

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}=\nabla\times(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B})-\nabla\times(\eta\boldsymbol{J}).$$

先看上式右面第一项,其中

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B}&=\boldsymbol{u}\times[\nabla\psi\times\boldsymbol{e}_z]+\boldsymbol{u}\times(B_z\boldsymbol{e}_z)\\&=(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{e}_z)\nabla\psi-(\boldsymbol{u}\cdot\nabla\psi)\boldsymbol{e}_z+B_z\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{e}_z\\&=-(\boldsymbol{u}\cdot\nabla\psi)\boldsymbol{e}_z-B_z\nabla\phi,\end{aligned}$$

于是这项可化为

$$\begin{aligned}\nabla\times(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B})&=-\nabla\times[(\boldsymbol{u}\cdot\nabla\psi)\boldsymbol{e}_z]-B_z\nabla\times\nabla\phi\\&=-\nabla(\boldsymbol{u}\cdot\nabla\psi)\times\boldsymbol{e}_z.\end{aligned}$$

再看右面第二项,其中电流

$$\begin{aligned}\boldsymbol{J}=\frac{1}{\mu}\nabla\times\boldsymbol{B}&=\frac{1}{\mu}\nabla\times[\nabla\psi\times\boldsymbol{e}_z+B_z\boldsymbol{e}_z]\\&=\frac{1}{\mu}\left[-\nabla^2\psi\boldsymbol{e}_z+\nabla\frac{\partial\psi}{\partial z}\right]\\&=-\frac{1}{\mu}\nabla^2\psi\boldsymbol{e}_z,\end{aligned}$$

其中用到了平衡磁场"躺"在 ψ=常数的磁面上这一平衡条件:

$$\boldsymbol{B}\cdot\nabla\psi=0=B_z\frac{\partial\psi}{\partial z}.$$

所以,最后有

$$\begin{aligned}\nabla\times(\eta\boldsymbol{J})&=-\nabla\times\left(\frac{\eta}{\mu}\nabla^2\psi\boldsymbol{e}_z\right)\\&=-\nabla\left(\frac{\eta}{\mu}\nabla^2\psi\right)\times\boldsymbol{e}_z.\end{aligned}$$

将它们都代入磁演化方程后,得

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\psi)\times\boldsymbol{e}_z=-\nabla(\boldsymbol{u}\cdot\nabla\psi)\times\boldsymbol{e}_z-\nabla\left(\frac{\eta}{\mu}\nabla^2\psi\right)\times\boldsymbol{e}_z,$$

结果磁场演化方程变成

$$\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t}\equiv\frac{\partial\psi}{\partial t}+\boldsymbol{u}\cdot\nabla\psi=\frac{\eta}{\mu}\nabla^2\psi.$$

(2) 运动方程的改写

从运动方程

$$\rho\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}=-\nabla P+\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{B}$$

出发,对上式两边同取旋度(对 ∇P 一项,有 $\nabla\times\nabla P\equiv0$,略去)后,再同点乘 $\boldsymbol{e}_z$;其中各项可分别化为

$$\boldsymbol{e}_z\cdot(\nabla\times\boldsymbol{u})=\nabla\cdot(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{e}_z)+\boldsymbol{u}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{e}_z)=-\nabla^2\phi,$$

$$\begin{aligned}\nabla\times(\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{B})&=\nabla\times\left(-\frac{1}{\mu}\nabla^2\psi\boldsymbol{e}_z\times\boldsymbol{B}\right)\\&=-\frac{1}{\mu}\nabla\times(\nabla^2\psi\nabla\psi)\\&=-\frac{1}{\mu}\nabla^2\psi(\nabla\times\nabla\psi)-\frac{1}{\mu}(\nabla\nabla^2\psi)\times\nabla\psi\\&=\frac{1}{\mu}\nabla\psi\times(\nabla(\nabla^2\psi)),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{e}_z\cdot\nabla\times(\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{B})&=\frac{1}{\mu}\boldsymbol{e}_z\cdot\nabla\psi\times(\nabla(\nabla^2\psi))\\&=\frac{1}{\mu}\boldsymbol{e}_z\times\nabla\psi\cdot\nabla(\nabla^2\psi)\\&=\nabla\psi\times\boldsymbol{e}_z\cdot\nabla\left(-\frac{1}{\mu}\nabla^2\psi\right)\\&=\boldsymbol{B}\cdot\nabla J_z.\end{aligned}$$

所以最后可得运动方程

$$\rho\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\nabla^2\phi=-\frac{1}{\mu}\boldsymbol{e}_z\cdot[\nabla\psi\times(\nabla(\nabla^2\psi))].$$

这样基本方程组就改写成

$$\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t}\equiv\frac{\partial\psi}{\partial t}+\boldsymbol{u}\cdot\nabla\psi=\frac{\eta}{\mu}\nabla^2\psi,\qquad(4.88)$$

$$\rho\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\nabla^2\phi=-\frac{1}{\mu}\boldsymbol{e}_z\cdot[\nabla\psi\times(\nabla(\nabla^2\psi))],\qquad(4.89)$$

$$J_z = -\frac{1}{\mu}\nabla^2\psi. \tag{4.90}$$

2. 平衡($\partial/\partial t=0$)解及其线性展开

由法拉第定律(4.90)得

$$J_{z0} = -\frac{\psi_0''(x)}{\mu},$$

同时有

$$B_y(x) = -\psi_0'(x) = BF(x).$$

又由 $\boldsymbol{u}_0=0$,得

$$\nabla\phi_0 \times \boldsymbol{e}_z = 0,\quad \frac{\partial\phi_0}{\partial x} = \frac{\partial\phi_0}{\partial y} = 0.$$

于是可取

$$\phi_0(x,y) = 常数 = 0. \tag{4.91}$$

下面来讨论线性扰动,任一线性扰动量可令其表示为

$$A(x,y,t) = A(x,y)\exp(\gamma t).$$

则可把磁通和流函数展开成(参见图 4.27)

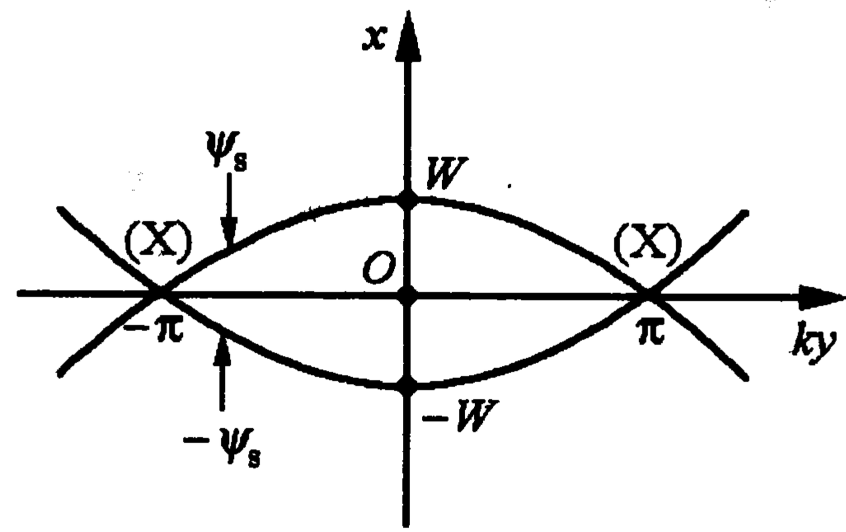


图 4.27　扰动磁通函数的图形

$$\psi(x,y) = \psi_0(x) + \psi_1(x,y) = \psi_0(x) + \psi_1(x)\cos ky,$$

$$\phi(x,y) = \phi_1(x,y) = \frac{\gamma}{kB}\phi_1(x)\sin ky.$$

3. 磁岛宽度 W

由图可见,由于扰动 ψ_1 和 ϕ_1,使磁力线在中性面附近交连成磁岛. 设磁岛中心在坐标原点——这点通常称为 O 点;交连点在($x=0,y=\pm\pi/k$)处——称为 X 点;通过两个 X 点的磁面 ψ_s 则称为分界面(separatrix). 在分界面之内的磁力线都闭合成岛状——即是所谓磁岛,而在分界面以外的磁面都不交连,只在扰动下略有波动. 由上面对 $\psi(x,y)$ 的展开式,在 X 点有

$$\psi_s\left(0,\pm\frac{\pi}{k}\right) = \psi_0(0) - \psi_1(0).\quad (\cos\pm\pi = -1)$$

这个磁面在 $\pm W$ 处和 x 轴相交,此处是磁岛最宽处,因而 W 代表磁岛的半宽. 在这点(即 O 点)

$$\psi_s(x=W,ky=0) = \psi_0(W) + \psi_1(W).\quad (\cos 0 = 1)$$

由于上面两式左边的 ψ_s 是相同的,故

$$\psi_0(0) - \psi_1(0) = \psi_0(W) + \psi_1(W).$$

在线性发展阶段,W 很小,故可以把它当成小参量来展开

$$\psi_0(W) = \psi_0(0) + \psi_0'(0)W + \frac{1}{2}\psi_0''W^2 + \cdots,$$

且 $\psi_0'(x) = -BF(x)$,$F(0)=0$,故有 $\psi_0'(0)=0$;代入展开式后,可得

$$W^2 = -\frac{2(\psi_1(0)+\psi_1(W))}{\psi_0''(0)}.$$

推导到这里时,线性理论中通常都采用以下基本假定:在 $x<X_T$ 的区域内(通常被称为内区)$\psi_1(x)=\psi_1=$常数. 因为在线性不稳定阶段 $W\ll X_T$,故在这薄薄的一层中这样的假定是合理的. 后面将证明,线性色散关系对 $\psi_1(x)$ 在磁岛内的具体函数结构并不敏感(敏感的是在分界面上的一阶导数 $\psi_1'(X_T)$). 于是在 ψ_1 为常数假定下磁岛宽度为

$$W = 2\sqrt{-\left(\frac{\psi_1}{\psi_0''(0)}\right)}.$$

代入平衡量的公式 $\psi_0''(x) = -BF'(x)$ 后,有

$$W = 2\left(\frac{\psi_1}{BF'(0)}\right)^{1/2}.$$

而在 $x\ll 1$ 时,$F(x)=\tanh(x)\sim x$,故有 $F'(x)=1$,这样最后可把磁岛宽度表达成

$$W = 2\left(\frac{\psi_1}{B}\right)^{1/2}, \tag{4.92}$$

其中 B 是剪切磁场的饱和(最大)强度. 从上式可以看出,磁岛宽度在线性阶段只和磁岛中常数的扰动磁场幅度 ψ_1 有关.

4. 一阶扰动方程及其分区解

利用扰动的展开表达式

$$\psi(x,y)=\psi_0(x)+\psi_1(x)\cos ky,$$

$$\phi(x,y)=\frac{\gamma}{kB}\phi_1(x)\sin ky.$$

其中诸量已化作无量纲的量：x 已归一到 L_s，y 已归一到 a，k 则归一到 $1/a$. 将它们代入线性方程组(4.88)和(4.89)后，得

$$\psi_1(x)-F(x)\phi_1(x)=\frac{1}{\gamma\tau_R}[\psi_1''(x)-k^2\psi_1(x)], \tag{4.93}$$

$$-\gamma^2\tau_A^2[\phi_1''(x)-k^2\phi_1(x)]=F(x)[\psi_1''(x)-k^2\psi_1(x)]-F''\psi_1(x). \tag{4.94}$$

其中

$$\tau_R=\frac{\mu a^2}{\eta},\quad \tau_A=\frac{1}{kV_A}=\frac{\sqrt{\mu\rho}}{kB}.$$

τ_R 是磁场扩散特征长度为 a 时所需要的时间——即电阻扩散特征时间，而 τ_A 是在 y 方向上磁场扰动传播距离 a 所需时间——即所谓的阿尔文时间，一般 $\tau_R\gg\tau_A$. 习惯上定义

$$s=\frac{\tau_R}{\tau_A}=\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}\,\frac{ka^2B}{\eta}.$$

对 tokamak 等离子体来说，$s\sim10^6$.

方程(4.93)和(4.94)是两个耦合的二阶微分方程组，如果合并，则是一个四阶方程. 它在 $F(0)=0$ 处会降阶，因此"0"点是方程的奇点，解在这里会发散. 处理有奇点方程的常用的一种方法是分区求解法(例如参见文献[14])，即将 x 空间分成内区——奇异区 $(x<x_c\ll1, F(x)\sim x\sim0, \psi(x)=\psi_1(0))$，和外区——非奇异区 $(x_c<x\ll1, F(x)\neq0)$.

(1) 内部区解 $(x<x_c\ll1)$

这时可取 $F(x)\sim x$，$F''(x)=0$. 并利用

$$\psi_1''(x)\sim\frac{1}{x_c^2}\psi_1(x)\gg k^2\psi_1(x),$$

$$\phi_1''(x)\sim\frac{1}{x_c^2}\phi_1(x)\gg k^2\phi_1(x);$$

则耦合方程组(4.93)、(4.94)可化简成

$$\psi_1(x)-F(x)\phi_1(x)=\frac{1}{\gamma\tau_R}\psi_1''(x), \tag{4.95}$$

$$-\gamma^2\tau_A^2\phi_1''(x)=F(x)\psi_1''(x). \tag{4.96}$$

将后一个方程代入前一个，可得

$$\frac{1}{\gamma\tau_R}\frac{\gamma^2\tau_A^2}{F(x)}\phi_1''(x)-F(x)\phi_1(x)=-\psi_1(x).$$

再利用 ψ_1 为常数的近似 $\psi_1(x)=\psi_1(0)=\psi_1$ 及 $F(x)\sim x$，则扰动流函数满足非齐次的二阶非线性方程

$$\frac{\gamma\tau_A^2}{\tau_R}\phi_1''(x)-x^2\phi_1(x)=-x\psi_1.$$

如令 $x=(\gamma\tau_A^2/\tau_R)^{1/4}z$ 及 $\phi_1(x)=-(\tau_R/\gamma\tau_A^2)^{1/4}\psi_1\chi(z)$，则可将上式化为无量纲形式

$$\chi''-z^2\chi=z, \tag{4.97}$$

或 $\chi''=z(1+z\chi)$. 此方程式有严格的解析解，下面是求解的具体过程.

(i) 首先将方程式的非齐次项变成常数.

再一次令 $z^2=y$，$\chi=zH=y^{1/2}H$，利用

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}=2z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}=2y^{1/2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y},$$

于是有

$$\frac{\mathrm{d}\chi}{\mathrm{d}z}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}(y^{1/2}H)=2y^{1/2}\left(\frac{1}{2}y^{-1/2}H+y^{1/2}\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}y}\right)$$

$$=H+2y\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}y},$$

$$\frac{d^2\chi}{dz^2}=2y^{1/2}\frac{d}{dy}\left(H+2y\frac{dH}{dy}\right)=4y^{3/2}\frac{d^2H}{dy^2}+6y^{1/2}\frac{dH}{dy}.$$

结果原方程(4.97)可写成

$$4y\frac{d^2H}{dy^2}+6\frac{dH}{dy}-yH=1.$$

(ii) 作傅氏变换并求傅氏空间解.

令

$$H(y)=\int\mathscr{H}(k)e^{iky}dk,\quad \mathscr{H}(k)=\frac{1}{2\pi}\int H(y)e^{-iky}dy,$$

由此可以得

$$yH=\int y\mathscr{H}e^{iky}dk=\int\mathscr{H}(k)\left(-i\frac{d}{dk}e^{iky}\right)dk$$

$$=-i\mathscr{H}e^{iky}\Big|_{k=-\infty}^{\infty}+i\int\frac{d\mathscr{H}}{dk}e^{iky}dk.$$

这样 yH 和 $id\mathscr{H}/dk$ 就在傅氏变换中互为“像”：

$$yH\Leftrightarrow i\frac{d\mathscr{H}}{dk}.$$

同样还有

$$\frac{dH}{dy}\Leftrightarrow ik\mathscr{H},\quad \frac{d^2H}{dy^2}\Leftrightarrow -k^2\mathscr{H},$$

$$y\frac{d^2H}{dy^2}\Leftrightarrow -i\frac{d}{dk}(k^2\mathscr{H}),\quad 1\Leftrightarrow\delta(k).$$

利用上面的这些变换，原方程的傅氏变换就是

$$(4k^2+1)\frac{d\mathscr{H}}{dk}+2k\mathscr{H}=i\delta(k).$$

对上式进一步作变化，最后可得傅氏空间的解析解

$$(4k^2+1)^{3/4}\frac{d}{dk}[(4k^2+1)^{1/4}\mathscr{H}]=i\delta(k),$$

$$\frac{d}{dk}[(4k^2+1)^{1/4}\mathscr{H}]=i\frac{\delta(k)}{(4k^2+1)^{3/4}},$$

$$(4k^2+1)^{1/4}\mathscr{H}=i\int\frac{\delta(k)}{(4k^2+1)^{3/4}}dk=i,$$

$$\mathscr{H}=i(4k^2+1)^{-1/4}.$$

(iii) 作 $\mathscr{H}$ 的逆变换.

$$H=i\int\frac{\exp(iky)}{(4k^2+1)^{1/4}}dk.$$

因为 H 是实函数，故可令 $k=i\mu/2$，$k^2=-\mu^2/4$，于是

$$H=-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{\exp(-\mu y/2)}{(1-\mu^2)^{1/4}}d\mu.$$

其中 $0\leqslant\mu\leqslant1$ 的取值，是考虑到 H 必须是实数；此外当 $y\to\infty$ 时，上面的积分能保证 H 有界. 也可以令

$$\mu=\cos\varphi,\quad\Rightarrow\quad d\mu=-\sin\varphi d\varphi,\quad (1-\mu^2)^{1/4}=\sin^{1/2}\varphi;$$

这样还可以得到另外一种表达式

$$H(y)=-\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}d\varphi\sin^{1/2}\varphi\exp(-\cos\varphi y/2).$$

(iv) 解的最后表达式.

$$\chi(z)=zH=-\frac{z}{2}\int_0^{\pi/2}d\varphi\sin^{1/2}\varphi\exp(-\cos\varphi z^2/2)\quad(4.98)$$

$$=-\frac{z}{2}\int_0^1\frac{\exp(-\mu z^2/2)}{(1-\mu^2)^{1/4}}d\mu,\quad(4.99)$$

$\chi(z)$的函数形式见图 4.28.

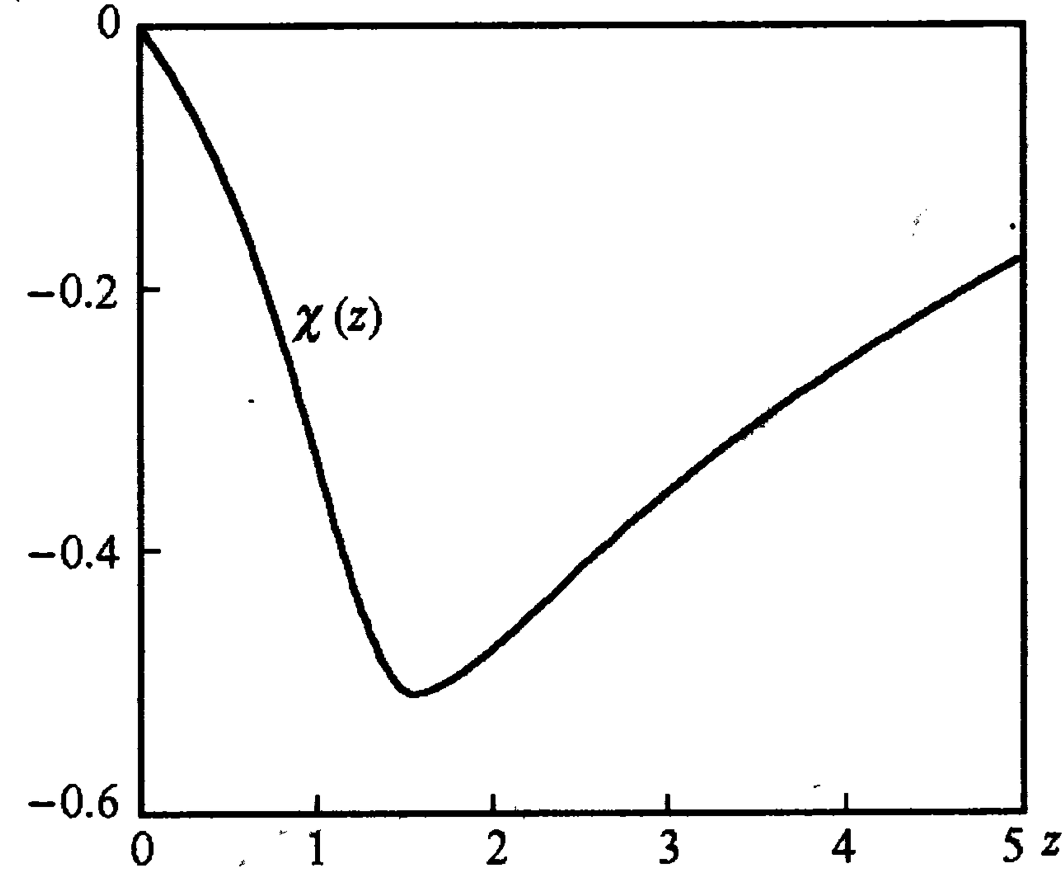


图 4.28 $\chi(z)$的图形

由此可得内区解

$$\phi_1(x) = -\left(\frac{\tau_R}{\gamma\tau_A^2}\right)^{1/4}\psi_1\chi(z), \tag{4.100}$$

$$\psi_1(x) = \psi_1, \tag{4.101}$$

其中 ψ_1 是常数.

(2) 外部区解

这时由于 $F(x)\neq 0$, $\tau_R^{-1}\sim\eta/a^2\ll\tau_A^{-1}$. 故可以把电阻扩散的慢过程略去,这样外区的物理过程是由理想磁流体方程描述的. 这时耦合方程就简化成

$$\psi_1(x) = F(x)\phi_1(x),$$

$$-\gamma^2\tau_A^2[\phi_1''(x) - k^2\phi_1(x)] = F(x)[\psi_1''(x) - k^2\psi_1(x)] - F''(x)\psi_1(x),$$

其中 τ_A 是阿尔文波传播的特征时间,而 γ 是不稳定性的增长率,一般有 $\gamma\tau_A\ll 1$. 故方程还可以进一步简化为

$$\psi_1(x) = F(x)\phi_1(x),$$

$$F(x)[\psi_1''(x) - k^2\psi_1(x)] = F''(x)\psi_1(x).$$

考虑到 $F(x)=\tanh(x)$,此方程可以有严格解(图 4.29)

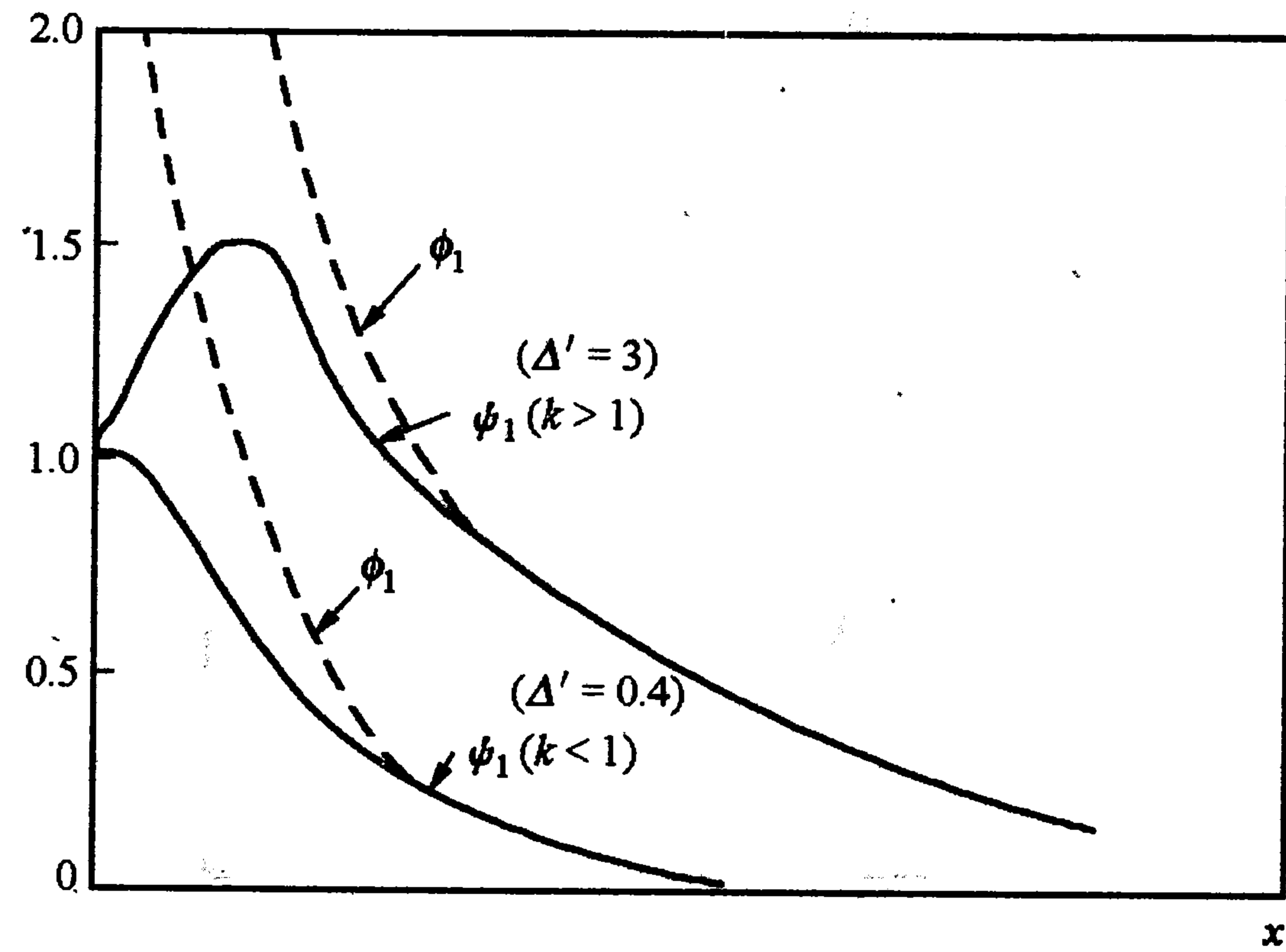


图 4.29　外区解 $\psi_1(x)$ 和 $\phi_1(x)$ 的图形

$$\psi_1(x) = \exp[\mp kx]\left(1 \pm \frac{\tanh x}{k}\right)$$

(正负号的取定为: 上面的符号用在 $x>0$,下面的符号用在 $x<0$),

$$\phi_1(x) = \frac{1}{F}\psi_1(x),$$

其中已用到了无穷远的边界条件.

5. 色散关系

对微分方程形式的本征值问题,色散关系是由边界条件定出的;在分区求解的情况下,色散关系则是通过边界条件以及分区交界处解的连接条件来给出的. 在内区,$x=0$ 处的有界边条件在定解时已经使用了;而在外区,$x\to\infty$ 的有界边条件也被使用了. 因为分区后的微分方程是二阶的,故连接条件有两个:

$$\psi_{1in}(x_c) = \psi_{1out}(x_c),$$

$$\psi_{1in}'(x_c) = \psi_{1out}'(x_c),$$

其中 x_c 是内外区的分界面. 上面的第一个连接条件很容易通过调节内区解的 ψ_1 值来满足. 问题在于第二个连接条件要求先知道内区磁通 $\psi_1(x)$ 的精确解,而直接求解内区关于 $\psi_1(x)$ 和 $\phi_1(x)$ 的耦合二阶微分方程又不可能(在前面我们是通过 ψ_1 常数近似来回避的). 这个困难是通过下面描述的方法来绕过去的: 由 $\phi_1(x)$ 的内区解((4.100)式)及表示 $\psi_1''(x)$ 和 $\phi_1''(x)$ 关系的(4.96)式,可得出 $\psi_1''(x)$ 的严格表达式,再对它积分就可得

$$\int_{-x_c}^{x_c} dx\,\psi_1''(x) = \psi_1'(x_c) - \psi_1'(-x_c).$$

上式无论对内区还是外区都正确. 再考虑到 $F(x)$ 对于 $x=0$ 的对称性,无论对内区解还是外区解都有 $\psi_1'(x) = -\psi_1'(-x)$,故 $\psi_{1in}'(x_c) - \psi_{1in}'(-x_c) = 2\psi_{1in}'(x_c)$,同样 $\psi_{1out}'(x_c) - \psi_{1out}'(-x_c) = 2\psi_{1out}'(x_c)$. 因此第二个连接条件实际上可以用内外区中的积分——上式的左端——来代替:

$$\Delta = \Delta'. \tag{4.102}$$

其中 Δ' 代表外区的量(这时内、外边界 x_c 对它来说相当于原点),

$$\begin{aligned}\Delta' &= \frac{\psi'_{1\text{out}}(x_c) - \psi'_{1\text{out}}(-x_c)}{\psi_1} \\ &= \frac{\psi'_{1\text{out}}(0^+) - \psi'_{1\text{out}}(0^-)}{\psi_1} \\ &= 2\left(\frac{1}{k} - k\right).\end{aligned}$$

而 Δ 则代表内区的相应量(这时内、外边界对它来说相当于无穷远),

$$\begin{aligned}\Delta &= \frac{\psi'_{1\text{in}}(x_c) - \psi'_{1\text{in}}(-x_c)}{\psi_1} \\ &= \frac{\psi'_{1\text{in}}(\infty) - \psi'_{1\text{in}}(-\infty)}{\psi_1} \\ &= \frac{1}{\psi_1}\int_{-\infty}^{\infty} \psi''_1(x)\mathrm{d}x \\ &= -\frac{\gamma^2\tau_A^2}{\psi_1}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi''_1}{x}\mathrm{d}x \\ &= \gamma^{5/4}\tau_R^{3/4}\tau_A^{1/2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\chi''_1(z)}{z}\mathrm{d}z \\ &= \gamma^{5/4}\tau_R^{3/4}\tau_A^{1/2}\Xi,\end{aligned}$$

而其中的积分也可以积出

$$\begin{aligned}\Xi &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\chi''(z)}{z}\mathrm{d}z \\ &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}z\int_0^1\mathrm{d}\mu(1-\mu^2)^{-1/4}(3\mu - z^2\mu^2)\exp(-z^2\mu/2) \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{2}}\int_0^1\mathrm{d}\mu\mu^{1/2}(1-\mu^2)^{1/4} \\ &= \pi\frac{\Gamma(3/4)}{\Gamma(1/4)}.\end{aligned}$$

将所求出的 Δ' 和 Δ 代入(4.102)式,就可得不稳定的增长率

$$\gamma = \left(\frac{\Gamma(1/4)\Delta' L_s}{\pi\Gamma(3/4)}\right)^{4/5}\tau_R^{-3/5}\tau_A^{-2/5}. \tag{4.103}$$

其中 Δ' 现在是有因次的量,它和 L_s 一起才是无量纲的,而

$$L_s = \frac{1}{B}\frac{\partial B_y(x)}{\partial x}.$$

因此,当 $\Delta'>0$ 时,$\gamma>0$,撕裂模不稳定. 而当 $\Delta'<0$ 时,$\gamma<0$,撕裂模是阻尼的.

这两种情况下的扰动角向磁通 $\psi_1(x)$ 的形状见图 4.30,其中的内区解是由连续性和对称性内推而画出的. 可以看出,内区解如果是向上凸起的,它就是稳定的;而它如果是向下凹陷的,它将不稳定. 但目前我们还只能得到 ψ_1 为常数的近似下的内区解(图中直线),它能保证 Δ' 有正确的符号(但数值上不准确),因而使我们能正确地判断撕裂模的稳定与否.

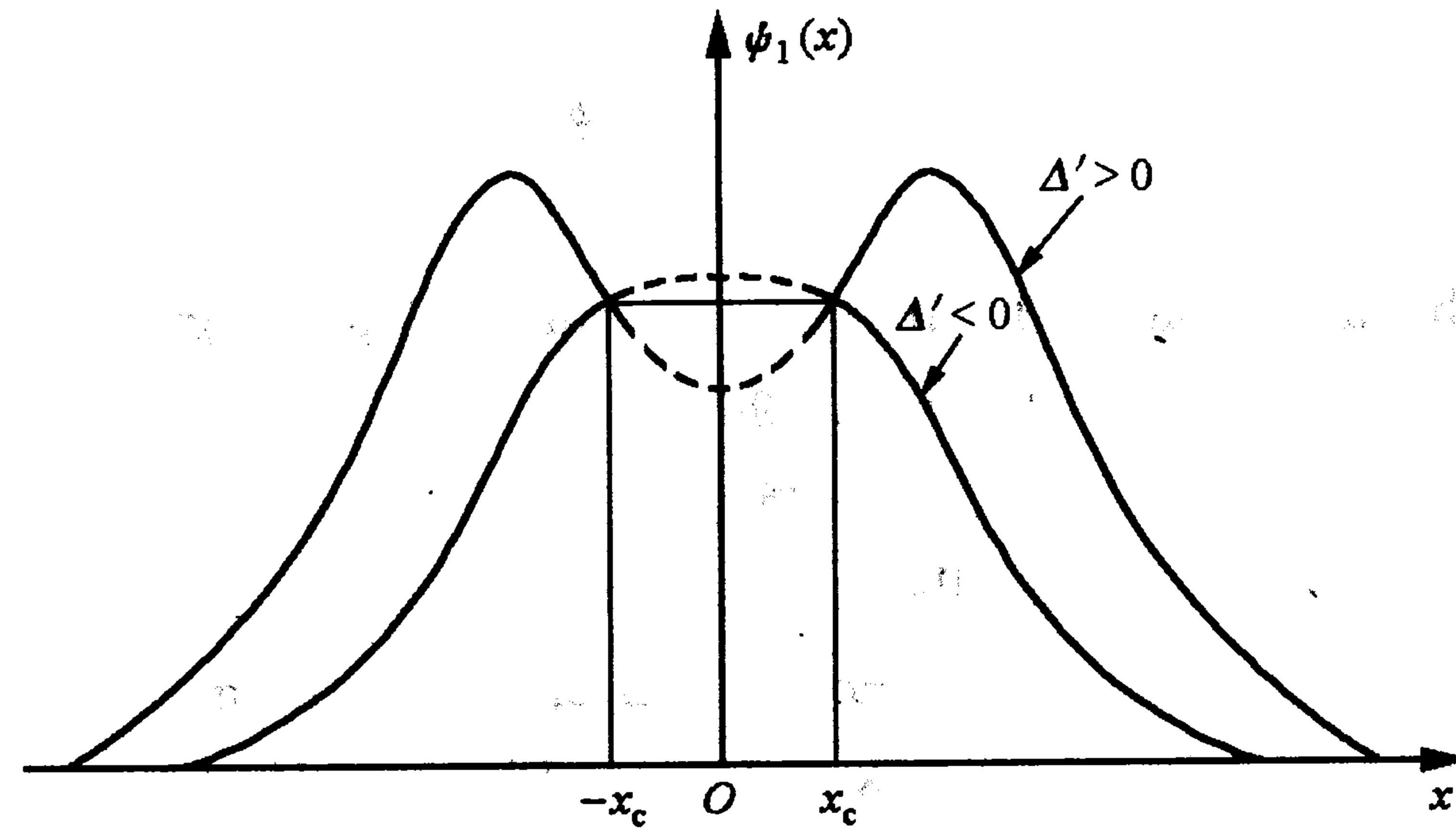


图 4.30 扰动角向磁通 $\psi_1(x)$ 的图形

从不稳定增长率的表达式可以发现,稳定与否只取决于外区 Δ' 的符号,而和其他量的精确值无关. 因此对撕裂模增长率的更精确计算往往只关注外区解的改进,而依然采取 ψ_1 为常数的内区解. 进一步观察 Δ' 的表达式,还可以发现不稳定的模其波数较大($k>1$),当 $\Delta'=0$ 时,临界的扰动归一化波数 $k=1$,它对应一个临

界的 y 向(横向)波长 $\lambda_y \sim a$. 所以撕裂模是沿磁面波长很大($\lambda > a$),而在垂直磁面方向上很局域(在有理面附近)的一种不稳定扰动(图 4.31).

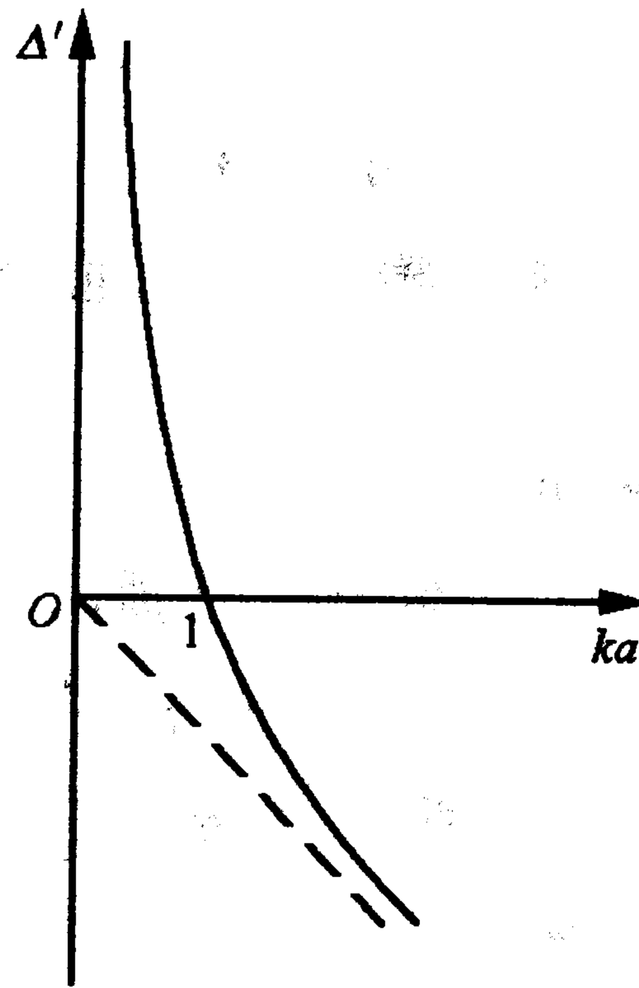


图 4.31 $\Delta'(k)$的图形

参考文献

[1] Chandrasekhar. Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability. Clarendon Press, Oxford, 1961
[2] 〔美〕贝特曼. 磁流体力学不稳定性. 北京:原子能出版社,1982
[3] Oraevsky V N. Handbook of Plasma Physics, Vol. 2, ed. Galeev A A, Sudan R N. North-Holland Physics Publishing, Amsterdam. 37
[4] Bernstein I B. Handbook of Plasma Physics, Vol. 1, ed. Galeev A A, Sudan R N. North-Holland Physics Publishing, Amsterdam. 445
[5] 同上书,442—444 页
[6] Freidberg J P. Rev. Mod. Phys. ,**54**(1982)860
[7] Bernstein B, Frieman E A, Kruskaland M D, Kulsrud R M. Proc. Roy. Soc. , **A244**(1958)17
[8] 同[4]的参考书,435 页
[9] Berge G, Freidberg J P. Phys. Fluids,**18**(1975)1362

[10] Newcomb W A. Annals of Physics NY,**10**(1960)232
[11] Haas, Papalaizou. Nucl. Fusion, **17**(1977)721
[12] Biskamp D. Magnetic Reconnection, *in* Physics Report, **237**(4)(Feb 1994)
[13] 王水,李罗权. 磁场重联. 合肥:安徽教育出版社,1999
[14] C. M. 本德, S. A. 奥斯扎戈. 高等应用数学方法. 北京:科学出版社,1972. 483

第二部分

电磁流体应用专题

第五章　等离子体的电磁(双)流体力学描述

在多粒子体系的流体描述中，通常采取用的体系状态量是：流体元的密度(体密度 $\rho(\boldsymbol{r}(t),t)$ 或数密度 $n(\boldsymbol{r}(t),t)$，$\rho=mn$，m 为粒子质量)，速度($\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}(t),t)$)及能量(内能 $\varepsilon(\boldsymbol{r}(t),t)$ 或温度 $T(\boldsymbol{r}(t),t)$)，它们都是时间 t 及 t 时刻流体元位置 $\boldsymbol{r}(t)$ 的函数. 因此，流体描述的基本方程组就是由这几个状态量构成的时间演化方程，即质量守恒、动量守恒及能量守恒方程联立而成. 在用内能作为状态量时，体系可以是理想气体，处在热力学平衡态；也可以是非理想气体，处在偏离热力学平衡的状态中. 这时为了将内能与体系的可观测量(一般是压强 P，体积 V，温度 T 等)相联系，还需要知道体系的热力学性质 $\varepsilon=\varepsilon(T,V)$ 和物态方程 $P=P(V,T)$.

原则上，多粒子体系的流体方程组可以从体系动理学方程的矩方程得出. 如上述 $n,\boldsymbol{u},T$ 分别是单粒子速度分布函数在速度空间的头三个(零阶，一阶和对角的二阶)矩. 在这些矩方程组中所含的比 $n,\boldsymbol{u},T$ 高的矩则往往通过硬性截断而略去(当它们的影响很小时)，或通过所谓的输运规律(如扩散定律、热传导定律和黏性定律)而由头三个矩来求出. 在研究工作中，也有取更多状态量的描述方法，如七矩、十三矩或二十一矩的联立方程组. 但最常用的就是这里介绍的流体(五矩)方程组.

流体方程组也可以基于物理直观，用唯象的方法来得到. 上述的三个流体方程在历史上就分别以连续性方程、欧拉方程和绝热方程的形式而被提出. 这种方法的优点是推导过程比较简单、直

观,物理图像清楚;但不够严谨,特别是其中涉及高阶矩(如黏性张量,碰撞热流)的输运过程难以通过直观的方法作定量描述.这些不足正是矩方程描述可以弥补的.

等离子体是由多种可以自由运动的带电粒子组成的多粒子体系.在对它们作流体描述时,每种带电粒子系都有自己特有的流体状态量.这时由于带电粒子间的电荷在空间分布的不均匀,会产生空间的自生电场;带电流体元的流动会产生空间的自生电流和磁场.这些电场、磁场和电磁场(波)反过来又通过库仑力和洛伦兹力影响带电流体元的运动(时间、空间变化).而最终带电流体的状态和其中出现的自生电磁场,是通过将带电流体元满足的流体方程组和自生电磁场满足的麦克斯韦电磁方程组联立后,自洽地求出的.所以,和磁流体力学相对应,这种同时含有电、磁场的流体描述,应该称为等离子体的电磁流体力学.朗道和 Lifshitz 就把他们描述磁流体和电磁流体的专著起名为“连续介质的电动力学”.这种称呼强调的是这种描述的电磁性质,而等离子体物理学中则更看重介质(即等离子体)本身的流体力学状态.但在等离子体物理学发展的历史上已经把它称为“双流体力学描述(方程组)”.这是因为,如果把磁流体当成只含有一种成分的流体而称为单流体的话,则通常等离子体中含有电子和一种电离态的离子,就可以被称为双流体.但实际上,等离子体中可以有多种(质量和电荷数都不同的)离子存在,这时流体方程组就由多种带电离子的流体方程联立而成.而且当等离子体中只有一种带电粒子(电子或离子)时,等离子体整体也会是带电的——这就是非中性等离子体.它虽然只有一种成分的流体元,但并不能用磁(单)流体力学来描述.在它的流体方程中,还必须耦合进描述自洽电场的泊松方程——也就是说它应该通过电磁流体力学来描述.尽管“双流体力学”的名称并不严谨,但在本书中,为了和习惯的称呼相一致,有时我们还是把这种电磁流体力学的描述方法称为“双流体力学描述”.

5.1 质量守恒(连续性)方程

令 $\rho_\alpha=m_\alpha n_\alpha$,其中 $\alpha=\mathrm{e},i_1,i_2,\cdots,i_N$ 分别代表电子,第 1 种离子,第 2 种离子,…,第 N 种离子.而质量密度 ρ_α 随时间、空间的变化,则由连续性方程描述

$$\frac{\partial\rho_\alpha(\boldsymbol{r}(t),t)}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho_\alpha(\boldsymbol{r}(t),t)\boldsymbol{u}_\alpha(\boldsymbol{r}(t),t))=\frac{\delta\rho_\alpha(\boldsymbol{r}(t),t)}{\delta t},\tag{5.1}$$

其中方程右边项表示因非弹性碰撞(电离、激发、复合等)而引起的质量密度变化率.上式还可以写成

$$\frac{\mathrm{d}\rho_\alpha(\boldsymbol{r}(t),t)}{\mathrm{d}t}+\rho_\alpha(\boldsymbol{r}(t),t)\,\nabla\cdot\boldsymbol{u}_\alpha(\boldsymbol{r}(t),t)=\frac{\delta\rho_\alpha(\boldsymbol{r}(t),t)}{\delta t},\tag{5.2}$$

其中

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial}{\partial t}+\boldsymbol{u}_\alpha(\boldsymbol{r}(t),t)\cdot\nabla,\tag{5.3}$$

它们的物理意义在第一章开始已经给出.上述方程也可以改写成对粒子数密度的粒子数守恒方程

$$\frac{\partial n_\alpha(\boldsymbol{r}(t),t)}{\partial t}+\nabla\cdot(n_\alpha(\boldsymbol{r}(t),t)\boldsymbol{u}_\alpha(\boldsymbol{r}(t),t))=\frac{\delta n_\alpha(\boldsymbol{r}(t),t)}{\delta t},\tag{5.4}$$

$$\frac{\mathrm{d}n_\alpha(\boldsymbol{r}(t),t)}{\mathrm{d}t}+n_\alpha(\boldsymbol{r}(t),t)\,\nabla\cdot\boldsymbol{u}_\alpha(\boldsymbol{r}(t),t)=\frac{\delta n_\alpha(\boldsymbol{r}(t),t)}{\delta t}.\tag{5.5}$$

为了简便,下面常略去流体状态量的函数依赖$(\boldsymbol{r}(t),t)$;而且除非需要,也略去由于非弹性碰撞引起的密度变化率 $\delta n/\delta t$.

5.2 动量守恒(欧拉或纳维-斯托克斯(Navier-Stokes))方程

$$\frac{\partial \rho_\alpha \boldsymbol{u}_\alpha}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_\alpha \boldsymbol{u}_\alpha \boldsymbol{u}_\alpha) = -\nabla P_\alpha - \nabla \cdot \overleftrightarrow{\Pi}_\alpha + q_\alpha n_\alpha \Big(\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) + \frac{1}{c}\boldsymbol{u}_\alpha \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t) \Big) + \boldsymbol{R}_\alpha, \tag{5.6}$$

$$\rho_\alpha \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}_\alpha}{\mathrm{d}t} = -\nabla P_\alpha - \nabla \cdot \overleftrightarrow{\Pi}_\alpha + q_\alpha n_\alpha \Big(\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}\boldsymbol{u}_\alpha \times \boldsymbol{B} \Big) + \boldsymbol{R}_\alpha, \tag{5.7}$$

方程右面的电场 $\boldsymbol{E}$ 和磁场 $\boldsymbol{B}$ 包括了外加的电、磁场 $\boldsymbol{E}_{\mathrm{appl}}$, $\boldsymbol{B}_{\mathrm{appl}}$ 和等离子体本身产生的自洽电、磁场 $\boldsymbol{E}_{\mathrm{self}}$, $\boldsymbol{B}_{\mathrm{self}}$. 因此完整的等离子体双流体描述,需要将描写流体元质量守恒、动量守恒及能量守恒的方程与描述电、磁场的麦克斯韦方程组相耦合. 在双流体描述下的麦克斯韦方程组将在本章最后的 5.4 节中给出并讨论.

在上述方程中的 $\boldsymbol{R}_\alpha$ 表示由不同种类粒子间的弹性碰撞而引起的摩擦力(拖曳力)

$$\boldsymbol{R}_\alpha = \sum_\beta \boldsymbol{R}_{\alpha\beta}, \quad \boldsymbol{R}_{\alpha\beta} = -m_\alpha n_\alpha \nu_{\alpha\beta}(\boldsymbol{u}_\alpha - \boldsymbol{u}_\beta),$$

其中 $\nu_{\alpha\beta}$ 是两种(不同种类)粒子间的弹性碰撞频率. 从这个表达式可以看到: 同种类粒子间的弹性碰撞不会产生摩擦力,这是因为按照牛顿第三定律,同种粒子间弹性碰撞保持整个粒子系的总动量守恒,因而动量的变化速率为零,也即摩擦力为零. 另外,在动量方程中的 P_α, $\overleftrightarrow{\Pi}_\alpha$ 分别代表第 α 种流体的热压强和黏性张量,它们也是 $(\boldsymbol{r}(t),t)$ 的函数,它们合起来构成了二阶压强张量

$$\overleftrightarrow{P}_\alpha = P\overleftrightarrow{I}_\alpha + \overleftrightarrow{\Pi}_\alpha.$$

这些量都是粒子热运动速度 $\boldsymbol{w} \equiv \boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}(t),t)$ 的二阶矩(参见 16.1.2 节,下面的表示式中略去了代表粒子种类的下标 α)

$$\overleftrightarrow{P} = mn\langle \boldsymbol{w}\boldsymbol{w} \rangle,$$

$$P = mn\langle w^2 \rangle / 3 = nT, \quad \overleftrightarrow{\Pi} = mn\langle \boldsymbol{w}\boldsymbol{w} - \frac{1}{3}w^2 \overleftrightarrow{I} \rangle.$$

其中 $\overleftrightarrow{I}$ 是二阶的单位张量,而 $\langle \cdots \rangle$ 表示对局部热力学平衡的速度分布函数 $f_{\mathrm{M}}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{r}(t),t)$ 作平均

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}(t),t) = \int \boldsymbol{v} f_{\mathrm{M}}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{r}(t),t)\mathrm{d}\boldsymbol{v}, \quad \langle \cdots \rangle \equiv \int \cdots f_{\mathrm{M}}(\boldsymbol{v})\mathrm{d}\boldsymbol{v}.$$

$$f_{\mathrm{M}}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{r}(t),t) = n(\boldsymbol{r}(t),t)\left(\frac{m}{2\pi T(\boldsymbol{r}(t),t)} \right)^{3/2} \times \exp\left[-\frac{m(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}(t),t))^2}{2T(\boldsymbol{r}(t),t)} \right]. \tag{5.8}$$

黏性张量是非对角的二阶速度矩,在这里不属于流体元的状态量,因此需要用流体元的状态量来表达——这就是输运定律之一的牛顿黏性定律

$$\begin{aligned} \overleftrightarrow{\Pi} &= -\zeta\Big(\overleftrightarrow{\Lambda} - \frac{3}{2}\overleftrightarrow{I}\,\nabla \cdot \boldsymbol{u} \Big) - \gamma \overleftrightarrow{I}\,\nabla \cdot \boldsymbol{u} \\ &= -\zeta \overleftrightarrow{\Lambda} - \Big(\gamma - \frac{2}{3}\zeta \Big) \overleftrightarrow{I}\,\nabla \cdot \boldsymbol{u} \\ &= -\zeta \overleftrightarrow{\Lambda} - \lambda \overleftrightarrow{I}\,\nabla \cdot \boldsymbol{u}, \end{aligned} \tag{5.9}$$

其中

$$(\overleftrightarrow{\Lambda})_{ij} = (\overleftrightarrow{\Lambda})_{ji} = \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \quad \lambda = \gamma - \frac{2}{3}\zeta. \tag{5.10}$$

而 λ,γ,ζ 被分别称为膨胀(dilation)、体(bulk)和剪切(shear)黏性系数. 下面给出一些散见于文献中的关系和符号,以便于大家在工作中引用和参阅. 在有的文献中,分别用符号 $\eta_{\mathrm{d}},\eta_{\mathrm{b}},\eta_{\mathrm{s}}$ 代替 λ,γ,ζ,于是有

$$\eta_{\mathrm{b}} = \frac{2}{3}\eta_{\mathrm{s}} + \eta_{\mathrm{d}}.$$

利用

$$\nabla \cdot \overleftrightarrow{\Lambda} = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{u}) + \nabla^2 \boldsymbol{u}$$

有

$$\nabla \cdot \vec{\vec{\Pi}} = -\zeta \nabla^2 \boldsymbol{u} - \left(\gamma + \frac{1}{3}\zeta\right) \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{u}), \tag{5.11}$$

或利用

$$\nabla^2 \boldsymbol{u} = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{u}) - \nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{u}),$$

又有

$$\nabla \cdot \vec{\vec{\Pi}} = \zeta \nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{u}) - \left(\gamma + \frac{4}{3}\zeta\right) \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{u}) \tag{5.12}$$

$$= \eta_s \nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{u}) - (2\eta_s + \eta_d) \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{u}). \tag{5.13}$$

在一维几何下,黏性张量退化成标量

$$\Pi_{11} = -\left(\gamma + \frac{4}{3}\zeta\right)\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}x_1} \equiv \mu'' \frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}x_1}, \tag{5.14}$$

其中 $\mu'' = 2\zeta + \lambda$ 被称为纵向(longitudinal)黏性系数,这个系数比较容易被确定,因此在一些文献中常常可以查到不同种类流体元的 μ''_α 值.

5.3 能量守恒(温度,熵,绝热,焓)方程

在导出等离子体的(电磁)双流体能量方程时主要有两种方法,即通过对动理学方程求其速度二阶矩方程的方法和从热力学第一定律导出的方法.后者只适用于处在热力学平衡态的流体体系,而前者可用于略微偏离热力学平衡的体系.此外,能量方程可以有不同的表示方式:如以总能量(动能+热能)密度、热能密度、温度、熵、焓所表示的(广义)能量方程.在下面,我们将略去表示流体状态量的时空依赖的$(\boldsymbol{r}(t), t)$,并在推导过程中略去表示流体元种类的下标 α.

5.3.1 从动理学方程的速度二阶矩导出能量方程

从这种方法首先导出的是单位体积中流体元总能量(即总能量密度)的时间演化方程.

1. 总能量演化方程

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}m_\alpha n_\alpha u_\alpha^2 + \frac{P_\alpha}{\gamma - 1}\right) + \nabla \cdot \left[\left(\frac{1}{2}m_\alpha n_\alpha u_\alpha^2 + \frac{P_\alpha}{\gamma - 1}\right)\boldsymbol{u}_\alpha + (P_\alpha \vec{\vec{I}} + \vec{\vec{\Pi}}_\alpha) \cdot \boldsymbol{u}_\alpha + \boldsymbol{q}_\alpha\right]$$

$$= q_\alpha n_\alpha \boldsymbol{u}_\alpha \cdot \boldsymbol{E} + \boldsymbol{u}_\alpha \cdot \boldsymbol{R}_\alpha + Q_\alpha^{\mathrm{el}} + Q_\alpha^{\mathrm{nonel}}, \tag{5.15}$$

其中 γ 是绝热指数,当然原则上它也可以随粒子种类而变(即对不同种类的气体用不同的绝热指数),但在本书中只把它表示成与粒子种类无关的常数.而 $Q_\alpha^{\mathrm{el}}, Q_\alpha^{\mathrm{nonel}}$ 则分别是由于弹性碰撞和非弹性碰撞引起的能量转移.非弹性碰撞引起的能量转移包括由于粒子数变化(电离,复合,激发,……)而引起的动能变化以及因非弹性碰撞而造成的热能变化

$$Q_\alpha^{\mathrm{nonel}} = \frac{1}{2}m_\alpha u_\alpha^2 \frac{\delta n_\alpha}{\delta t} + \delta Q_\alpha.$$

对于由电子和离子的弹性碰撞而引起的能量转移可以进一步写成

$$Q_{\mathrm{i}}^{\mathrm{el}} = n_{\mathrm{e}} \nu_{\mathrm{ei}}^{\mathrm{T}} (T_{\mathrm{e}} - T_{\mathrm{i}}) \equiv Q_\Delta, \quad \nu_{\mathrm{ei}}^{\mathrm{T}} = \frac{8}{3\sqrt{\pi}} \frac{m_{\mathrm{e}}}{m_{\mathrm{i}}} \nu_{\mathrm{e}}. \tag{5.16}$$

$$Q_{\mathrm{e}}^{\mathrm{el}} = -\boldsymbol{R}_{\mathrm{e}} \cdot (\boldsymbol{u}_{\mathrm{e}} - \boldsymbol{u}_{\mathrm{i}}) - Q_\Delta$$

$$= m_{\mathrm{e}} n_{\mathrm{e}} \nu_{\mathrm{ei}} (\boldsymbol{u}_{\mathrm{e}} - \boldsymbol{u}_{\mathrm{i}}) \cdot (\boldsymbol{u}_{\mathrm{e}} - \boldsymbol{u}_{\mathrm{i}}) - Q_\Delta$$

$$(\text{由 } \boldsymbol{j} = -e n_{\mathrm{e}} (\boldsymbol{u}_{\mathrm{e}} - \boldsymbol{u}_{\mathrm{i}})) = \frac{m_{\mathrm{e}} \nu_{\mathrm{ei}}}{n_{\mathrm{e}} e^2} j^2 - Q_\Delta$$

$$= \eta_\perp^0 j^2 - Q_\Delta. \tag{5.17}$$

其中 $\eta_\perp^0 = 1/\sigma_\perp^0$ 是经典的垂直(于磁场的)电阻.上式右面的第一项是经典电阻产生的欧姆热,而第二项则是电子-离子间由于弹性碰撞而交换的热能.上面方程和其中各项表达式的推导将在第十六章 16.1.2 小节给出,同时也可以参考文献[1],[2].

对于比热容不变(量热完全)的理想气体,单位体积的内压强可以表示成

$$P = \rho R T = n k T, \quad R = k N_{\mathrm{A}} = k n / \rho.$$

上式中的 T 的单位是绝对温度,而 k, N_{A} 分别是玻尔兹曼常数和

阿伏伽德罗常数. 在本书以及等离子体文献中一般将能量(如电子伏)取做温度的单位,即用 T 取代上式中的 kT,然后将物态方程写成

$$P = nT. \tag{5.18}$$

如果再取单原子分子的绝热指数 $\gamma=5/3$,能量方程就可以写成

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}m_\alpha n_\alpha u_\alpha^2+\frac{3}{2}n_\alpha T_\alpha\right)\\&\quad+\nabla\cdot\left[\left(\frac{1}{2}m_\alpha n_\alpha u_\alpha^2+\frac{5}{2}n_\alpha T_\alpha\right)\boldsymbol{u}_\alpha+\overleftrightarrow{\Pi}_\alpha\cdot\boldsymbol{u}_\alpha+\boldsymbol{q}_\alpha\right]\\&\quad=q_\alpha n_\alpha\boldsymbol{u}_\alpha\cdot\boldsymbol{E}+\boldsymbol{u}_\alpha\cdot\boldsymbol{R}_\alpha+Q_\alpha^{\mathrm{el}}+Q_\alpha^{\mathrm{nonel}}.\end{aligned}\tag{5.19}$$

2. 将总能量方程改写成温度方程

利用连续性方程和运动方程可以将上式改写成热能($3/2n_\alpha T_\alpha$)的演化方程

$$\begin{aligned}&\frac{3}{2}\frac{\partial}{\partial t}(n_\alpha T_\alpha)+\frac{3}{2}\nabla\cdot(n_\alpha T_\alpha\boldsymbol{u}_\alpha)+P_\alpha\nabla\cdot\boldsymbol{u}_\alpha\\&\quad+(\overleftrightarrow{\Pi}_\alpha\cdot\nabla)\cdot\boldsymbol{u}_\alpha+\nabla\cdot\boldsymbol{q}_\alpha\\&\quad=Q_\alpha^{\mathrm{el}}+Q_\alpha^{\mathrm{nonel}}.\end{aligned}\tag{5.20}$$

下面是推导过程(为简便,已略去了表示粒子种类的下标).

(i) 将方程(5.19)中和动能有关的两项取出

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{m}{2}nu^2\right)+\nabla\cdot\left(\frac{m}{2}nu^2\boldsymbol{u}\right)\\&\quad=\frac{m}{2}\frac{\partial}{\partial t}(nu^2)+\frac{m}{2}\boldsymbol{u}\cdot\nabla(nu^2)+\frac{m}{2}nu^2\nabla\cdot\boldsymbol{u}\\&\quad=\frac{m}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(nu^2)+\frac{m}{2}nu^2\nabla\cdot\boldsymbol{u}.\end{aligned}\tag{5.21}$$

上式右面第一项可以利用连续性方程和运动方程来展开,对(5.5)式两边同乘$(m/2)u^2$(但略去方程右边非弹性碰撞引起的粒子数变化项),对(5.7)式两边同时用 $\boldsymbol{u}$ 点乘,相加后得

$$\frac{m}{2}u^2\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}t}+\frac{m}{2}n\frac{\mathrm{d}u^2}{\mathrm{d}t}=\frac{m}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(nu^2)$$

$$\begin{aligned}&=-\boldsymbol{u}\cdot\nabla P-\boldsymbol{u}\cdot(\nabla\cdot\overleftrightarrow{\Pi})+qn\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{E}\\&\quad+\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{R}-\frac{m}{2}u^2(n\nabla\cdot\boldsymbol{u}).\end{aligned}$$

(ii) 将上式代入(5.21)式,得

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{m}{2}nu^2\right)+\nabla\cdot\left(\frac{m}{2}nu^2\boldsymbol{u}\right)\\&\quad=-\boldsymbol{u}\cdot\nabla P-\boldsymbol{u}\cdot(\nabla\cdot\overleftrightarrow{\Pi})+qn\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{E}+\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{R}.\end{aligned}$$

然后,将上式代回总能量方程(5.19),得

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{3}{2}nT\right)+\nabla\cdot\left(\frac{3}{2}nT\boldsymbol{u}\right)-\boldsymbol{u}\cdot\nabla P-\boldsymbol{u}\cdot(\nabla\cdot\overleftrightarrow{\Pi})\\&\quad+\nabla\cdot(P\boldsymbol{u})+\nabla\cdot(\overleftrightarrow{\Pi}\cdot\boldsymbol{u})+\nabla\cdot\boldsymbol{q}\\&\quad=Q^{\mathrm{el}}+Q^{\mathrm{nonel}}.\end{aligned}\tag{5.22}$$

(iii) 利用

$$\nabla\cdot(P\boldsymbol{u})=P\nabla\cdot\boldsymbol{u}+\boldsymbol{u}\cdot\nabla P,\quad\nabla\cdot(\overleftrightarrow{\Pi}\cdot\boldsymbol{u})=(\overleftrightarrow{\Pi}\cdot\nabla)\cdot\boldsymbol{u}+\boldsymbol{u}\cdot(\nabla\cdot\overleftrightarrow{\Pi}),$$

方程(5.22)就变成了关于热能的演化方程(5.20).

(iv) 可证,对任意标量 A,存在下面的一般等式:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}(nA)+\nabla\cdot(nA\boldsymbol{u})&=\frac{\partial}{\partial t}(nA)+\boldsymbol{u}\cdot\nabla(nA)+nA\nabla\cdot\boldsymbol{u}\\&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(nA)+nA\nabla\cdot\boldsymbol{u}\\&=n\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}+A\left(\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}t}+n\nabla\cdot\boldsymbol{u}\right)\\&=n\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}.\end{aligned}\tag{5.23}$$

在导出最后一步时用到了(不含 $\delta n/\delta t$ 项的)连续性方程. 当令 $A=T$;$P=nT$ 时,将上式用于热能方程(5.20),就可以最后得出温度的演化方程

$$\frac{3}{2}n_\alpha\frac{\mathrm{d}T_\alpha}{\mathrm{d}t}+n_\alpha T_\alpha\nabla\cdot\boldsymbol{u}_\alpha+(\overleftrightarrow{\Pi}_\alpha\cdot\nabla)\cdot\boldsymbol{u}_\alpha+\nabla\cdot\boldsymbol{q}_\alpha=Q_\alpha^{\mathrm{el}}+Q_\alpha^{\mathrm{nonel}}.\tag{5.24}$$

3. 将温度方程改写成熵方程

(1) 一些热力学量及其关系可以参考热力学方面的教科书，例如文献[3].

对于比热容不变(量热学完全)的理想气体，单位质量的内能 ε 和单位质量的焓 h 与温度有如下关系：

$$\varepsilon = c_V T, \quad h = c_p T, \quad c_V = \frac{R}{\gamma - 1}, \quad c_p = \frac{\gamma}{\gamma - 1}R.$$

其中 c_V, c_p 分别是比定容热容和比定压热容，而 $R = kN_A$，γ 则分别是气体常数和绝热指数.

单位体积的内能于是可表示成

$$\rho\varepsilon = \frac{\rho RT}{\gamma - 1} = \frac{nT}{\gamma - 1}.$$

其中最后一个表达式中的 T 已经以能量为单位了(在本书中 T 的单位都是能量). 同样，单位体积的焓表示成

$$\rho h = \frac{\gamma}{\gamma - 1} nT.$$

单位质量的熵表示成(其中 $V = 1/\rho$ 是单位质量所占有的体积)

$$S - S_0 = c_V \ln(PV^\gamma) = c_V \ln\left(\frac{P}{\rho^\gamma}\right) = c_V \ln\left(\frac{T}{\rho^{\gamma-1}}\right).$$

同样，单位体积的熵为

$$\rho(S - S_0) = \rho c_V \ln(PV^\gamma) = \frac{3}{2} n \ln\left(\frac{P}{n^\gamma}\right) = \frac{3}{2} n \ln\left(\frac{T}{n^{\gamma-1}}\right).$$

最后，平均到每个粒子上的熵定义成

$$s - s_0 = \frac{1}{n}\rho(S - S_0) = \frac{3}{2}\ln(PV^\gamma) = \frac{3}{2}\ln\left(\frac{P}{\rho^\gamma}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{P^{3/2}}{n^{5/2}}\right) = \ln\left(\frac{T^{3/2}}{n}\right).$$

(2) 熵变方程

由每个粒子的熵表达式，可得

$$\frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}\ln\left(\frac{T^{3/2}}{n}\right) = \frac{3}{2}\frac{1}{T}\frac{dT}{dt} - \frac{1}{n}\frac{dn}{dt}$$

$$= \frac{3}{2}\frac{1}{T}\frac{dT}{dt} + \frac{1}{n}(n\nabla\cdot\boldsymbol{u}),$$

所以单位体积内熵变速率所对应的内能变化速率为

$$nT\frac{ds}{dt} = \frac{3}{2}\frac{dT}{dt} + nT\nabla\cdot\boldsymbol{u}.$$

这个式子就是温度方程(5.24)左边的头两项，这样就可以把(5.24)式改写成每个粒子熵的演化方程

$$n_\alpha T_\alpha \frac{ds_\alpha}{dt} = -(\overleftrightarrow{\Pi}_\alpha\cdot\nabla)\cdot\boldsymbol{u}_\alpha - \nabla\cdot\boldsymbol{q}_\alpha + Q_\alpha^{el} + Q_\alpha^{nonel}. \quad (5.25)$$

利用一般性的等式(5.23)，令 $A = s$ 就有

$$\frac{\partial}{\partial t}(ns) + \nabla\cdot(ns\boldsymbol{u}) = n\frac{ds}{dt},$$

这样就可以把(5.25)式改写成

$$T_\alpha\frac{\partial n_\alpha s_\alpha}{\partial t} + T_\alpha\nabla\cdot(n_\alpha s_\alpha\boldsymbol{u}_\alpha)$$

$$= -(\overleftrightarrow{\Pi}_\alpha\cdot\nabla)\cdot\boldsymbol{u}_\alpha - \nabla\cdot\boldsymbol{q}_\alpha + Q_\alpha^{el} + Q_\alpha^{nonel}. \quad (5.26)$$

从(5.25)和(5.26)式可以看出，不但黏性、热导引起的热量变化可以使体系的熵发生改变，而且欧姆加热、弹性碰撞和非弹性碰撞所引起的能量损失也能使带电粒子系的熵变化. 这样，在这两个熵变方程右边的诸项可以统一写成一个总热量(单位体积中系统总热量)的变化项

$$\rho\frac{dQ_\alpha}{dt} = -(\overleftrightarrow{\Pi}_\alpha\cdot\nabla)\cdot\boldsymbol{u}_\alpha - \nabla\cdot\boldsymbol{q}_\alpha + Q_\alpha^{el} + Q_\alpha^{nonel}. \quad (5.27)$$

在下面 5.3.2 小节可以证明，这样表示出的方程式(5.25)

$$nT\frac{ds}{dt} = \rho\frac{dQ}{dt}$$

正是由热力学第一定律和第二定律所导出的熵变方程.

4. 从熵方程导出绝热方程

从一个粒子的熵表达式

$$s - s_0 = \frac{1}{\gamma - 1}\ln(PV^\gamma)$$

可得

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{\gamma-1}\frac{1}{PV^{\gamma}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(PV^{\gamma})=\frac{1}{\gamma-1}\frac{1}{\rho RV^{\gamma}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(PV^{\gamma})$$

$$=\frac{1}{\gamma-1}\frac{\rho^{\gamma}}{nT}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(PV^{\gamma}),$$

这样熵方程就变成了

$$nT\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\equiv\frac{\rho^{\gamma}}{\gamma-1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(PV^{\gamma})=\rho\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t},$$

由此,可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(P_{\alpha}V_{\alpha}^{\gamma})=(\gamma-1)\rho_{\alpha}^{-\gamma}\left(\rho_{\alpha}\frac{\mathrm{d}Q_{\alpha}}{\mathrm{d}t}\right).\tag{5.28}$$

(i) 当$(\mathrm{d}Q_{\alpha}/\mathrm{d}t)=0$时,也即对于绝热体系,能量方程变成

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(P_{\alpha}V_{\alpha}^{\gamma})=0,\quad P_{\alpha}V_{\alpha}^{\gamma}=\text{时、空常数}.\tag{5.29}$$

这就是有名的绝热方程.这和磁流体力学中常用的绝热方程在形式上完全相同,但在双流体方程中,绝热方程是对每一种带电粒子流写出的.

(ii) 对于非绝热(耗散)的电子流体,在$\rho_{e}(\mathrm{d}Q_{e}/\mathrm{d}t)$中的$Q_{e}^{el}$是由于电子-离子弹性碰撞而引起的能量变化,它可以表示成(见(5.17)式)

$$Q_{e}^{el}=\frac{j^{2}}{\sigma_{\perp}^{0}}-Q_{\Delta}.$$

因此,非绝热的电子流体的能量方程可进一步写成

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(P_{e}V_{e}^{\gamma})=(\gamma-1)\rho_{e}^{-\gamma}\left(\frac{j^{2}}{\sigma_{\perp}^{0}}-Q_{\Delta}-(\vec{\vec{\Pi}}_{e}\cdot\nabla)\cdot\boldsymbol{u}_{e}-\nabla\cdot\boldsymbol{q}_{e}+Q_{e}^{nonel}\right).\tag{5.30}$$

在一般文献中往往略去了黏性、热导、弹性碰撞传给离子流体以及非弹性碰撞引起的热量改变,因而得出

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(P_{e}V_{e}^{\gamma})\approx(\gamma-1)\rho_{e}^{-\gamma}\left(\frac{j^{2}}{\sigma_{\perp}^{0}}\right).\tag{5.31}$$

5.3.2 从热力学定律导出能量方程

1. 热力学第一定律

单位质量的多粒子体系,其内能的变化等于输入的热量加上外力对体系所做的功

$$\mathrm{d}\varepsilon=\mathrm{d}Q+\mathrm{d}W.$$

对于气体,有

$$\mathrm{d}W=-P\mathrm{d}V,$$

其中$V=1/\rho$是单位质量气体所占有的体积.这样,对气体就有

$$\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}t}+P\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}.\tag{5.32}$$

类似地,由单位质量流体的焓定义$h=\varepsilon+PV$,可得

$$\mathrm{d}h=\mathrm{d}\varepsilon+P\mathrm{d}V+V\mathrm{d}P=\mathrm{d}Q+V\mathrm{d}P.$$

结果可得单位质量焓的方程

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}-V\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}\tag{5.33}$$

和单位体积流体的焓变方程

$$\rho\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}-\rho V\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}=\rho\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}.\tag{5.34}$$

2. 能量方程的推导

利用连续性方程,有

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{1}{\rho}=-\frac{1}{\rho^{2}}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{\rho}\nabla\cdot\boldsymbol{u}.$$

这样利用(5.32)式就可写出单位体积内能变化方程

$$\rho\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}t}+P\nabla\cdot\boldsymbol{u}=\rho\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}.\tag{5.35}$$

再利用

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\rho\varepsilon)=\rho\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}t}+\varepsilon\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}=-P\nabla\cdot\boldsymbol{u}+\rho\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}-\rho\varepsilon\nabla\cdot\boldsymbol{u}$$

$$=-(\rho\varepsilon+P)\nabla\cdot\boldsymbol{u}+\rho\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t},$$

于是式(5.35)就变成

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\varepsilon)+\boldsymbol{u}\cdot\nabla(\rho\varepsilon)+(\rho\varepsilon+P)\nabla\cdot\boldsymbol{u}=\rho\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}.$$

由于

$$\nabla\cdot[(\rho\varepsilon+P)\boldsymbol{u}]=(\rho\varepsilon+P)\nabla\cdot\boldsymbol{u}+\boldsymbol{u}\cdot\nabla(\rho\varepsilon)+\boldsymbol{u}\cdot\nabla P,$$

上式又可以进一步写成

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\varepsilon)+\nabla\cdot[(\rho\varepsilon+P)\boldsymbol{u}]-\boldsymbol{u}\cdot\nabla P=\rho\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}. \tag{5.36}$$

现在来把上式中的 $\boldsymbol{u}\cdot\nabla P$ 利用运动方程进一步展开. 用 $\boldsymbol{u}$ 同时点乘式(5.7)两边,得(略去表示粒子种类的下标)

$$\rho\boldsymbol{u}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}\equiv\rho\boldsymbol{u}\cdot\left(\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial t}+\boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{u}\right),$$

$$\Rightarrow\quad\rho\boldsymbol{u}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{2}\rho\frac{\partial u^2}{\partial t}+\rho\boldsymbol{u}\cdot(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}, \tag{5.37a}$$

$$\Rightarrow\quad\rho\boldsymbol{u}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}=-\boldsymbol{u}\cdot\nabla P-\boldsymbol{u}\cdot(\nabla\cdot\overleftrightarrow{\Pi})+qn\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{E}+\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{R}. \tag{5.37b}$$

(5.37a)式右边第一项可化为

$$\frac{1}{2}\rho\frac{\partial u^2}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho u^2\right)-\frac{1}{2}u^2\frac{\partial\rho}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho u^2\right)+\frac{1}{2}u^2\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{u}), \tag{5.38}$$

第二项可化为

$$\rho\boldsymbol{u}\cdot(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}=\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u})-\boldsymbol{u}\cdot[\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{u}\boldsymbol{u})],$$

上式右边最后一项又可进一步化成

$$-\boldsymbol{u}\cdot[\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{u}\boldsymbol{u})]=-\boldsymbol{u}\cdot[(\nabla\cdot\rho\boldsymbol{u})\boldsymbol{u}+\rho\boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{u}]=-u^2(\nabla\cdot\rho\boldsymbol{u})-\rho\boldsymbol{u}\cdot(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u},$$

把它代入前一式可得

$$\rho\boldsymbol{u}\cdot(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}=\nabla\cdot\left(\frac{1}{2}\rho u^2\boldsymbol{u}\right)-\frac{1}{2}u^2\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{u}). \tag{5.39}$$

将(5.38)和(5.39)式都代回(5.37a)式,并与(5.37b)式联立,得

$$\boldsymbol{u}\cdot\nabla P=-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho u^2\right)-\nabla\cdot\left(\frac{1}{2}\rho u^2\boldsymbol{u}\right)-\boldsymbol{u}\cdot(\nabla\cdot\overleftrightarrow{\Pi})+qn\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{E}+\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{R}.$$

最后将上式代回(5.36)式,得

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho_\alpha\varepsilon_\alpha+\frac{1}{2}\rho_\alpha u_\alpha^2\right)+\nabla\cdot\left[\left(\rho_\alpha\varepsilon_\alpha+P_\alpha+\frac{1}{2}\rho_\alpha u_\alpha^2\right)\boldsymbol{u}_\alpha+\overleftrightarrow{\Pi}_\alpha\cdot\boldsymbol{u}_\alpha\right]=(\overleftrightarrow{\Pi}_\alpha\cdot\nabla)\cdot\boldsymbol{u}_\alpha+q_\alpha n_\alpha\boldsymbol{u}_\alpha\cdot\boldsymbol{E}+\boldsymbol{u}_\alpha\cdot\boldsymbol{R}_\alpha+\rho_\alpha\frac{\mathrm{d}Q_\alpha}{\mathrm{d}t}. \tag{5.40}$$

上式是由热力学第一定律导出的最一般性的总能量密度演化方程.

对比热容不变(量热完全)的理想气体,可将上式中的下述量进一步写成

$$\rho\varepsilon=\rho c_V T=\frac{\rho R}{\gamma-1}T=\frac{nT}{\gamma-1}=\frac{3}{2}nT,\quad\gamma=\frac{5}{3}.$$

$$\rho=mn,\quad P=\rho RT=nT.$$

这时(5.40)式就变成

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}m_\alpha n_\alpha u_\alpha^2+\frac{3}{2}n_\alpha T_\alpha\right)+\nabla\cdot\left[\left(\frac{1}{2}m_\alpha n_\alpha u_\alpha^2+\frac{5}{2}n_\alpha T_\alpha+\overleftrightarrow{\Pi}_\alpha\cdot\right)\boldsymbol{u}_\alpha\right]=(\overleftrightarrow{\Pi}_\alpha\cdot\nabla)\cdot\boldsymbol{u}_\alpha+q_\alpha n_\alpha\boldsymbol{u}_\alpha\cdot\boldsymbol{E}+\boldsymbol{u}_\alpha\cdot\boldsymbol{R}_\alpha+\rho_\alpha\frac{\mathrm{d}Q_\alpha}{\mathrm{d}t}. \tag{5.41}$$

把上式和从动理学二阶矩方程推导出的能量方程(5.19)相比可知,只要下列等式成立,则从两种途径所得出的能量方程是完全等价的,

$$\rho\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}=-\nabla\cdot\boldsymbol{q}-(\overleftrightarrow{\Pi}\cdot\nabla)\cdot\boldsymbol{u}+Q^{\mathrm{el}}+Q^{\mathrm{nonel}}. \tag{5.42}$$

这个等式恰恰就是前面给出过的(5.42)式,它表示热力学第一定律表达式中传入(出)体系的热量,分别由耗散(黏性,热传导,电阻)过程和非弹性碰撞过程造成. 这些热量也是引起体系熵变化的根源,其中黏性和电阻总是使熵增加,而热传导则在低温区使熵增大,在高温区使熵减少.

具体对离子流体和电子流体而言,有

$$\left(\rho\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathrm{i}} = -\nabla\cdot\boldsymbol{q}_{\mathrm{i}} - (\vec{\vec{\Pi}}_{\mathrm{i}}\cdot\nabla)\cdot\boldsymbol{u}_{\mathrm{i}} + n_{\mathrm{i}}\nu_{\mathrm{ei}}^{\mathrm{T}}(T_{\mathrm{e}} - T_{\mathrm{i}}) + Q_{\mathrm{i}}^{\mathrm{nonel}}. \tag{5.43}$$

$$\left(\rho\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathrm{e}} = -\nabla\cdot\boldsymbol{q}_{\mathrm{e}} - (\vec{\vec{\Pi}}_{\mathrm{e}}\cdot\nabla)\cdot\boldsymbol{u}_{\mathrm{e}} - \eta_{\perp}^{0}\,j^2 - n_{\mathrm{i}}\nu_{\mathrm{ei}}^{\mathrm{T}}(T_{\mathrm{e}} - T_{\mathrm{i}}) + Q_{\mathrm{e}}^{\mathrm{nonel}}. \tag{5.44}$$

3. 焓变方程的推导

由单位体积的焓变方程(5.34),代入 $V=1/\rho, P=nT$,可得

$$\rho\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}nT}{\mathrm{d}t} = \rho\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}. \tag{5.45}$$

利用关于 $\mathrm{d}(nT)/\mathrm{d}t$ 的方程(5.22),和关于 $\rho\mathrm{d}Q/\mathrm{d}t$ 的方程(5.27),可从上式得到单位体积的焓演化方程

$$\rho_\alpha\frac{\mathrm{d}h_\alpha}{\mathrm{d}t} = -\frac{5}{3}\left[n_\alpha T_\alpha\nabla\cdot\boldsymbol{u}_\alpha + (\vec{\vec{\Pi}}_\alpha\cdot\nabla)\cdot\boldsymbol{u}_\alpha + \boldsymbol{q}_\alpha + Q_\alpha^{\mathrm{el}} + Q_\alpha^{\mathrm{nonel}}\right]. \tag{5.46}$$

上式右面的 5/3 就是单原子分子的绝热指数,对一般的气体,可以用 $\gamma=c_p/c_V$ 来代替.由于单位体积的焓 $\rho h=nh/N_{\mathrm{A}}$,故上面的单位体积焓变方程还可以写成适用于非理想、多原子分子(离子)气体的形式

$$n_\alpha\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{h_\alpha}{N_{\mathrm{A}}}\right) = -\gamma\left[P_\alpha\nabla\cdot\boldsymbol{u}_\alpha + (\vec{\vec{\Pi}}_\alpha\cdot\nabla)\cdot\boldsymbol{u}_\alpha + \boldsymbol{q}_\alpha + Q_\alpha^{\mathrm{el}} + Q_\alpha^{\mathrm{nonel}}\right]. \tag{5.47}$$

5.4　双流体描述中的麦克斯韦方程组

一般的介质中的麦克斯韦方程组只考虑了(固体或中性流体中)束缚带电粒子的电极化强度 P 和磁化强度 M,而和双流体方程耦合的麦克斯韦方程组还必须计入等离子体中的非束缚带电粒子在电、磁场中感生的空间电荷密度 ρ_{q} 和电流密度 $\boldsymbol{J}$:

$$\nabla\cdot\boldsymbol{D} = 4\pi\rho_{\mathrm{q}} + 4\pi\rho_{\mathrm{appl}},\quad \nabla\cdot\boldsymbol{B} = 0,$$

$$\nabla\times\boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t},\quad \nabla\times\boldsymbol{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{J} + \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{J}_{\mathrm{appl}},$$

$$\rho_{\mathrm{q}} = -en_{\mathrm{e}} + \sum_i^N Z_i e n_i,\quad \boldsymbol{J} = -en_{\mathrm{e}}\boldsymbol{u}_{\mathrm{e}} + \sum_i^N Z_i e n_i\boldsymbol{u}_i,$$

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{E} + 4\pi\boldsymbol{P},\quad \boldsymbol{H} = \boldsymbol{B} - 4\pi\boldsymbol{M},$$

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_{\mathrm{self}} + \boldsymbol{E}_{\mathrm{appl}},\quad \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}_{\mathrm{self}} + \boldsymbol{B}_{\mathrm{appl}}.$$

其中 ρ_{appl},$\boldsymbol{J}_{\mathrm{appl}}$是外加的空间电荷密度和外加的电流密度,它们(通过上面的方程)给出了外加的电场和磁场 $\boldsymbol{E}_{\mathrm{appl}}$,$\boldsymbol{B}_{\mathrm{appl}}$.外加电磁场也可以(通过初、边条件)直接给出,这时在麦克斯韦方程组中就不需要这两个密度项了.

下面来进一步讨论等离子体中的电极化强度 $\boldsymbol{P}$ 和磁化强度 $\boldsymbol{M}$.对电子而言,不存在极化问题;对被完全剥离了外层电子的离子,也不存在极化问题.因此对这种等离子体其在电场中的极化强度 $\boldsymbol{P}=0$.对于未完全剥离的离子,其外层的剩余电子云在电场中仍会被极化.按照电动力学,束缚带电粒子系在外电场中的变化,相当于一个分布的电荷系统.这个电荷系统产生了一个叠加在外场上的感应电场.当这个感应电场通过分布电荷系统所等价的一系列多极子产生的电场来表示时,其最低阶的展示项就是电偶极矩的产生的电场,也即一般教科书上所说的极化强度.因此一般来说,感应电场中还应该有由来自电四极矩,电八极矩,……所贡献的部分.但当外场比较弱时,只取电偶矩所产生的极化强度仍是合适的近似.当然,原则上感生的电荷系统所产生的电场也可以用球谐函数或其他的特殊函数来展开,只要这些展开的最低阶更接近实际情况.另外也可以按库仑定律通过积分来得到分布电荷系统的电场.

不过我们主要关心的是感生电场对于等离子体的影响,而不是感生电场精确的定量描述.所以,在下面需要的时候,我们仍取多极展开的最低项——电极化强度 $\boldsymbol{P}$ 来表示感生电场.一般 $\boldsymbol{P}$ 是外电场 $\boldsymbol{E}$ 的函数

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{E}).$$

当电场很弱时，极化强度对电场的依赖是线性的. 但当电场较强后，这种依赖性变成非线性的了. 如果电场强度不超过氢原子玻尔半径处的库仑场强($E_a = 5.2\times10^9$ V/cm)，一般可以将这种非线性关系表示成幂级数展开的形式

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{E}) = \chi^{(1)}\boldsymbol{E} + \vec{\chi}^{(2)}\cdot\boldsymbol{EE} + \vec{\vec{\chi}}^{(3)} : \boldsymbol{EEE} + \cdots, \tag{5.48}$$

其中 $\chi^{(1)}, \vec{\chi}^{(2)}, \vec{\vec{\chi}}^{(3)}$，分别是线性，一阶和二阶的极化率(electric susceptibility). 在线性近似下，只取展开的第一项，这就是通常文献和教科书上所用的极化强度表达式. 但在强电场下，为了解释一些非线性效应(例如非线性光学中的高阶谐波，差频与和频波等)，就必须考虑上式中的高阶极化项. 如果电场强度超过了氢原子玻尔半径处的库仑场强(如在强度 $I>3.6\times10^{16}$ W/cm² 激光场中)，上述的幂级数展开将不收敛，此表达式也不再正确. 但是，这时极化强度和电场的函数关系究竟如何，目前仍不清楚.

等离子体在磁场中的磁化是由于非束缚的带电粒子的回旋(拉莫尔)运动引起的. 作回旋运动的带电粒子等同于一个个小电流圈，而无论带正电还是负电的粒子，其相应电流圈的磁场都是与使它们作回旋运动的磁场方向相反的，因而造成了所谓的逆磁效应. 在这一点上等离子体和中性固体或流体中的逆磁物质很相像. 在定量计算等离子体的磁化强度时，只需考虑电子成分. 因为离子转得太慢，其电流太弱，所以它们产生的逆向磁场与电子相比可以忽略. 设电子密度为 n，温度为 T，则在外磁场 $\boldsymbol{B}$ 中，单位体积中磁化强度为

$$\boldsymbol{M} = -\frac{nT}{B^2}\boldsymbol{B},$$

利用定义 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{H}+4\pi\boldsymbol{M}=(1+4\pi\chi_m)\boldsymbol{H}=\mu\boldsymbol{H}$，可得等离子体的磁导率

$$\mu = \frac{1}{1+\dfrac{nT}{B^2}},$$

可见 $\mu<1$，即呈逆磁性. 一般等离子体的 $\mu\approx1$，非常接近真空磁导率. 如对高温的磁约束聚变等离子体，取 $n=10^{14}\ \text{cm}^{-3}$，$T=1\ \text{keV}=1.6\times10^{-9}$ erg，$B=10^4$ Gs①，则有 $(nT)/B^2\approx1.6\times10^{-3}$，相应的 $\mu\approx1-1.6\times10^{-3}\approx0.998$. 对低温磁化等离子体，虽然磁场较弱、但密度和温度也低，仍会有 $\mu\approx1$. 所以在绝大多数情况下，我们都可以把等离子体当成无磁化的介质，即在麦克斯韦方程中取 $\boldsymbol{H}=\boldsymbol{B}$. 这样，在双流体描述中经常用的麦克斯韦方程组就是

$$\nabla\cdot\boldsymbol{D} = 4\pi\rho_q + 4\pi\rho_{appl}, \quad \nabla\cdot\boldsymbol{B} = 0, \tag{5.49}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}, \quad \nabla\times\boldsymbol{B} = \frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{J} + \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{J}_{appl}, \tag{5.50}$$

$$\rho_q = -en_e + \sum_i^N Z_i e n_i, \quad \boldsymbol{J} = -en_e\boldsymbol{u}_e + \sum_i^N Z_i e n_i \boldsymbol{u}_i, \tag{5.51}$$

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{E} + 4\pi\boldsymbol{P}, \quad \boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{E}). \tag{5.52}$$

参 考 文 献

[1] 马腾才，胡希伟，陈银华. 等离子体物理原理. 合肥：中国科学技术大学出版社，1988. 67

[2] Braginskii S I. Transport Processes in a Plasma, *in* Reviews of Plasma Physics, Vol. 1, ed. Acad. M. A. Leontovich, Consultants Bureau, New York, 1965. 205, 214—219, 249—253

[3] 卞荫贵，徐立功. 气动热力学. 合肥：中国科学技术大学出版社，1997. 52—62

① 1 erg $=10^{-7}$ J，1 Gs $=10^{-4}$ T.

第六章　非中性等离子体激波简介

激波是流体力学中的一种典型的非线性现象. 当流体的流动速度可以和流体中小扰动传播的速度相比时,流体的可压缩性会对流体的状态量起重要的影响(如流体元的被压缩会使其密度增大、温度升高). 而当流速大于同方向扰动传播速度后,流体的可压缩性与耗散性一起会使流体的形态发生突变——出现了在时、空上高度非线性的激波. 这时在高速推进的初始(上游)流体和被它推压的下游流体间会出现一层以上游流速向前推进的、陡立的波前. 在波前中,流体的状态量会从上游的取值开始,经过急剧的空间变化过渡到下游的取值. 在激波中,波前运动的特征时间尺度和波前中状态量变化的特征空间尺度都比激波上、下游状态量的时空变化特征尺度短得多. 所以,在激波的研究中往往把对波前的描述和对上、下游的描述分开进行.

对于中性流体,其中典型的小扰动是声波. 所以当流体的整体速度超过声波传播的速度时,就会出现激波. 对中性流体激波已经有了一百多年的研究历史(例如参考文献[1]). 激波的研究可以从(可压缩气体的)热力学角度进行,也可以从动力学(流体力学)角度进行. 在流体力学的研究中又分成不同层次. 第一个层次是把波前层当成无限窄的突跃面,假定上游和下游的流体状态量都分别是常量,但在跨越突跃层时从上游值突然跳到了下游值. 由于流体力学方程对质量守恒、动量守恒及能量守恒的要求,上、下游状态量间应该满足一定的关系——这称为兰金-于戈尼奥(Rankine-Hugoniot)方程. 在许多情况下,我们只对激波的压缩效果(也即下游的状态量的取值)感兴趣,希望知道什么样的上游(驱动)状态会

产生怎么样的下游状态. 这时,这一层次的描述就可以满足需要了. 第二层次的描述,是研究激波波前的静态结构,也即给出流体力学各状态量在这一窄层中随空间变化的剖面. 由于流体整体的流速是上游大、下游小,上下游的动能差一定得通过某些耗散机制而转换成内能(热能,或激发、电离能). 所以,这个层次的研究将需要利用静态但包含各种耗散机制的流体力学方程组. 第三个层次是利用完整(含时、空变化)的流体方程组,研究激波的形成及其在空间的传播过程,以及多个激波在传播中的相互作用(碰撞,散射,穿插).

当等离子体的定向流速超过离子声速(非磁化情形)或阿尔文速度(磁化情形)时,也会出现激波. 从 20 世纪 50 年代开始,对实验室和空间等离子体中的激波物理曾进行了广泛和深入的研究. 但除了在一开始曾经有过通过动理学方法和双流体方法来描述等离子体激波的研究报导外(例如,参考文献[2],[4]),至 60 年代中期以后,基本上都是用单(磁)流体方程来描述等离子体的激波过程(例如参考文献[5]). 磁流体力学激波在空间等离子体物理学中,特别是地球附近的艏波(bow shock)的研究中起了非常重要的作用;此外,在激光聚变的内爆激波及近年来新型 Z 箍缩等离子体的内爆激波中,它也被广为研究. 这种描述虽然可以给出磁化等离子体激波中自洽的电流及相应的感应电、磁场;但原则上无法给出等离子体激波中因电荷分离而引起的静电场和静电势.

而在一些实际情况中,往往有必要研究具有电场的等离子体激波. 例如在空间和天体中存在着许多由微米或亚微米量级的荷电尘埃颗粒和电子、离子混合组成的所谓尘埃子等离子体,其中尘埃上带的电量可以是电子电荷的上万倍,它们在等离子体中产生的静电势哪怕在整个等离子体呈电中性时也是不能忽略的. 例如,这种电势可以在准中性的尘埃等离子体中产生所谓的库仑晶格,可以影响尘埃等离子体激波的速度和激波导致的粒子加热(如参见文献[6]). 又如,在对声致发光内爆等离子体激波的数值研究中

发现[7]，在激波面(波前)中存在着很强的静电场(典型值可达 10^9 V/m 的量级). 它是由于波前中高密度($n_e \geqslant 10^{21}\ \mathrm{cm}^{-3}$)等离子体在上、下游边界处的极端密度梯度而使电子流速与离子流速产生差别，造成电荷分离而引起的"双极型"静电场. 这个电场在密度及其梯度都很大的等离子体层中可以非常强，从而产生一些重要的可观测效应. 例如：

(i) 由于激波面现在是带电的，它可能存在着静电型的流体不稳定模式. 而以往的单(磁)流体描述中，只能给出电中性的流体不稳定模式(如瑞利-泰勒和 Richtmyer-Meshkov 不稳定性). 这种新的静电型不稳定模式和以往老的中性不稳定模式的仔细比较，具有重要的理论意义和应用价值.

(ii) 静电场虽然只存在于很窄的激波波前之中，但它会造成激波上、下游间的电势差. 这个电势差对穿越激波面的电子(无论从上游还是从下游出发)都会起到阻挡作用，而对穿越的离子起加速作用. 在定量上这会使得连接激波上、下游粒子能流总密度的兰金-于戈尼奥条件中，增加一个包括了电势差的附加项.

(iii) 如果在激波面中还混有中性粒子，或等离子体中的离子是未被完全剥离的，则激波面中的强电场将会在激波面中引起一个强的、非线性的极化电场. 这种在时间和空间上都非常局域化的强极化场会产生什么样的可观察效应，目前还不能准确预料，但肯定是非常吸引人的.

由于关于磁流体激波的研究工作和专业参考书比较多，因此在本章中，我们只介绍对于非中性(即携带电场)等离子体激波的电磁流体描述. 只是为了比较，在第一节中给出描述电中性、理想磁流体激波的磁流体方程组，以及磁流体激波的兰金-于戈尼奥方程(或连接条件). 从第二节开始将给出非电中性的等离子体激波的描述方法. 在第二节中给出了描述非电中性等离子体激波的双流体与泊松耦合方程组，在第三节中将给出包括了静电势在内的兰金-于戈尼奥连接条件(方程). 最后，在第四节中将对这些连接条件作进一步的讨论.

6.1 理想磁流体力学激波的描述简介

在绝大多数讨论空间和天体等离子体激波的应用中，电阻、黏性、热导等耗散效应是可以忽略的. 因此这种激波可以用理想(无耗散)的磁流体力学方程组进行描述. 按 1.3.1 小节，它们可以写成守恒律的形式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{u}) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \boldsymbol{u}) + \nabla \cdot \left[\rho \boldsymbol{u}\boldsymbol{u} + \left(\frac{B^2}{8\pi}\overset{\Rightarrow}{I} - \frac{\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}}{4\pi}\right) + P\overset{\Rightarrow}{I}\right] = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho u^2 + \frac{B^2}{8\pi} + \frac{P}{\gamma - 1}\right) + \nabla \cdot \left(\frac{1}{2}\rho u^2 \boldsymbol{u} + \boldsymbol{B} \times (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{B}) + \frac{\gamma}{\gamma - 1}P\boldsymbol{u}\right) = 0,$$

$$\nabla \times (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{B}) = 0,$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0.$$

当激波完全形成并稳定传播时，激波的波前可以被认为作匀速直线运动. 于是在一个随波前运动的坐标系中，波前及其相邻的上、下游边界附近的流体都处在静态(即 $\partial/\partial t = 0$). 描述这一区域激波状态的方程组可在上述方程组中令时间变化项为零而得到

$$\nabla \cdot (\rho \boldsymbol{u}) = 0, \tag{6.1}$$

$$(\rho \boldsymbol{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{u} + \nabla P + \frac{1}{4\pi}\nabla \cdot \left(\frac{1}{2}B^2\overset{\Rightarrow}{I} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{B}\right) = 0, \tag{6.2}$$

$$\nabla \cdot \left(\left(\frac{1}{2}\rho u^2 + \frac{\gamma}{\gamma - 1}P + \frac{B^2}{4\pi}\right)\boldsymbol{u} - \frac{1}{4\pi}(\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{u})\boldsymbol{B}\right) = 0, \tag{6.3}$$

$$\nabla \times (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{B}) = 0, \tag{6.4}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0. \tag{6.5}$$

取激波传播方向为 $\boldsymbol{n}$，上式中的 ∇ 为 $(\partial/\partial x)\boldsymbol{n}$，然后对上面的各方

程作积分

$$\int_1^2 \cdots \mathrm{d}x.$$

其中积分的上限“2”、下限“1”分别表示波前与下游、上游流体的连接处，在这两个地方，流体元状态量分别取下游和上游的值. 由于上面的各方程式都表示成空间的完全微商等于零的形式，故积分的结果只和上、下游处流体状态的差值有关

$$[\rho(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n})]_1^2=0, \tag{6.6}$$

$$\left[\rho(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n})\boldsymbol{u}+\left(P+\frac{1}{8\pi}\boldsymbol{B}^2\right)\boldsymbol{n}-\frac{1}{8\pi}(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{u})\boldsymbol{B}\right]_1^2=0, \tag{6.7}$$

$$\left[\left(\frac{1}{2}\rho u^2+\frac{\gamma}{\gamma-1}P+\frac{B^2}{4\pi}\right)(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n})-\frac{1}{4\pi}(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{u})(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{n})\right]_1^2=0, \tag{6.8}$$

$$[(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{n})\boldsymbol{u}_\perp-(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n})\boldsymbol{B}_\perp]_1^2=0, \tag{6.9}$$

$$[\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{n}]_1^2=0. \tag{6.10}$$

其中$[Z]_1^2\equiv Z_2-Z_1$表示括号内的量在激波突跃面（波前）前后的跃变值，也是激波相关的物理量在上、下游取值之差. 其中下标$\perp$表示与$\boldsymbol{n}$垂直的两个方向，即与激波传播方向相切的两个方向. 上面的表达式，就是所谓的兰金-于戈尼奥方程（关系式）. 利用上面的方程组，从关于能量的突跃方程中消去两个速度变量$\boldsymbol{u}_1$，$\boldsymbol{u}_2$后（请参考文献[5]），可得于戈尼奥(Hugoniot)关系

$$\left[\frac{P}{(\gamma-1)\rho}\right]+\frac{1}{2}(P_1+P_2)\left[\frac{1}{\rho}\right]_1^2+\frac{1}{16\pi}([B]_1^2)^2\left[\frac{1}{\rho}\right]_1^2=0.$$

这个式子给出了激波上、下游压强和密度间的关系，它代替了绝热压缩方程. 这是因为在前面我们用的是比绝热方程更准确的能量方程，因此由此导出的于戈尼奥关系也比绝热方程给出的上、下游P和ρ之间的关系更准确.

当令兰金-于戈尼奥方程和于戈尼奥关系中的$\boldsymbol{B}=0$后，它们就变成了普通中性流体中相应的表达式

$$[\rho(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n})]_1^2=0,$$

$$[\rho(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n})\boldsymbol{u}+P\boldsymbol{n}]_1^2=0,$$

$$\left[\left(\frac{1}{2}\rho u^2+\frac{\gamma}{\gamma-1}P\right)(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n})\right]_1^2=0,$$

$$\left[\frac{P}{(\gamma-1)\rho}\right]+\frac{1}{2}(P_1+P_2)\left[\frac{1}{\rho}\right]_1^2=0.$$

利用兰金-于戈尼奥方程，可以分别得出下游的密度、速度和温度与上游相应量以及上游马赫数（$(Ma)_1=u_1/C_s$，C_s是上游声速）的依赖关系.

6.2 描述非电中性等离子体激波的基本方程组

6.2.1 出发方程组

对于非电中性的等离子体激波，需要用双流体方程组，这已经在第五章中给出. 但这些方程组中的输运定律及其中所涉及的输运系数是在本书第十六章 16.1.2 小节中给出的. 当然也可以参考外文原著，见文献[8].

1. 连续性方程

$$\frac{\partial n_\alpha}{\partial t}+\nabla\cdot(n_\alpha\boldsymbol{u}_\alpha)=\frac{\delta n_\alpha}{\delta t},\quad \alpha=\mathrm{e},\mathrm{i}, \tag{6.11}$$

其中n_α和$\boldsymbol{u}_\alpha$分别是电子与离子的数密度和流速；而$\delta n_\alpha/\delta t$是相应的粒子密度（因非弹性碰撞而产生）的生成速率，在本文中假定离子是被完全电离的，因此在下面此项恒取为零.

2. 运动方程

$$m_\alpha n_\alpha\frac{\partial\boldsymbol{u}_\alpha}{\partial t}+m_\alpha n_\alpha\boldsymbol{u}_\alpha\cdot\nabla\boldsymbol{u}_\alpha=-\nabla P_\alpha-\nabla\cdot\overleftrightarrow{\boldsymbol{\Pi}}^\alpha+q_\alpha n_\alpha\left(\boldsymbol{E}+\frac{1}{c}\boldsymbol{u}_\alpha\times\boldsymbol{B}\right)+\boldsymbol{R}_\alpha, \tag{6.12}$$

其中q_α，P_α，$\overleftrightarrow{\boldsymbol{\Pi}}^\alpha$，$\boldsymbol{R}_\alpha$分别是带电粒子的电荷、压强、黏性张量和摩擦

力；而 $\boldsymbol{E},\boldsymbol{B}$ 则是等离子体中的电场和磁场. 在本文中不讨论外加电、磁场，故上式中的电、磁场就是等离子体中的自洽电、磁场. 由于在激波中流体运动速度远小于光速（$u_\alpha \ll c$），所以相对于静电力，洛伦兹力可以忽略. 这样平面激波面结构的讨论可以约化成一维问题. 在下面的讨论中，取波前推进的方向为 $\boldsymbol{e}_x$，故黏性张量只有一个分量，并且可以用一维纵向黏性系数 μ''表示成

$$\Pi_{xx}^{\alpha} = -\mu'' \frac{\mathrm{d}u_\alpha}{\mathrm{d}x}, \quad \mu'' = \frac{4}{3}\eta_0^{\alpha}. \tag{6.13}$$

而 η_0^α 则是 Braginskii 定义的黏性系数，

$$\eta_0^{\mathrm{e}} = 0.733 n_{\mathrm{e}} T_{\mathrm{e}} \tau_{\mathrm{e}}, \quad \eta_0^{\mathrm{i}} = 0.96 n_{\mathrm{i}} T_{\mathrm{i}} \tau_{\mathrm{i}}, \tag{6.14}$$

其中 $\tau_{\mathrm{e,i}}$分别是电子和离子的平均碰撞时间，它们可以用平均碰撞自由程 l_α 和热速度 $v_{\alpha t}$表示成

$$\tau_\alpha = \frac{l_\alpha}{v_{\alpha t}}, \quad v_{\alpha t} = \sqrt{\frac{2T_\alpha}{m_\alpha}}. \tag{6.15}$$

运动方程中的摩擦力项也按 Braginskii 的定义，取成

$$R_{\mathrm{e}} = -R_{\mathrm{i}} = -\alpha_0 \frac{m_{\mathrm{e}} n_{\mathrm{e}}}{\tau_{\mathrm{e}}}(u_{\mathrm{e}} - u_{\mathrm{i}}). \tag{6.16}$$

最后，在本文中将采取理想气体的物态方程，令

$$P_\alpha = n_\alpha T_\alpha. \tag{6.17}$$

其中 T_α 是带电粒子的温度.

3. 温度方程

$$\frac{3}{2} n_\alpha \frac{\partial T_\alpha}{\partial t} + \frac{3}{2} n_\alpha \boldsymbol{u}_\alpha \cdot \nabla T_\alpha + n_\alpha T_\alpha \nabla \cdot \boldsymbol{u}_\alpha + \overleftrightarrow{\Pi}^{\alpha} : \nabla \boldsymbol{u}_\alpha + \nabla \cdot \boldsymbol{q}_\alpha = Q_\alpha. \tag{6.18}$$

上式中的 Q_α 是电子-离子间由于弹性碰撞而交换的热量，

$$Q_{\mathrm{i}} = Q_\Delta = \frac{3m_{\mathrm{e}}}{m_{\mathrm{i}}} \frac{n_{\mathrm{e}}}{\tau_{\mathrm{e}}}(T_{\mathrm{e}} - T_{\mathrm{i}}),$$

$$Q_{\mathrm{e}} = -\boldsymbol{R}_{\mathrm{e}} \cdot (\boldsymbol{u}_{\mathrm{e}} - \boldsymbol{u}_{\mathrm{i}}) - Q_\Delta. \tag{6.19}$$

温度方程中的热流项 $\boldsymbol{q}_\alpha$，在经典情况下是由弹性碰撞引起的. 在温度梯度不是很大时，热流满足傅里叶定律，并取 Spitzer-Harm 表达式：

$$q_\alpha^{\mathrm{SH}} = -\kappa_\alpha \frac{\mathrm{d}T_\alpha}{\mathrm{d}x}, \quad \kappa_{\mathrm{e}} = \gamma_0 \frac{n_{\mathrm{e}} T_{\mathrm{e}} \tau_{\mathrm{e}}}{m_{\mathrm{e}}},$$

$$\kappa_{\mathrm{i}} = 3.9 \frac{n_{\mathrm{i}} T_{\mathrm{i}} \tau_{\mathrm{i}}}{m_{\mathrm{i}}}. \tag{6.20}$$

但激波面的厚度 d 很薄，在其中的某些区域会出现温度梯度的特征长度（$L_T = [(1/n)(\mathrm{d}n/\mathrm{d}x)]^{-1} \sim d$）与离子的碰撞平均自由程 l_{i} 相比不够大的情况. 这时，傅里叶定律不再适用. 按文献[9]，当

$$\frac{L_T}{l_{\mathrm{i}}} \approx \frac{d}{l_{\mathrm{i}}} \leqslant 10^2, \quad \frac{q^{\mathrm{SH}}}{q_f} > 2.4 \times 10^{-2}, \quad q_f = \frac{1}{\sqrt{m_\alpha}} n_\alpha T_\alpha^{3/2}$$

时，应该用带限制因子 f 的自由热流 q^{FS}代替 Spitzer-Harm 表达式 q^{SH}，

$$q_\alpha^{\mathrm{FS}} = -f q_f, \quad f = 0.01 \sim 0.08. \tag{6.21}$$

上式中所给出的 f 值，是在激光聚爆等离子体研究中，通过和实验的比较而选择的经验值. 实际上在激波波前中，既存在经典热流适用的区域（如在波前与上游或下游交界处），也存在需要用非经典热流的区域（如在波前区的中部）. 因此在研究波前结构时，对不同区域需要仔细考察适用的热流表达式；但突跃面两边流体量的兰金-于戈尼奥方程和热流的具体表达式无关，因此就不必顾及热流应该怎样选取了.

6.2.2 静态激波结构方程组

取一个随着激波波前一起运动的坐标系（设波前以上游速度 u_1，沿 $\boldsymbol{e}_x$ 方向均速前进）. 在上、下游参量发生显著改变的时间尺度内，波前可以近似看成是静态的. 因此在讨论激波面（也即激波波前）结构时，可以令上面双流体方程组中的 $\partial/\partial t = 0$. 于是(6.11)式成为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(n_\alpha u_\alpha) = 0.$$

这表示在不存在粒子源(漏)项时,粒子流是守恒的. 令

$$n_\alpha u_\alpha = \Gamma_\alpha = \text{常数}, \tag{6.22}$$

于是粒子流速就不是独立的,它可以从粒子密度导出

$$u_\alpha = \frac{\Gamma_\alpha}{n_\alpha}, \quad \frac{\mathrm{d}u_\alpha}{\mathrm{d}x} = -\frac{\Gamma_\alpha}{n_\alpha^2}\frac{\mathrm{d}n_\alpha}{\mathrm{d}x}. \tag{6.23}$$

其他流体方程是

$$m_\alpha n_\alpha u_\alpha \frac{\mathrm{d}u_\alpha}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(n_\alpha T_\alpha) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\mu''\frac{\mathrm{d}u_\alpha}{\mathrm{d}x}\right) + q_\alpha n_\alpha E + R_\alpha, \tag{6.24}$$

$$\frac{3}{2}n_\alpha u_\alpha \frac{\mathrm{d}T_\alpha}{\mathrm{d}x} + n_\alpha T_\alpha \frac{\mathrm{d}u_\alpha}{\mathrm{d}x} = \mu''\left(\frac{\mathrm{d}u_\alpha}{\mathrm{d}x}\right)^2 - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(q_\alpha) + Q_\alpha, \tag{6.25}$$

其中的热流 q_α 应该按照所在地温度梯度的大小而选取. 这些方程和泊松方程一起构成了描写等离子体激波结构的基本方程组.

6.2.3　无量纲化的激波结构方程组

选择激波上游的状态量来归一化激波结构方程. 按定义,等离子体的总密度和密度流分别为

$$\rho = m_e n_e + m_i n_i \approx (m_e Z + m_i) n_i \approx m_i n_i,$$

$$\rho u = m_e n_e u_e + m_i n_i u_i \approx (Z m_e u_e + m_i u_i) n_i.$$

其中用到了准中性近似: $n_e \approx Z n_i$. 于是等离子体的整体速度为

$$u = \frac{\rho u}{\rho} \approx \left(1 + Z\frac{m_e}{m_i}\frac{u_e}{u_i}\right) u_i \approx u_i,$$

其中考虑到了

$$\frac{u_e}{u_i} \sim \frac{v_{et}}{v_{it}} \sim \sqrt{\frac{m_i}{m_e}}, \quad \Rightarrow \quad \frac{m_e}{m_i}\frac{u_e}{u_i} \sim \sqrt{\frac{m_e}{m_i}} = \varepsilon \ll 1.$$

设激波上游量的下标为"1", 下游量的下标为"2",取

$$u_1 \approx u_{i1}, \quad n_1 = n_{i1}, \quad T_1 = T_{i1} = T_{e1}.$$

用它们和激波面厚度 d 一起,就可以归一化激波面中的各参量

$$\xi = \frac{x}{d}, \quad v_\alpha = \frac{u_\alpha}{u_1} \approx \frac{u_\alpha}{u_{i1}}, \quad \rho_\alpha = \frac{n_\alpha}{n_1} = \frac{n_\alpha}{n_{i1}},$$

$$t_\alpha = \frac{T_\alpha}{T_1}, \quad \hat{E} = \frac{ed}{T_1}E \tag{6.26}$$

为归一化流体方程中的输运系数. 除了上游状态量,还要用到上游的离子-离子弹性碰撞自由程(以 l_{ii}表示)

$$l_1 \equiv l_{ii}|_{\xi=0} = (v_{it}\tau_i)|_{\xi=0} = \frac{3}{2\sqrt{2\pi}}\frac{T_1^2}{\lambda e^4 Z^4 n_1},$$

其中 λ 是库仑对数. λ,离子平均碰撞时间 τ_i,以及下面所引的电子平均碰撞时间 τ_e 都按 Braginskii 定义取值. 这样,在激波面中的粒子平均自由程就可以归一成

$$l_i = l_1\frac{t_i^2}{\rho_i}, \quad l_e = \frac{Z^2}{\sqrt{2}}l_1\frac{t_e^2}{\rho_i}. \tag{6.27}$$

结果,在激波面中的各输运量可以表示成

$$\mu_i'' = \frac{2}{3}\sqrt{2m_i T_1}n_1 l_1 t_i^{5/2},$$

$$\mu_e'' = \frac{Z^2}{2\sqrt{2}}\sqrt{2m_e T_1}n_1 l_1 \frac{\rho_e}{\rho_i}t_e^{5/2}. \tag{6.28}$$

$$q_i^{\mathrm{SH}} = -\frac{3.9}{\sqrt{2}}\frac{1}{M_{g1}}\frac{l_1}{d}t_i^{5/2}\frac{\mathrm{d}t_i}{\mathrm{d}\xi},$$

$$q_e^{\mathrm{SH}} = -\frac{\gamma_0 Z^3}{2\varepsilon}\frac{1}{M_{g1}}\frac{l_1}{d}t_e^{5/2}\frac{\mathrm{d}t_e}{\mathrm{d}\xi}, \tag{6.29}$$

$$q_\alpha^{\mathrm{FS}} = -f\frac{1}{\sqrt{m_\alpha}}n_1 T_1^{3/2}(\rho_\alpha t_\alpha^{3/2}), \tag{6.30}$$

$$R_e = -R_i = -\frac{2\alpha_0}{Z^2}\sqrt{m_e T_1}\frac{n_1 u_1}{l_1}\frac{\rho_e\rho_i}{t_e^{3/2}}(v_e - v_i), \tag{6.31}$$

$$Q_i \equiv Q_\Delta = \frac{3\sqrt{2}}{Z^2}\varepsilon\sqrt{\frac{2T_1}{m_i}}\frac{n_1 T_1}{l_1}\frac{\rho_e\rho_i}{t_e^{3/2}}(t_e - t_i), \tag{6.32}$$

$$Q_e = \frac{2\alpha_0}{Z^2}\sqrt{m_e T_1}\,\frac{n_1 u_1^2}{l_1}\,\frac{\rho_e\rho_i}{t_e^{3/2}}(v_e - v_i)^2$$
$$- \frac{3\sqrt{2}}{Z^2}\varepsilon\sqrt{\frac{2T_1}{m_i}}\,\frac{n_1 T_1}{l_1}\,\frac{\rho_e\rho_i}{t_e^{3/2}}(t_e - t_i). \tag{6.33}$$

然后,令

$$\gamma_\alpha = \frac{\Gamma_\alpha}{n_1 u_1} = 常数,\quad M_{g1}^2 = \frac{m_i u_1^2}{T_1},\quad \varepsilon = \sqrt{\frac{m_e}{m_i}},$$

其中

$$M_{g1}^2 = \gamma (Ma)_1^2,\quad (Ma)_1^2 = \frac{u_1^2}{C_{s1}^2},\quad C_{s1}^2 = \frac{\gamma T_1}{m_i},$$

其中$(Ma)_1$,C_{s1}分别是上游的马赫数和声速,而γ是绝热指数(对理想气体,$\gamma=5/3$).最后,描写激波面结构的无量纲方程组就可以写成

$$\frac{\mathrm{d}\hat{E}}{\mathrm{d}\xi} = \left(\frac{d}{\lambda_{De}}\right)^2 (Z\rho_i - \rho_e), \tag{6.34}$$

$$\rho_\alpha v_\alpha = \gamma_\alpha,\quad \alpha = \mathrm{i,e}, \tag{6.35}$$

$$M_{g1}^2\gamma_i\frac{\mathrm{d}v_i}{\mathrm{d}\xi} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}(\rho_i t_i) = M_{g1}\frac{l_1}{d}\frac{2\sqrt{2}}{3}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\left(t_i^{5/2}\frac{\mathrm{d}v_i}{\mathrm{d}\xi}\right)$$
$$+ Z\rho_i\hat{E} + \frac{2\alpha_0\varepsilon}{Z^2}\frac{d}{l_1}M_{g1}\frac{\rho_e\rho_i}{t_e^{3/2}}(v_e - v_i), \tag{6.36}$$

$$\varepsilon^2 M_{g1}^2\gamma_e\frac{\mathrm{d}v_e}{\mathrm{d}\xi} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}(\rho_e t_e) = \varepsilon M_{g1}\frac{l_1}{d}\frac{Z^2}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\left(\frac{\rho_e}{\rho_i}t_e^{5/2}\frac{\mathrm{d}v_e}{\mathrm{d}\xi}\right)$$
$$- \rho_e\hat{E} - \frac{2\alpha_0\varepsilon}{Z^2}\frac{d}{l_1}M_{g1}\frac{\rho_e\rho_i}{t_e^{3/2}}(v_e - v_i), \tag{6.37}$$

$$\frac{3}{2}\gamma_i\frac{\mathrm{d}t_i}{\mathrm{d}\xi} + \rho_i t_i\frac{\mathrm{d}v_i}{\mathrm{d}\xi} = M_{g1}\frac{l_1}{d}\frac{2\sqrt{2}}{3}t_i^{5/2}\left(\frac{\mathrm{d}v_i}{\mathrm{d}\xi}\right)^2 - \frac{\mathrm{d}\hat{q}_i}{\mathrm{d}\xi}$$
$$+ \frac{3\sqrt{2}\varepsilon}{Z^2}\frac{d}{l_1}\frac{\rho_e\rho_i}{t_e^{3/2}}(t_e - t_i), \tag{6.38}$$

$$\frac{3}{2}\gamma_e\frac{\mathrm{d}t_e}{\mathrm{d}\xi} + \rho_e t_e\frac{\mathrm{d}v_e}{\mathrm{d}\xi} = M_{g1}\frac{l_1}{d}\frac{\varepsilon Z^2}{2}\frac{\rho_e}{\rho_i}t_e^{5/2}\left(\frac{\mathrm{d}v_e}{\mathrm{d}\xi}\right)^2 - \frac{\mathrm{d}\hat{q}_e}{\mathrm{d}\xi}$$
$$+ \frac{2\alpha_0\varepsilon}{Z^2}\frac{d}{l_1}M_{g1}\frac{\rho_e\rho_i}{t_e^{3/2}}(v_e - v_i)^2 - \frac{3\sqrt{2}\varepsilon}{Z^2}\frac{d}{l_1}\frac{\rho_e\rho_i}{t_e^{3/2}}(t_e - t_i). \tag{6.39}$$

其中最后两个(能量)方程中的无量纲热流项 $\hat{q}_\alpha = q_\alpha/(n_1 T_1 u_1)$,而 q_α 是取经典热流还是限制(自由)热流取决于波前中每个地方的温度梯度值.最简单的方法是在每个空间点取这两个热流中较小的那一个

$$q_\alpha = \min\{q_\alpha^{\mathrm{SH}}, q_\alpha^{\mathrm{FS}}\},$$

这时在某些地点,热流将不是空间的连续函数.为了使热流连续,更好一点的取法可以令

$$q_\alpha = \frac{q_\alpha^{\mathrm{SH}} q_\alpha^{\mathrm{FS}}}{q_\alpha^{\mathrm{SH}} + q_\alpha^{\mathrm{FS}}}.$$

q_α 的取法是一个正在探索的研究课题,还可以有许多其他的办法(如用在一个合适区间上的积分代替这里用当地状态量表示 q_α 的非局域表示法等).目前还没有令人满意的解决办法,希望读者在以后的工作中多加注意.

6.3 等离子体激波的兰金-于戈尼奥方程

6.3.1 激波上、下游处的参量关系

由粒子流守恒,可知

$$\gamma_i = \gamma_{i1} = \gamma_{i2} = 1,\quad \gamma_e = \gamma_{e1} = \gamma_{e2} = 常数;$$

另一方面,电子流也可以通过等离子体的总电流 J_0 来表示.在电子和离子流都守恒时,总电流也是常数,

$$J_0 = q_i n_i u_i - e n_e u_e = q_i\Gamma_i - e\Gamma_e$$
$$= e n_1 u_1 (Z\gamma_i - \gamma_e) \equiv e n_1 u_1 j_0 = 常数,$$
$$\gamma_e = -(j_0 - Z).$$

当所讨论的等离子体激波不载(电)流时，有 $\gamma_e = Z$.

在激波的上游处($\xi = x = 0$，用下标"1"表示)和激波的下游处($\xi = 1, x = d$，用下标"2"表示)，我们可以合理地假定流体的状态量是空间的常数(即 $d/d\xi = 0$)，并且因电荷分离而产生的静电场为零：$\hat{E}(0) = \hat{E}_1 = 0, \hat{E}(1) = \hat{E}_2 = 0$. 这样，从电子的运动方程可得

$$v_{e1} = v_{i1} = 1, \quad v_{e2} = v_{i2};$$
$$u_{e1} = u_{i1} = u_1, \quad u_{e2} = u_{i2} = u_2. \tag{6.40}$$

而从电子的温度方程可得

$$t_{e1} = t_{i1} = t_1 = 1, \quad t_{e2} = t_{i2} = t_2. \tag{6.41}$$

上面的 u_2, t_2 是分别用上游速度和温度归一的下游总速度和温度.

6.3.2 动量流和能量流的连接条件

1. 动量流的于戈尼奥方程

将电子和离子流体的两个运动方程相加，可得等离子体总动量的方程. 然后积分这个方程 $\int_0^1 \cdots d\xi$，并令积分结果中的电场项和含 $d/d\xi$ 的项为零，就可以得到激波上、下游动量流的连接条件——即动量流的于戈尼奥方程

$$[M_{g1}^2(\gamma_i v_i + \varepsilon^2 \gamma_e v_e) + (\rho_i t_i + \rho_e t_e)]|_1^2 = 0. \tag{6.42}$$

它的有量纲的表达式是

$$(m_i \Gamma_i + m_e \Gamma_e) u_2 + (\Gamma_i + \Gamma_e) \frac{T_2}{u_2} = F_1(u_1, T_1), \tag{6.43}$$

$$F_1(u_1, T_1) \equiv (m_i \Gamma_i + m_e \Gamma_e) u_1 + (\Gamma_i + \Gamma_e) \frac{T_1}{u_1}.$$

2. 能量流的于戈尼奥方程

为了得到关于总能流的于戈尼奥方程，要从粒子总能量的双流体方程出发，

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2} m_\alpha n_\alpha u_\alpha^2 + \frac{3}{2} n_\alpha T_\alpha\right)$$

$$+ \nabla \cdot \left[\left(\frac{1}{2} m_\alpha n_\alpha u_\alpha^2 + \frac{5}{2} n_\alpha T_\alpha + \vec{\vec{\Pi}}^\alpha\right) \boldsymbol{u}_\alpha + \boldsymbol{q}_\alpha\right]$$
$$= q_\alpha n_\alpha \boldsymbol{u}_\alpha \cdot \boldsymbol{E} + \boldsymbol{u}_\alpha \cdot \boldsymbol{R}_\alpha + Q_\alpha^{el}, \quad \alpha = i, e.$$

在上式中令 $\partial/\partial t = 0$，取一维几何模型，并将电子和离子的两个方程相加，可得描述激波结构的等离子体总能量方程

$$\frac{d}{dx} \sum_\alpha \left(\frac{1}{2} m_\alpha \Gamma_\alpha u_\alpha^2 + \frac{5}{2} \Gamma_\alpha T_\alpha - \frac{\mu_\alpha''}{2} \frac{du_\alpha^2}{dx} + q_\alpha\right)$$
$$= J_0 E \equiv - J_0 \frac{d\phi}{dx}. \tag{6.44}$$

其中 $\phi(x)$ 是电场对应的电势，它在上、下游和激波面中都不为零. 同先前的做法一样，对上式整体作积分 $\int_0^d \cdots dx$，并令积分结果中的热流项 q_α 和含 $d/d\xi$ 的项为零，就可以得到激波上、下游能量流的连接(于戈尼奥)条件，

$$(m_i \Gamma_i + m_e \Gamma_e) u_2^2 + 5(\Gamma_i + \Gamma_e) T_2 = F_2(u_1, T_1, \Delta\phi), \tag{6.45}$$

$$F_2(u_1, T_1, \Delta\phi) \equiv (m_i \Gamma_i + m_e \Gamma_e) u_1^2 + 5(\Gamma_i + \Gamma_e) T_1 - 2 J_0 \Delta\phi,$$

其中 $\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1$ 是下游与上游间的电势差. 可以看出和单(磁)流体描述不同，在考虑了激波面中等离子体的非电中性后，激波的能流连接条件中会多出一个可以有观察效应的电势跳跃项.

6.3.3 激波下游参量与马赫数、电位差及所载电流的关系

利用激波总动量流和总能量流的于戈尼奥方程，可以在已经知道了所载电流和上下游间的电势差后，从上游的速度、温度求出激波下游的速度和温度(反过来也一样). 将(6.43)式和(6.45)式联立，有

$$a u_2 + b \frac{T_2}{u_2} = F_1(u_1, T_1), \tag{6.46}$$

$$au_2^2 + 5bT_2 = F_2(u_1, T_1, \Delta\phi), \tag{6.47}$$

其中

$$a = m_i\Gamma_i + m_e\Gamma_e = m_i n_1 u_1\left(1 + \frac{m_e}{m_i}\gamma_e\right) \equiv m_i n_1 u_1 \hat{a},$$

$$b = \Gamma_i + \Gamma_e = n_1 u_1(1 + \gamma_e) \equiv n_1 u_1 \hat{b},$$

$$F_1 = au_1 + b\frac{T_1}{u_1} = n_1 T_1\left(\hat{a} m_i \frac{u_1^2}{T_1} + \hat{b}\right) = n_1 T_1 f_1,$$

$$f_1 = M_{g1}^2 \hat{a} + \hat{b}; \tag{6.48}$$

$$F_2 = au_1^2 + 5bT_1 - 2J_0\Delta\phi = n_1 u_1 T_1 f_2,$$

$$f_2 = M_{g1}^2 \hat{a} + 5\hat{b} - 2j_0\Delta\hat{\phi}, \tag{6.49}$$

其中 $\hat{\phi} = (e/T_1)\phi$. 从联立代数方程组可以得到

$$T_2 = \frac{1}{4b}(F_2 - F_1 u_2), \tag{6.50}$$

$$au_2^2 - \frac{5}{4}F_1 u_2 + \frac{1}{4}F_2 = 0. \tag{6.51}$$

从二次方程可以得到两个解，其中取正号的解是平凡解：$u_2 \approx u_1$；而取负号的正是激波下游的速度对 $u_1, M_{g1}, j_0, \Delta\hat{\phi}$ 的依赖关系

$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{5}{8}(1+\delta_1)\left[1 - \sqrt{1 - \frac{16}{25}\frac{1 + 5\delta_1 - \delta_2}{(1+\delta_1)^2}}\right]. \tag{6.52}$$

其中

$$\delta_1 = \frac{1 + Z - j_0}{\gamma (Ma)_1^2}, \quad \delta_2 = \frac{2j_0}{\gamma (Ma)_1^2}\frac{e\Delta\phi}{T_1},$$

$$(Ma)_1 = \frac{u_1}{C_s}, \quad C_s = \sqrt{\frac{\gamma T_1}{m_i}}.$$

相应的下游温度则可以表示成

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{1}{4\delta_1}\left[(1 + 5\delta_1 - \delta_2) - (1 + \delta_1)\frac{u_2}{u_1}\right]. \tag{6.53}$$

由于激波产生时一定有 $u_2/u_1 < 1$，故由 $u_2/u_1^{\min} = 1$ 可以求出出现等离子体激波时最小的上游马赫数 $(Ma)_1^{\min}$. 显然，$(Ma)_1^{\min}$ 和 Z，

$j_0, \Delta\phi$ 都有关. 这是和中性流体激波及磁流体激波都不相同的. 在中性流体中，只要上游马赫数大于 1，就可以出现激波. 而在磁流体中，激波出现与磁马赫数(上游流体速度与相关的磁流体波速度之比)有关，但不会与上、下游电位差以及所载电流有关.

为了简单，下面给出在整个等离子体不载流时($j_0 = 0$)的 $(Ma)_1^{\min}$ 解析表达式. 当 $j_0 = 0$ 时，$\delta_1 = 1 + Z$，$\delta_2 = 0$，

$$(Ma)_1^{\min} \equiv \frac{u_1^{\min}}{C_s} = \sqrt{1 + Z}. \tag{6.54}$$

下面以 $Z = 1$ 为例，这时 $(Ma)_1^{\min} = \sqrt{2} = 1.414$，而 u_2/u_1 和 T_2/T_1 的相应取值与上游马赫数 $(Ma)_1$ 的关系见表 6.1.

表 6.1　下游速度和温度与上游马赫数的关系

$(Ma)_1$	1.1	1.2	1.4	1.5	1.6	1.8	2.0	2.2	2.4	2.5	2.6	2.8	3.0
$\frac{u_2}{u_1}$	1.0	1.0	1.0	0.917	0.836	0.714	0.625	0.560	0.510	0.490	0.472	0.441	0.417
$\frac{T_2}{T_1}$	1.0	1.0	1.0	1.06	1.13	1.26	1.41	1.55	1.71	1.79	1.88	2.05	2.24

从表 6.1 中可以看出，当 $u_1 < u_1^{\min} = 1.414C_s$ 时，u_2/u_1 和 T_2/T_1 都为 1.0，也即这时不存在激波. 只有当 $u_1 > u_1^{\min}$ 时，激波才出现. 而且当 Z 愈大，$u_1^{\min}$ 值也愈大，这和中性流体激波及磁流体激波显然都不同. 在更一般的情况下，$M_1^{\min}$ 不但与 Z 有关而且与 j_0 及 $\Delta\phi$ 都有关系.

以上还只讨论了带电场的等离子体激波的宏观、唯象性质(即兰金-于戈尼奥方程)，但已经看出，它们与电中性的磁流体激波有相当大的不同了：

(i) 在能流的上、下游连接条件中出现了中性激波时所没有的附加项，它和离子电荷 Z，激波所携带的电流 j_0 及激波上、下游间的电位差 $\Delta\phi$ 都有关系(见(6.45)式).

(ii) 因此激波下游的速度和温度不但和上游速度和温度有关(这是磁流体激波也有的)，也和 $Z, j_0, \Delta\phi$ 等与等离子体中电荷状

态及电场有关的量有密切的关系.

(iii) 使等离子体激波得以建立的上游临界马赫数也和等离子体中的静电性质有关,一般这个临界值要大于电中性等离子体激波出现的临界值.

这里只给出了不考虑激波上下游电势差 $\Delta\phi$ 以及通过激波波前的电流 j_0 时的结果. 下一节中我们将通过数值计算给出考虑了这些效应后的一些结果(图).

6.4 电流与电势对激波的影响

在下面给出的数值结果中,为了简单,我们将用以下的归一化参量

$$v_2=\frac{u_2}{u_1},\quad t_2=\frac{T_2}{T_1},\quad \Delta\hat{\phi}=\frac{e}{T_1}\Delta\phi,\quad \hat{a}=\frac{a}{m_in_1u_1},\quad \hat{b}=\frac{b}{n_1u_1}.$$

6.4.1 激波上、下游处的参量关系

从(6.52)和(6.53)两式可看出,激波中的电场(电位)会对激波下游的流速有影响. 在这里我们只讨论等离子体电流很微弱的情况,这时若 $\Delta\hat{\phi}>0$,则当 $j_0>0$ 时,电场会降低下游流速度 u_2,相应地下游粒子的密度和温度就会升高,所以这种情况可以加强激波. 反之,$j_0<0$ 时,电场会增大下游的流速 u_2,降低下游的粒子密度和温度,从而会削弱激波.

图 6.1 表示了对于不同的马赫数 $(Ma)_1$ 下,v_2 和 t_2 随着 j_0 变化而变化的曲线图. 图中的间断不是真实存在的,这是由于在计算中对所有的 $(j_0,(Ma)_1)$ 都取同一个固定的 $\Delta\hat{\phi}$ 值引起的(图 6.2 中的间断也是也是因为同样原因引起的). 由于 $\Delta\hat{\phi}$ 的精确值只能通过泊松方程自洽地解出,而这样做很费时间. 所以这里的 $\Delta\hat{\phi}$ 是根据大量数值计算的结果给出的一个近似值,它对多数的 j_0

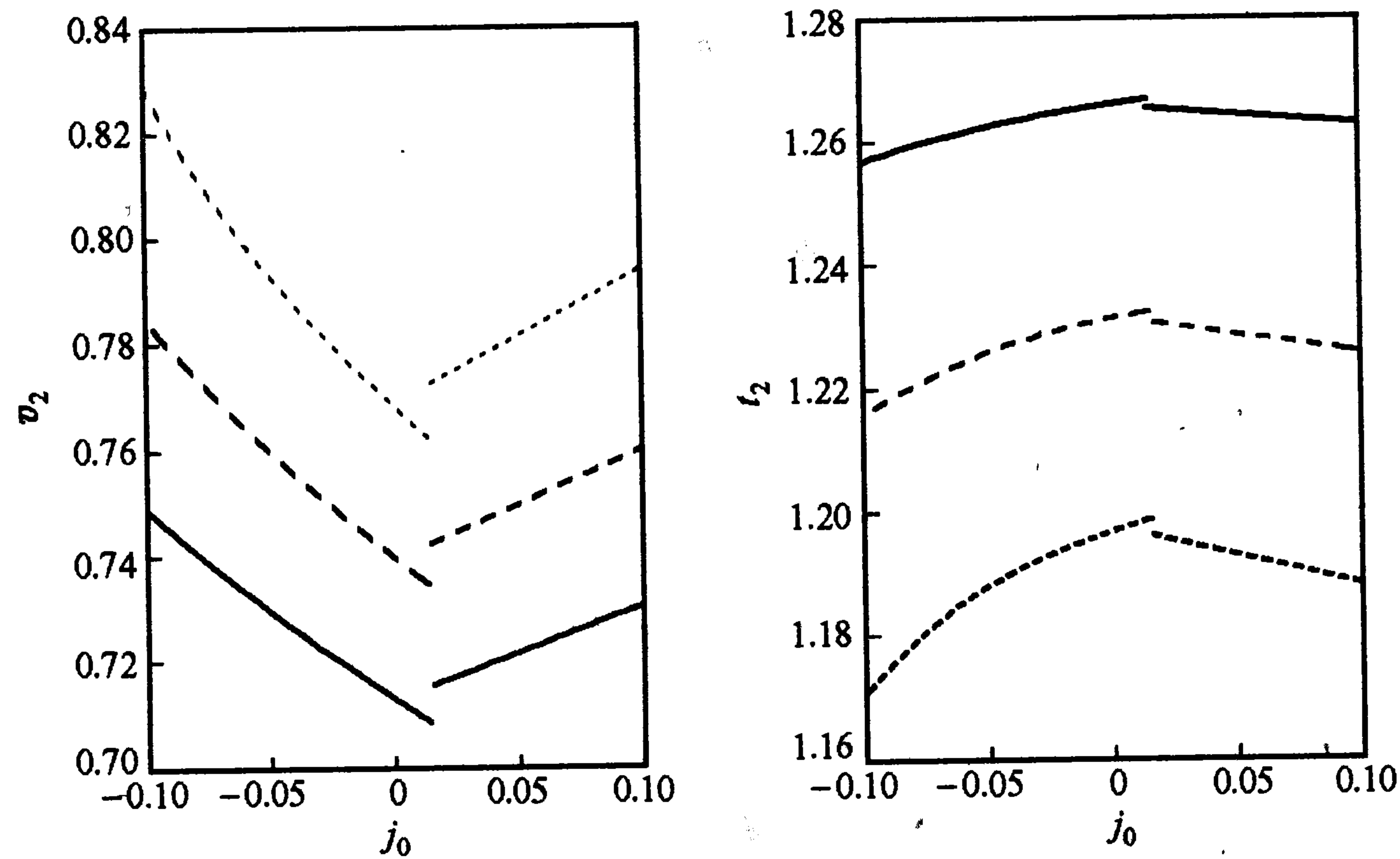


图 6.1 对于不同的马赫数 $(Ma)_1$,v_2 和 t_2 随着 j_0 的变化曲线
(点线:$(Ma)_1=1.7$,虚线:$M_1=1.75$,实线:$M_1=1.8$)

值都足够准确,就是当 j_0 跨越零点时会有较大误差. 如果每一点都取和相应的 $(j_0,(Ma)_1)$ 所对应的真实 $\Delta\hat{\phi}$ 值,图中的曲线应该是连续的. 从图 6.1 可以看出,当 j_0 大于某一值 j_{0c} 时,v_2 随着 j_0 增加而增加; 反之, 则随之而减小. 同 v_2 相反,当 $j_0>j_{0c}$ 时,t_2 则随着 j_0 的增加而减小;反之,则随之而增大. 从图中还可看出,v_2 和 t_2 对马赫数都很敏感. 马赫数越小,激波就对电流越敏感,反之则相反.

6.4.2 临界马赫数

当激波存在时,激波的上下游的流速和温度 $u_{1,2}$,$T_{1,2}$ 必须满足

$$0<\frac{u_2}{u_1}\leqslant 1,\quad \frac{T_2}{T_1}\geqslant 1.$$

求解这两个不等式,就可以求出形成激波的条件是上游马赫数 $(Ma)_1>(Ma)_1^c$. 而

$$
(Ma)_1^c = \begin{cases} \left[\dfrac{\hat{b} + 4\sqrt{\hat{b}^2 + \frac{3}{4} j_0 \Delta\hat{\phi}}}{3\gamma a}\right]^{1/2}, \\ \qquad \text{当 } 0 \leqslant j_0\Delta\hat{\phi} \leqslant \dfrac{1 + 16\hat{b} + \sqrt{1 + 16\hat{b}^2 + 32\hat{b}}}{6}; \\ \left(\dfrac{2j_0\Delta\hat{\phi} - 5\hat{b}}{\hat{a}}\right)^{1/2}, \\ \qquad \text{当 } j_0\Delta\hat{\phi} > \dfrac{1 + 16\hat{b} + \sqrt{1 + 16\hat{b}^2 + 32\hat{b}}}{6}; \\ \left[\dfrac{5\hat{b}}{3\gamma\hat{a}} - \dfrac{16}{9\gamma\hat{a}}\left(j_0\Delta\hat{\phi} - \sqrt{j_0^2\Delta\hat{\phi}^2 - \frac{15}{8}\hat{b} j_0 \Delta\hat{\phi}}\right)\right]^{1/2}, \\ \qquad \text{当 } j_0\Delta\hat{\phi} < 0. \end{cases} \tag{6.55}
$$

从公式中可看出，当 $j_0=0$ 时，有

$$
(Ma)_1^c = \sqrt{\frac{5\hat{b}}{3\gamma\hat{a}}},
$$

对单原子气体，取 $\gamma=5/3$，$\hat{a}\approx1$，$\hat{b}\approx1+Z$，则

$$
(Ma)_1^c = \sqrt{\frac{5\hat{b}}{3\gamma\hat{a}}} \approx \sqrt{\frac{\hat{b}}{\hat{a}}} \approx \sqrt{\hat{b}} \approx \sqrt{1+Z}.
$$

这就回到了前面的(6.54)式. 图 6.2 是在不同 Z 的情况下，临界马赫数随电流的变化情况.

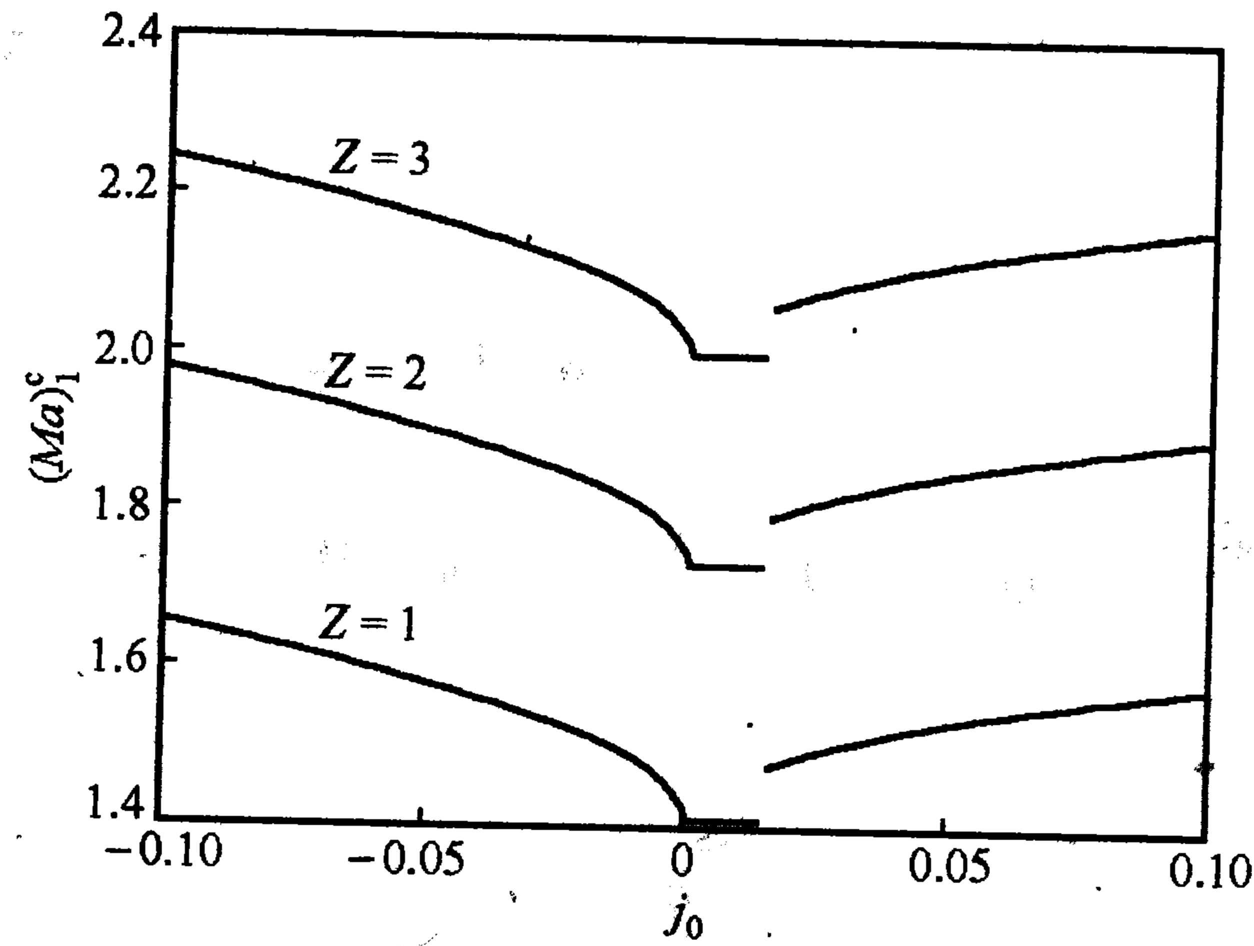


图 6.2 对于不同 Z 情况下，$(Ma)_1^c$ 随着 j_0 的变化曲线图($j_0<0.015$，$\Delta\hat{\phi}=1$，$j_0>0.015$，$\Delta\hat{\phi}=-0.5$)

从图中我们可以发现：当 $j_0\leqslant0$ 时，$\Delta\hat{\phi}>0$ 并且它随着 $|j_0|$ 增加而增加；而当 $j_0\geqslant0$ 时，存在一个临界的电流 j_{0c}，大于这个电流则有 $\Delta\hat{\phi}<0$，反之则 $\Delta\hat{\phi}>0$。j_{0c} 的值依赖于激波上游马赫数 $(Ma)_1$. 例如，当 $(Ma)_1=1.6$ 时，$j_{0c}\approx0.0135$. 为了方便并能定性的分析，在以下的例子中，我们都取当 $j_0<0.015$ 时，$\Delta\hat{\phi}=1$；当 $j_0>0.015$ 时，$\Delta\hat{\phi}=-0.5$.

6.4.3 无电流时激波波前中各物理量的空间分布图

图 6.3 到图 6.6 分别是离子、电子相对密度；离子、电子相对温度；无量纲的电势，离子、电子的相对电荷分离($\delta=Z\rho_i-\rho_e$)；以及电场，相对温度差($\Delta t=t_i-t_e$)在激波波前中的剖面. 在进行这些图的数值运算时，只需考虑经典热流情况，并取 $l_1/d=5\times10^{-3}$；$\lambda_{De}/l_1=5\times10^{-2}$.

从图中可以看出离子(电子)的密度、温度等物理量在很小的空间距离内发生了急剧变化. 并且波前中存在着电荷分离(虽然在上、下游中不存在电荷分离)，因而产生了自生电场和上、下游间的电势差(如图 6.6). 从图中可以看到，这个自生电场总是负的. 这是因为在激波形成的初始的阶段，离子向下游的运动速度要比电子快，这样产生的电荷分离造成了方向指向上游的负电场. 这个负电场反过来会阻碍离子继续向前运动，并推动电子向前运动. 在不考虑热导、黏性等耗散效应时，离子、电子在这种自生电场的作用下会产生等离子中常见的静电振荡或静电波. 然而，如果考虑到耗散，就会形成准静态的电荷分离和自生电场. 因此，负的电场对等离子体激波的形成起到了和各种耗散效应相同的积极作用. 如果激波波前中形成的自生电场是正的话，它将起着和耗散作用相反的结果，反而不利于激波的形成.

从图中还可以看出，激波波前中各物理量的剖面对上游离子马赫数 $(Ma)_1$ 十分敏感. 而且马赫数越大，波前的厚度就越小. 考

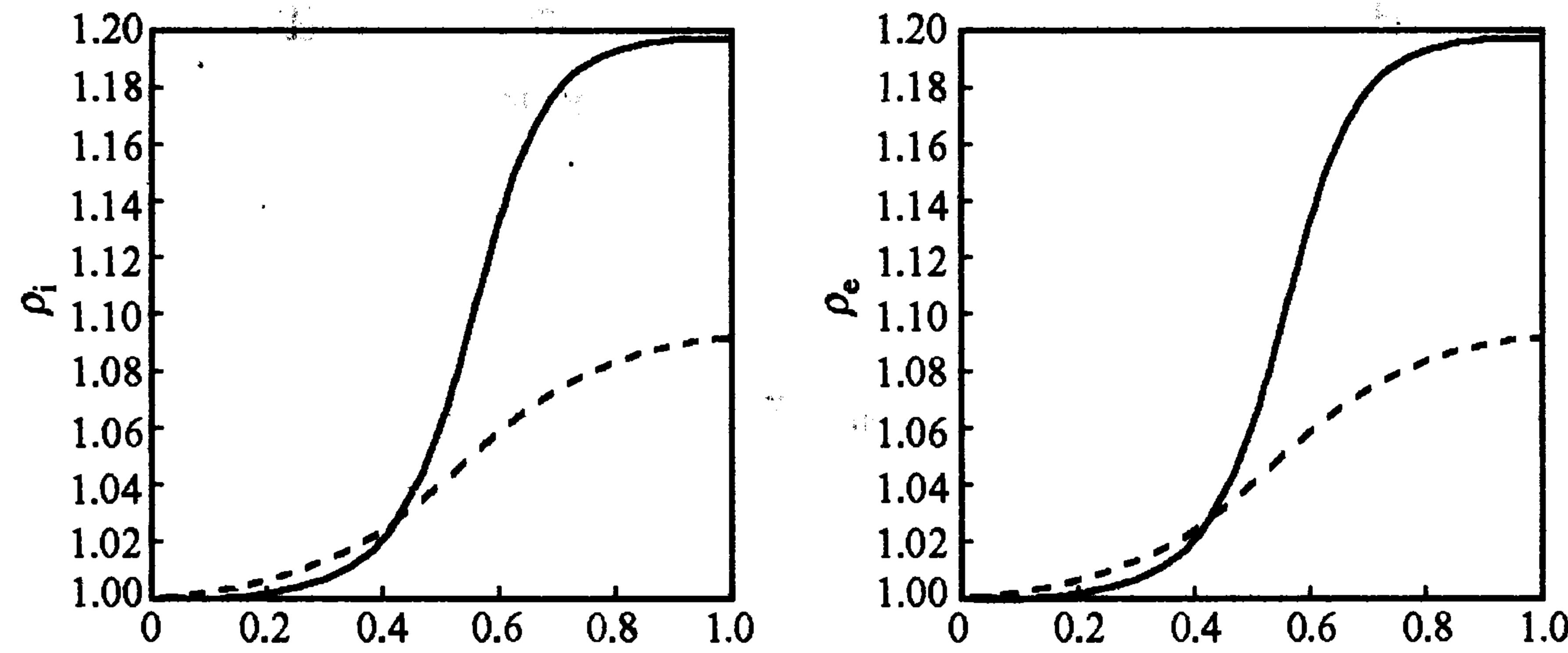


图 6.3 不同马赫数情况下,离子、电子相对密度空间分布剖面图（虚线$(Ma)_1=1.5$,实线$(Ma)_1=1.6$）

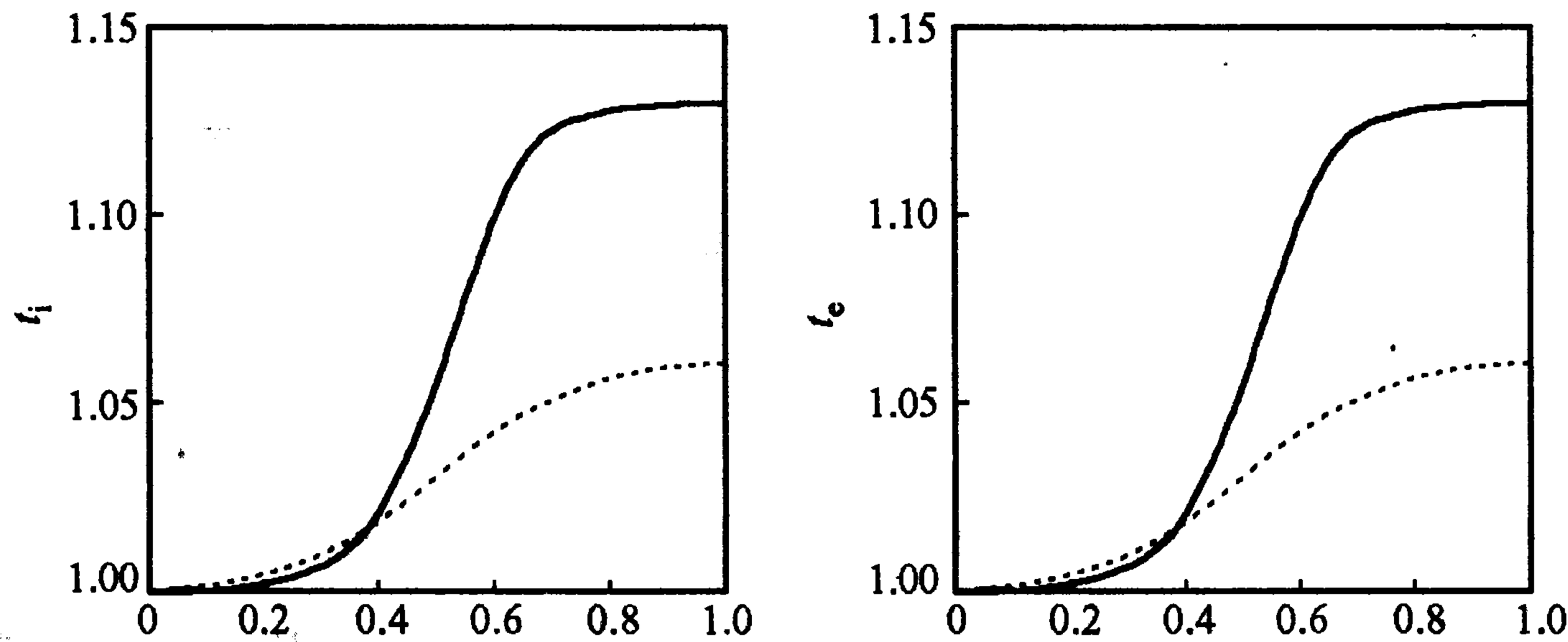


图 6.4 不同马赫数情况下,离子、电子相对温度空间分布剖面图（虚线$(Ma)_1=1.5$,实线$(Ma)_1=1.6$）

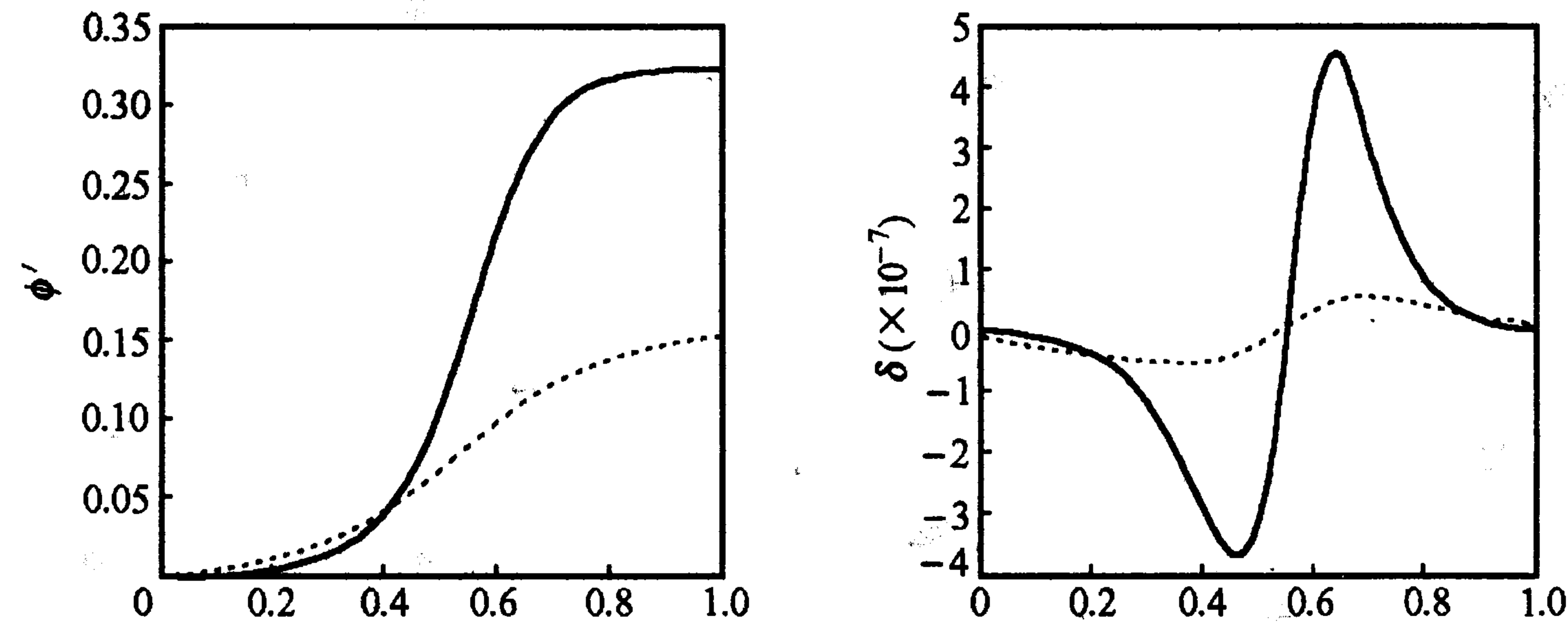


图 6.5 不同马赫数情况下,激波中电荷分离、电势的空间分布剖面图（虚线$(Ma)_1=1.5$,实线$(Ma)_1=1.6$）

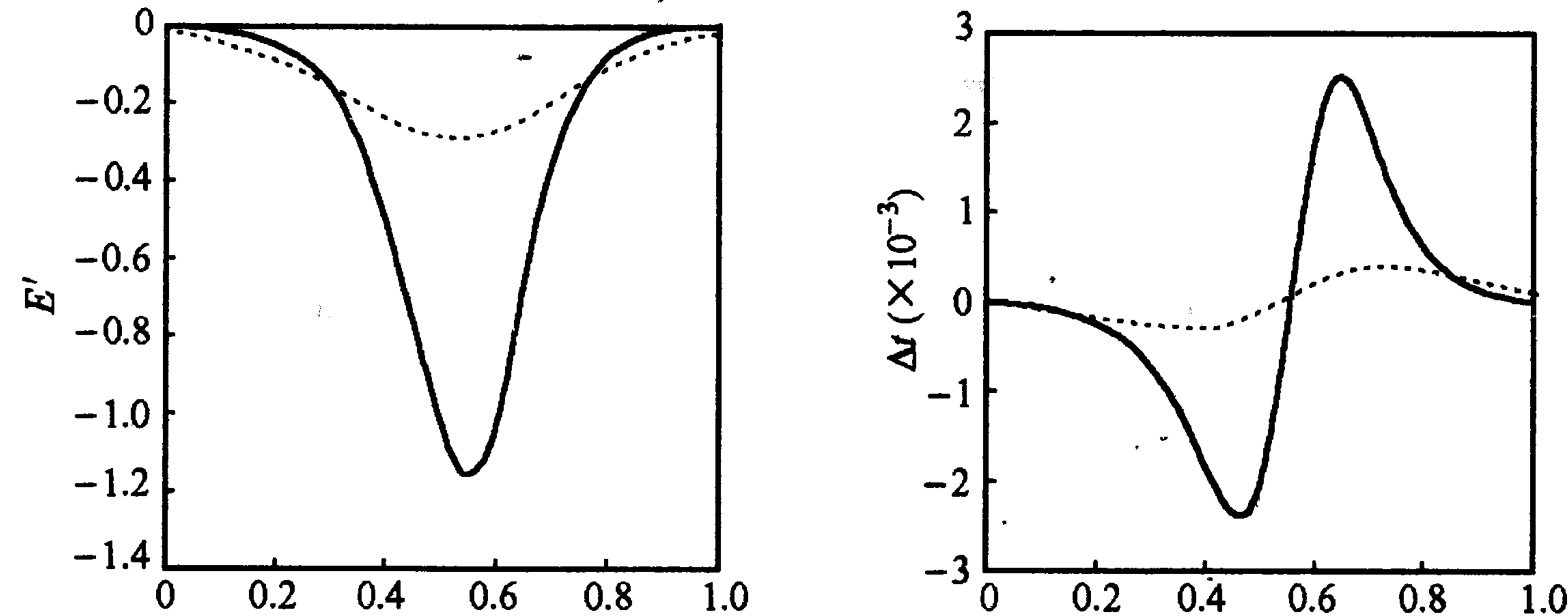


图 6.6 不同马赫数情况下,由电荷分离形成的电场、离子电子相对温差空间分布剖面图（虚线$(Ma)_1=1.5$,实线$(Ma)_1=1.6$）

虑到对于不太强的激波来说,离子与电子的密度和温度剖面差异很小(见图 6.3 和图 6.4),它们的空间分布图和中性激波几乎相同. 因此在这种情况下,激波的厚度 d 可以通过如下公式来估算:

$$d' = \frac{\rho_2 - 1}{(d\rho_i/d\xi)_{max}}. \tag{6.56}$$

这里的$(d\rho_i/d\xi)_{max}$是梯度 $d\rho_i/d\xi$ 的最大值. 例如,如果$(Ma)_1=1.5$, $d'\approx1000l_1$; $(Ma)_1=1.6$, $d'\approx52.8l_1$. 并且从这些结果,我们还可计算出激波中每一点的平均自由程和温度梯度的特征长度的比值 l_1/L_T. 对应于$(Ma)_1=1.5$ 和 1.6,这个比值的最大值分别是 6×10^{-4}和 2.5×10^{-3}. 由于这个值远小于 0.01,因此在上面的计算中只取经典热流模型(SH 模)是正确的.

6.4.4 电流对激波中的各物理量的空间分布的影响

(1) $l_1/d\leqslant0.01$ 的情况

这一般都发生在弱激波情况下,并且可以采用经典热流模型. 图 6.7—图 6.9 中显示了在各种激波电流 j_0 取值下,各物理量在

波前中的剖面图. 由于这时电子密度和温度剖面与离子的情况几乎相同,所以它们的剖面图没有给出.

从图 6.8 可以看出: 当电流为负时,电势差为正;电流取较大的正值(如 $j_0=0.02$)时,电势差为负. 这样,当电流取负值、或者取较大的正值时,$j_0\Delta\hat{\phi}$ 总是小于零. 而按临界马赫数的公式(6.55),$j_0\Delta\hat{\phi}$ 越电流总是会削弱激波或是对激波的形成起阻碍作用的. 当电流虽然为正但很小(如 $j_0=0.01$)时,会有 $\Delta\hat{\phi}>0$,因而有 $j_0\Delta\hat{\phi}>0$. 所以较小的正电流会对激波起增强作用. 这种趋势在其他的剖面图中都可以明显地看到.

(2) $l_1/d\geqslant 0.01$ 的情况

这种情况一般发生在中等或中等以上强度的激波中. 这时,在激波波前中靠近上下游的地方,温度的梯度相对较平坦,仍可用经典热流模型. 但在波前的中心,温度梯度一般较大,就应采用限制热流模型. 为了方便,采用了前面给出的热流公式

$$q_\alpha=\frac{q_\alpha^{\mathrm{SH}}q_\alpha^{\mathrm{FS}}}{q_\alpha^{\mathrm{SH}}+q_\alpha^{\mathrm{FS}}},$$

以及 $Ma=1.8$, $f=0.04$, $j_0=0$(点线), $j_0=0.1$(虚线), 和 $j_0=-0.1$(实线),进行了数值计算.

首先,从总体上看,虽然在图 6.10—图 6.12 中的电流要比上一段中的大了近一个数量级,但是各物理量的剖面形状随电流 j_0 的变化都不是很大. 这表明,当激波较强时,激波电流取值对激波的影响就会减弱. 当然,从这些图中依然可以看出: 负电流仍旧对激波起到了削弱作用.

通过数值计算,还可以讨论不同热流模型、不同的德拜长度与碰撞自由程的比值对非中性等离子体激波结构(波前)的影响. 这里就不给出了,有兴趣的读者可以参考文献[10].

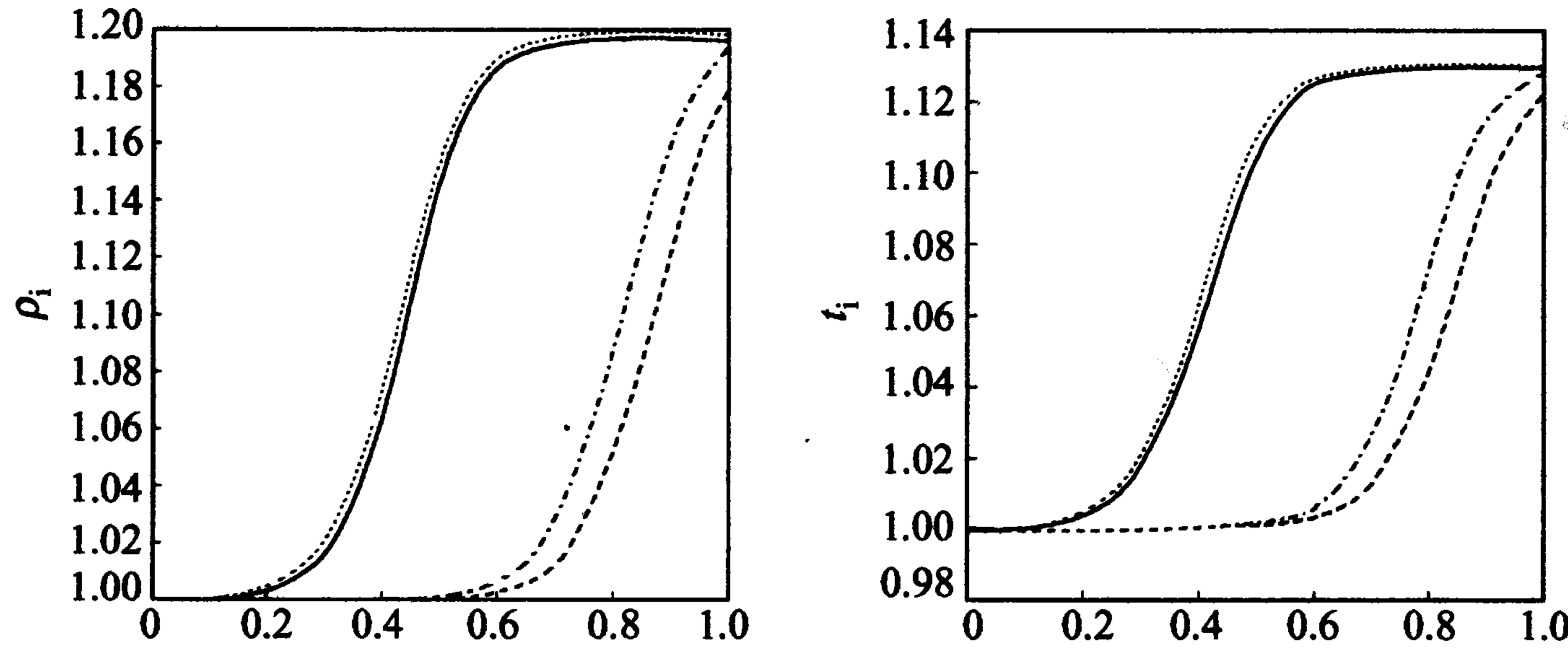


图 6.7 离子相对密度和温度的空间分布在有不同电流情况下剖面图 ($(Ma)_1=1.6$, $l_1/d=0.004$, $\lambda_{De}/l_1=0.05$, 点画线 $j_0=0.02$, 点线 $j_0=0.01$, 虚线 $j_0=-0.02$, 实线 $j_0=0$)

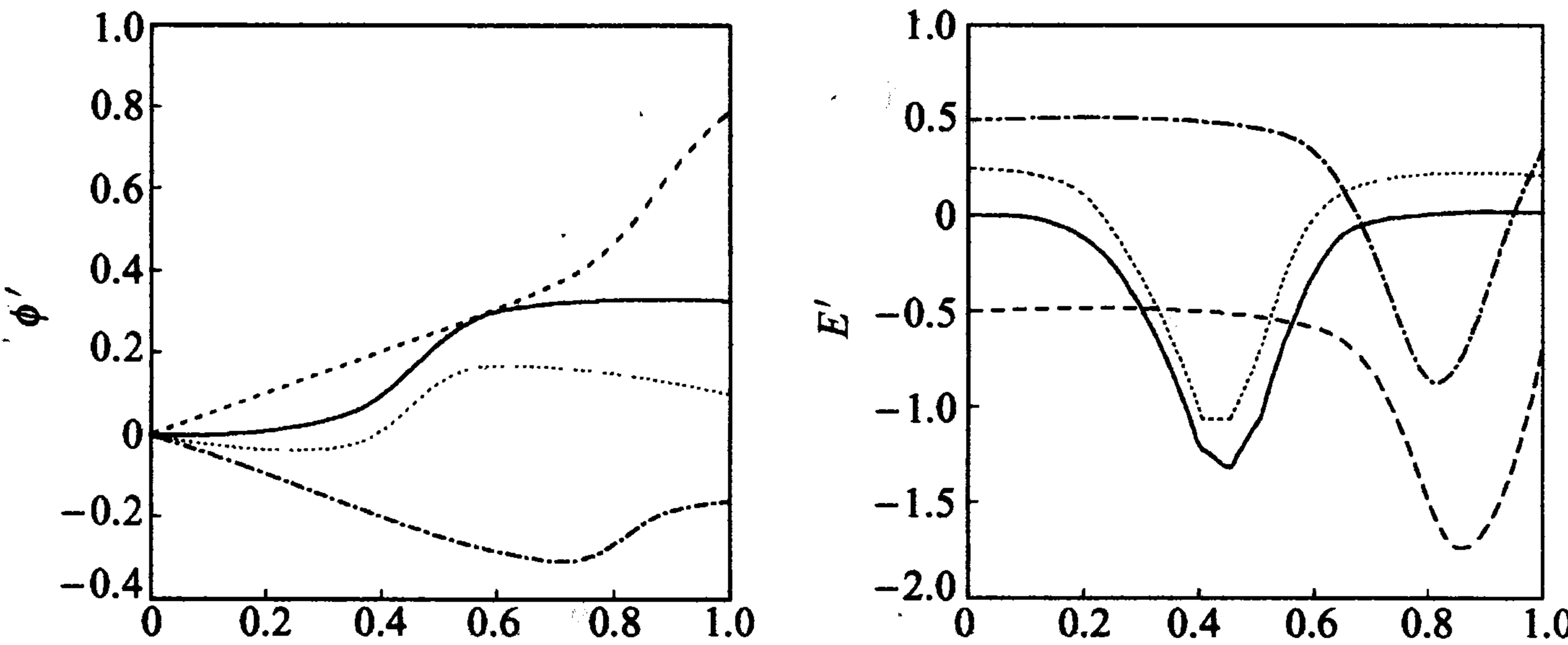


图 6.8 激波中电势和电场的空间分布在有不同电流情况下剖面图 ($(Ma)_1=1.6$, $l_1/d=0.004$, $\lambda_{De}/l_1=0.05$, 点画线 $j_0=0.02$, 点线 $j_0=0.01$, 虚线 $j_0=-0.02$, 实线 $j_0=0$)

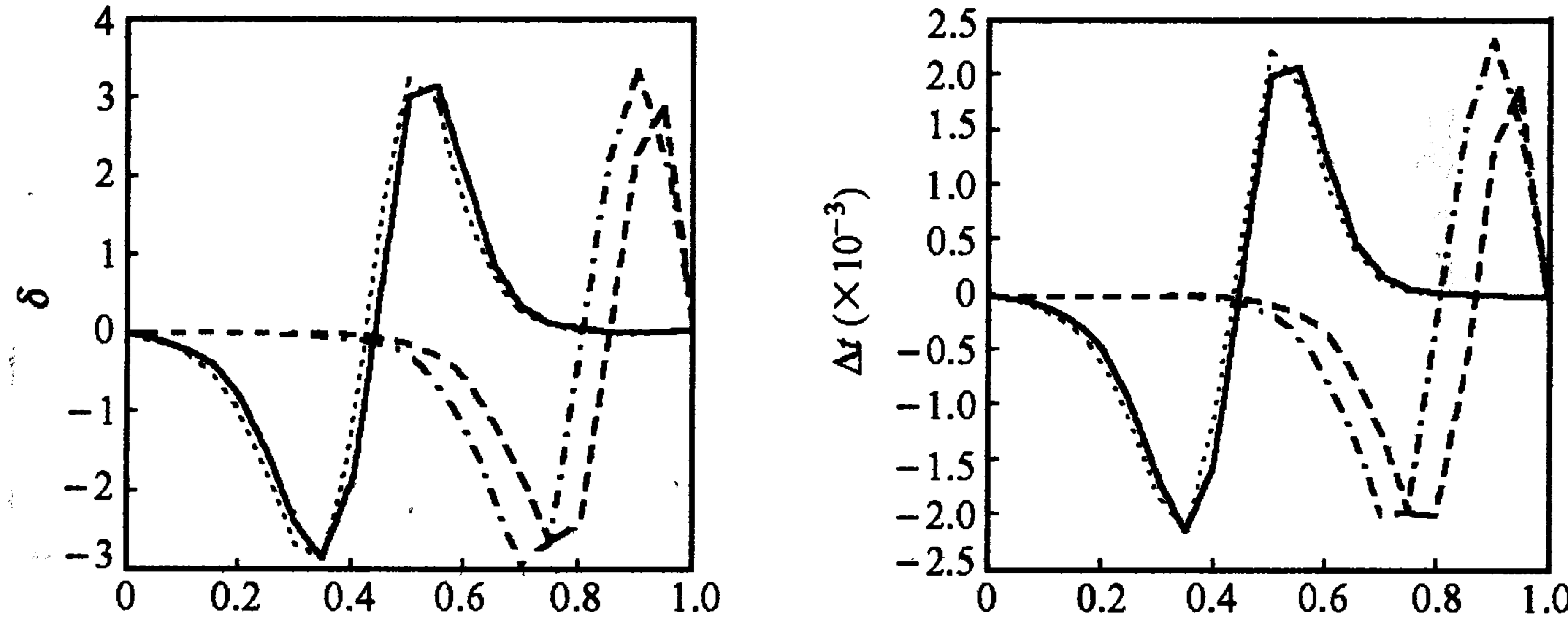


图 6.9 激波中电荷分离和离子电子的相对温差的空间分布在有不同电流情况下剖面图 ($(Ma)_1=1.6$, $l_1/d=0.004$, $\lambda_{De}/l_1=0.05$, 点画线 $j_0=0.02$, 点线 $j_0=0.01$, 虚线 $j_0=-0.02$, 实线 $j_0=0$)

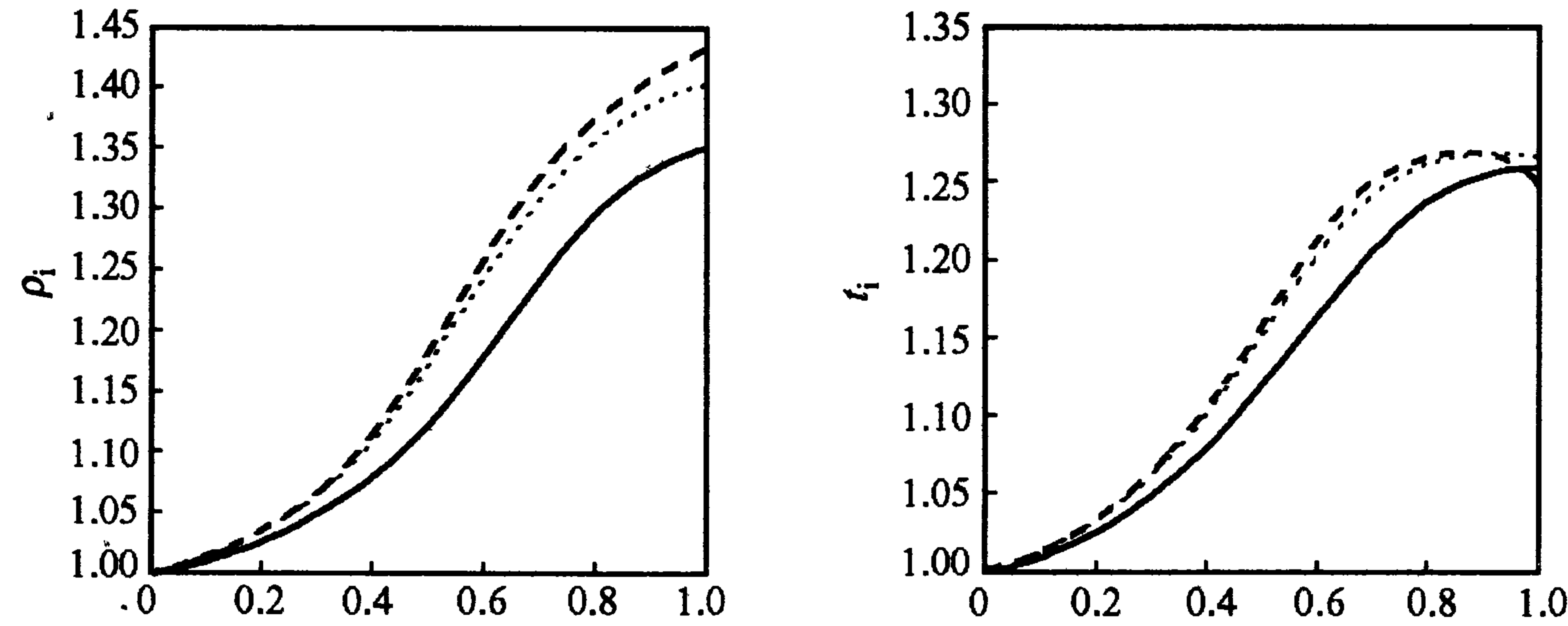


图 6.10 考虑限制热流的情况下,离子相对密度和温度空间分布在有不同电流情况下剖面图比较 ($Ma=1.8, f=0.04, \lambda_{De}/l_1=0.1$,点线 $j_0=0$,虚线 $j_0=0.1$,实线 $j_0=-0.1$)

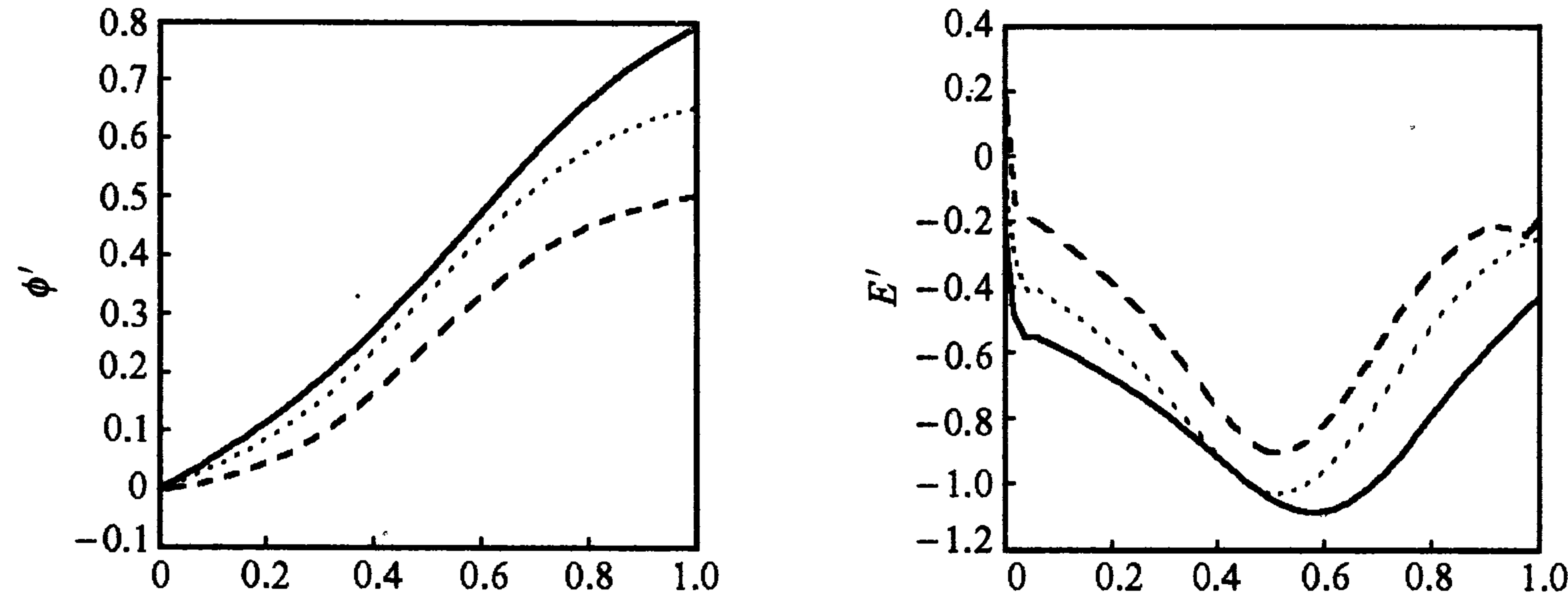


图 6.11 考虑限制热流的情况下,激波中电势和电场空间分布在有不同电流情况下剖面图($Ma=1.8, f=0.04, \lambda_{De}/l_1=0.1$,点线 $j_0=0$,虚线 $j_0=0.1$,实线 $j_0=-0.1$)

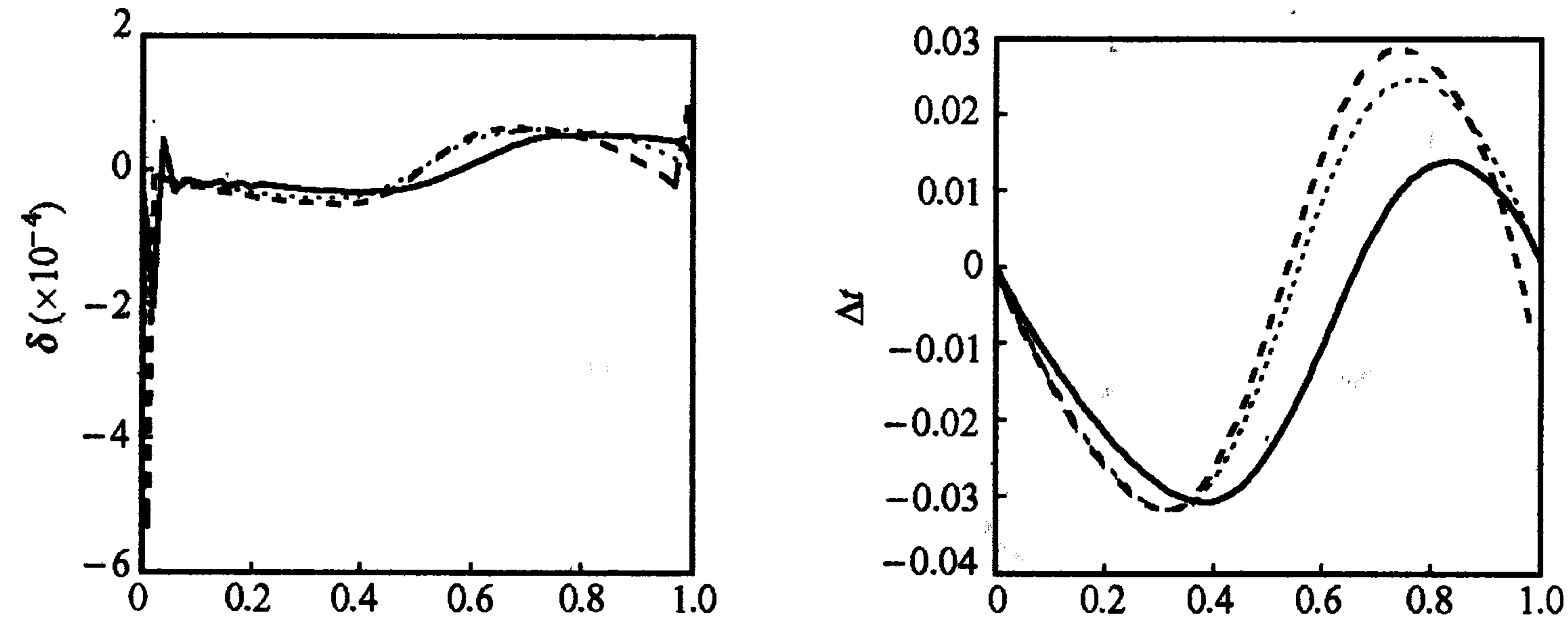


图 6.12 考虑限制热流的情况下,激波中电荷分离和离子电子相对温差的空间分布在有不同电流情况下剖面图($Ma=1.8, f=0.04, \lambda_{De}/l_1=0.1$,点线 $j_0=0$,虚线 $j_0=0.1$,实线 $j_0=-0.1$)

参考文献

[1] Landau, Lifshitz. Fluid Mechanics. Pergamon Press, 1987. Chapter IX

[2] Greenberg O W, Sen H K, Treve Y M. Phys. Fluids, **3**(1960)379

[3] Greenberg O W, Treve Y M. Phys. Fluids, **3**(1960)769

[4] Jaffrin M Y, Probstein R F. Phys. Fluids, **7**(1964)1658

[5] T. J. M. 博伊德,J. J. 桑德森. 等离子体动力学. 北京:科学出版社,1977. 第六章;

Boyd T J M, Sanderson J J. The Physics of Plasmas. Cambrigde University Press,北京:世界图书出版公司,2003. Chapter 5

[6] Li F, Havnes O. Physical Review E, **64**(2001)066407

[7] Xu Ning, Wang Long, Hu Xi Wei. Phys. Rev. Lett., **83**(1999)2441

[8] Braginskii S I. Trasport Processes in a Plasma, *in* Reviews of Plasma Physics, Vol. 1. Consultants Bureau, New York, 1965

[9] Key M H. Physics of Laser Plasma, *in* Handbook of Plasma Physics, Vol. 3. North-Holland, Amsterdam, 1991. 579

[10] Hu Ye Min, Hu Xi Wei. Physics of Plasmas, **10**(2003)2704

第七章　激光和等离子体的相互作用

激光入射到等离子体中后，它本身的电磁场会加速其中的电子和离子，而这些被驱动的带电粒子反过来又会影响激光的传播. 虽然离子和电子都会响应激光电磁场的驱动，但电子由于比离子轻得多，所以两者在激光场中的行为就大不相同；反过来它们对入射激光的影响也很不相同. 为了能反映电子和离子的不同行为，必须用等离子体的双流体描述或者动理学描述. 本章只讨论双流体的描述. 7.1 节将给出在双流体描述下，激光和等离子体相互作用所需的基本方程组.

激光与等离子体的相互作用，大致可以分成两部分：线性过程和非线性过程. 在线性过程中，入射激光能量比电子的能量（平均动能或库仑势能）小得多，这时主要是激光受被驱动电子所产生的感生电流的影响，从而改变了其传播行为；而反过来激光对电子流体的影响很小，一般不去讨论. 同时被激光电场驱动的离子，由于反应太慢，它们对激光传播的影响也可以忽略. 因此在线性相互作用中，只需将描述激光传播的波动方程与描述电子流体（在激光电场中）的运动方程相耦合就足够了. 这个耦合方程组可以描述激光在等离子体边界处的耦合和反射，进入等离子体后激光的折射、被吸收及反射过程. 在线性相互作用适用的范围内，等离子体对激光传播产生的影响也是有限的，因此激光还维持了其基本的特征. 在本章的 7.2 节中，将介绍这方面的一些基本过程.

非线性的激光-等离子体相互作用又可以分成非相对论的相互作用和相对论性的相互作用这两种有很大差异的部分. 一般认为当激光强度

$$I = c\frac{E_{\max}^2}{8\pi} > 10^{18}\ \mathrm{W/cm^2},\quad E_{\max} > 10^{10}\ \mathrm{V/cm}$$

时，被激光电场所加速的电子流体元的速度可以接近光速，这时激光磁场对电子流体的洛伦兹力和其电场所产生的库仑力可以相比，从而不能再被忽略. 由于理论描述必须是相对论协变的，这就加大了解析研究的难度. 但另一方面，由于相对论效应显现，所以也会有丰富的物理现象出现. 这些正是当今物理学研究的一个重要的前沿分支——强场物理学，但在本书中不打算讨论这方面的问题.

当激光强度在 $10^{12}\ \mathrm{W/cm} < I < 10^{18}\ \mathrm{W/cm}$ 时，激光-等离子体相互作用虽是非相对论性的，但仍是非线性的. 这时入射激光不但可以通过驱动处在非束缚态的电子和离子流体而激发丰富的等离子体波（如电子静电波，等离子体电磁波及离子声波）而且也会使处在束缚态的电子云（即未被完全剥离的离子周围的电子云）强烈地极化. 反过来，入射激光也会在非线性的感生电流及非线性的极化强度的影响下，发生强烈的变化. 其中最重要的可观测物理过程是一些所谓的"参量过程". 在 7.3 节中将介绍在"纯粹"等离子体（即由电子和完全剥离的离子组成的等离子体）中的参量过程，这时参加相互作用的是非束缚状态的电子和离子. 而在 7.4 节中将介绍在未完全剥离等离子体（即由电子和未完全剥离的离子组成的等离子体）中的参量过程，这时处在束缚态的电子也会加入到与激光的相互作用中来. 本章的主要参考书见文献[1].

7.1　基本方程组

7.1.1　波动方程组

所用麦克斯韦方程组（高斯制①）是

① 在激光-等离子体物理中，习惯使用高斯制.

$$\nabla\cdot\boldsymbol{D}=4\pi\rho_q,\quad \nabla\cdot\boldsymbol{B}=0,$$

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t},\quad \nabla\times\boldsymbol{B}=\frac{4\pi}{c}\boldsymbol{J}+\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t},$$

$$\boldsymbol{D}=\boldsymbol{E}+4\pi\boldsymbol{P},\quad \boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}(\boldsymbol{E}),$$

$$\rho_q=-en_e,\quad \boldsymbol{J}=-en_e\boldsymbol{u}_e.$$

由于激光的频率很高,所以在方程中只考虑了电子对电荷密度和电流密度的贡献.在等离子体中,由非束缚电子和离子在磁场中的逆磁运动而引起的磁化强度很小,所以一般将磁导率 μ 取作真空磁导率 μ_0(在高斯制中 $\mu_0=1$).因此在上面的方程组中仍用磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 来描述磁场.上面的方程组中并没有规定电极化强度 $\boldsymbol{P}$ 与电场的函数关系,在下面几节中将根据实际情况给出它的具体表达式.利用

$$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{E})=-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\boldsymbol{B})=-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{4\pi}{c}\boldsymbol{J}+\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}\right),$$

$$=-\frac{4\pi}{c^2}\frac{\partial\boldsymbol{J}}{\partial t}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}-\frac{4\pi}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{P}}{\partial t^2},$$

可以得到对于 $\boldsymbol{E}$ 的波动方程

$$\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}+c^2[\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{E})]=-4\pi\frac{\partial\boldsymbol{J}}{\partial t}-4\pi\frac{\partial^2\boldsymbol{P}}{\partial t^2}.\tag{7.1}$$

7.1.2 电子流体方程组

由于在本章讨论的激光-等离子体相互作用中,不考虑激光对等离子体的加热效应,故在下面取电子温度为常数.并令电子流体的热压强 $P_e=\gamma_e n_e T_e$(γ_e 是电子的绝热指数).这样,电子流体方程就由质量守恒和运动方程组成:

$$\frac{\partial n_e}{\partial t}+\nabla\cdot(n_e\boldsymbol{u}_e)=0,\tag{7.2}$$

$$\frac{\partial\boldsymbol{u}_e}{\partial t}+\boldsymbol{u}_e\cdot\nabla\boldsymbol{u}_e+\frac{e}{m_e}\boldsymbol{E}+\frac{e}{m_ec}\boldsymbol{u}_e\times\boldsymbol{B}+\frac{\gamma_eT_e}{m_en_e}\nabla n_e=0.\tag{7.3}$$

将其中的

$$\boldsymbol{u}_e\nabla\boldsymbol{u}_e=\frac{1}{2}\nabla(u_e^2)-\boldsymbol{u}_e\times(\nabla\times\boldsymbol{u}_e)$$

重新代入运动方程,得

$$\frac{\partial\boldsymbol{u}_e}{\partial t}+\frac{1}{2}\nabla(u_e^2)-\boldsymbol{u}_e\times(\nabla\times\boldsymbol{u}_e)+\frac{e}{m_e}\boldsymbol{E}+\frac{e}{m_ec}\boldsymbol{u}_e\times\boldsymbol{B}+\frac{\gamma_eT_e}{m_en_e}\nabla n_e=0.\tag{7.4}$$

再对方程两边同时作 $\nabla\times$ 后,得

$$\frac{\partial}{\partial t}\nabla\times\boldsymbol{u}_e-\nabla\times[\boldsymbol{u}_e\times(\nabla\times\boldsymbol{u}_e)]+\frac{e}{m_e}\nabla\times\boldsymbol{E}+\frac{e}{m_ec}\nabla\times(\boldsymbol{u}_e\times\boldsymbol{B})=0.$$

(7.4)式的梯度项在取旋度时为零.再利用 $\nabla\times\boldsymbol{E}=-(1/c)\partial\boldsymbol{B}/\partial t$,得

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla\times\boldsymbol{u}_e-\frac{e}{m_ec}\boldsymbol{B}\right)-\nabla\times\left[\boldsymbol{u}_e\times\left(\nabla\times\boldsymbol{u}_e-\frac{e}{m_ec}\boldsymbol{B}\right)\right]=0.$$

这个方程有一个特解

$$\nabla\times\boldsymbol{u}_e=\frac{e}{m_ec}\boldsymbol{B},\tag{7.5}$$

将它代入(7.4)式,可以得到无磁场项的电子运动方程

$$\frac{\partial\boldsymbol{u}_e}{\partial t}+\frac{1}{2}\nabla(u_e^2)+\frac{e}{m_e}\boldsymbol{E}+\frac{\gamma_eT_e}{m_en_e}\nabla n_e=0.\tag{7.6}$$

上式中的磁场(洛伦兹力)项并不是因为小而被略去的,它是和流体方程中流速非线性项中的一部分相互抵消而失去的.所以这比在最初的电子运动方程中,考虑到在非相对论情况下洛伦兹力比静电力小得多,而简单略去这项,要更严格、更简化.因为在消去磁场项的同时,也消去了一个流速的非线性项.

7.1.3 离子流体方程组

在不考虑激光对等离子体的加热效应时,离子的温度也可以

取成常数，这样离子的流体方程也只由质量守恒和动量守恒方程组成

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \nabla \cdot (n_i \boldsymbol{u}_i) = 0, \tag{7.7}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}_i}{\partial t} + \boldsymbol{u}_i \cdot \nabla \boldsymbol{u}_i - \frac{q}{m_i}\boldsymbol{E} - \frac{q}{m_i c}\boldsymbol{u}_i \times \boldsymbol{B} + \frac{\gamma_i T_i}{m_i n_i}\nabla n_i = 0. \tag{7.8}$$

这个方程组在形式上和电子流体的完全一样，只需将原来的电子下标 e 换成离子下标 i、电子电荷 $-e$ 换成离子电荷 $+q$. 因此也可以得到不含磁场和一个流速非线性项的离子运动方程

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}_i}{\partial t} + \frac{1}{2}\nabla(\boldsymbol{u}_i^2) - \frac{q}{m_i}\boldsymbol{E} + \frac{\gamma_i T_i}{m_i n_i}\nabla n_i = 0. \tag{7.9}$$

(7.6)和(7.9)式虽然在形式上相像，但在物理上有很大不同. 在两个方程中的电场项是由入射电磁波(激光)的电场和等离子体内本征的电磁波及静电波的电场组成的. 其中，只有静电波中的离子声波是低频的，其他电磁波及电子静电波都属于高频波. 电子对高频电场和低频电场都可以作出反应，但离子因为质量太大，来不及跟随电场高频地加速和减速，所以只能停留在原地不动. 因此在离子运动方程(7.9)中，起作用的电场只能是低频电场 $\boldsymbol{E}_a$——即在离子声波频率附近的电场. 这个电场可以用电子流体的状态量表示出来.

将电子运动方程(7.6)的电场项用 $\boldsymbol{E}_a$ 代入后，它描述的是电子在低频电场驱动下的运动行为(下式中的上标 L 表示这些电子状态量的低频成分)

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}_e^L}{\partial t} + \frac{1}{2}\nabla(\boldsymbol{u}_e^2)^L + \frac{e}{m_e}\boldsymbol{E}_a + \frac{\gamma_e T_e}{m_e n_e^L}\nabla n_e^L = 0,$$

这在物理上相当于电子在低频双极电场下的缓慢扩散运动. 在离子声的特征时间尺度(周期)中，电子的扩散(漂移)速度可以当成常数. 于是可以将上式左面的惯性项略去. 这样，低频电场就可从中求出

$$\boldsymbol{E}_a = -\frac{m}{2e}\nabla(\boldsymbol{u}_e^2)^L - \frac{\gamma_e T_e}{e n_e^L}\nabla n_e^L. \tag{7.10}$$

再将上式代入(7.9)式，得

$$\begin{aligned}\frac{\partial \boldsymbol{u}_i}{\partial t} &= -\frac{1}{2}\nabla(u_i^2) - \frac{Zm_e}{2m_i}\nabla(u_e^2)^L - \frac{Z\gamma_e T_e}{m_i n_e^L}\nabla n_e^L - \frac{\gamma_i T_i}{m_i n_i}\nabla n_i \\ &= -\frac{1}{2}\nabla\left[(u_i^2) + \frac{Zm_e}{m_i}(u_e^2)^L\right] - C_s^2\frac{1}{n_i}\nabla n_i,\end{aligned} \tag{7.11}$$

其中

$$C_s^2 = \frac{1}{m_i}\left(Z\gamma_e T_e \frac{n_i \nabla n_e^L}{n_e^L \nabla n_i} + \gamma_i T_i\right).$$

当电子流和离子流完全同步运动时，可以有

$$\frac{n_i \nabla n_e^L}{n_e^L \nabla n_i} \approx \frac{n_{i0}\nabla n_{e0}}{n_{e0}\nabla n_{i0}} = 1.$$

于是

$$C_s^2 = \frac{Z\gamma_e T_e + \gamma_i T_i}{m_i}, \tag{7.12}$$

就变成了通常在等离子体文献中常见的离子声波的波速定义式. (7.6)和(7.11)式将在讨论激光在等离子体中的参量过程时被用到.

7.1.4 极化强度与电场的函数关系

上面给出了波、非束缚电子和离子流体所满足的演化方程. 但有时，在激光和等离子体的相互作用中，还需要考虑束缚电子在各种电场中的极化效应. 这种极化效应通常是用极化强度 $\boldsymbol{P}$ 来表示的，它出现在激光和各种等离子体波的波动方程(7.1)中. 极化强度 $\boldsymbol{P}$ 对 $\boldsymbol{E}$ 的依赖关系，在 5.4 节中给出过，在本章中用的是(5.47)式

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{E}) = \chi^{(1)}\boldsymbol{E} + \chi^{(2)} \cdot \boldsymbol{EE} + \overset{\Rightarrow}{\chi}^{(3)} : \boldsymbol{EEE} + \cdots, \tag{7.13}$$

其中 $\chi^{(1)}, \chi^{(2)}, \overset{\Rightarrow}{\chi}^{(3)}$ 分别是线性，二阶和三阶的极化率(electric

susceptibility). 对于等离子体,目前无论从理论计算还是从实验测量都没有办法得到其线性和非线性极化率的具体值. 在本章中,我们将利用可查到的文献所给出的一些估算值(高斯制):[2][3]

$$\chi^{(1)}=4\times 10^{-24}n_a, \tag{7.14}$$

$$\chi^{(2)}\leqslant\frac{\chi^{(1)}}{E_a}\quad \text{cm/statvolt}, \tag{7.15}$$

$$\chi^{(3)}=10^{-38}n_a\quad \text{cm}^2/\text{statvolt}^2. \tag{7.16}$$

上述 $\chi^{(1)}$,$\chi^{(2)}$,$\chi^{(3)}$表达式中 n_a,E_a 分别取以 cm^{-3},statvolt/cm 为单位时的数值大小,其中 $\chi^{(1)}$在高斯制中为无量纲,statvolt 是静电伏特,而 $E_a=e/r_B^2$ 是氢原子玻尔半径处的库仑场强,$E_a=2\times10^7$ statvolt/cm$=5.9\times10^{11}$ V/cm. 它们在 SI 制中的单位及与高斯制下取值的换算请见文献[3]的附录.

在 7.2 节和 7.3 节中,我们所讨论的相互作用是在激光强度还不够强时的现象,故电场对等离子体的极化效应或者不存在(离子已完全离化情况),或者是可以忽略的(离子未完全剥离情况). 这时,我们所用的波动方程中将不含极化强度 $\boldsymbol{P}$.

7.2 激光在等离子体中的传播和吸收

7.2.1 基本方程组

在(7.1)式中令 $\boldsymbol{P}=0$;再考虑到激光是电磁波,属于横波,有 $\nabla\cdot\boldsymbol{E}=0$;则有

$$\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}-c^2\nabla^2\boldsymbol{E}=-4\pi\frac{\partial\boldsymbol{J}}{\partial t}, \tag{7.17}$$

其中

$$\boldsymbol{J}=-en_e\boldsymbol{u}_e$$

是激光电场所产生的扰动电流,因为激光的频率很高,能响应它的只有电子. 当不考虑激光对等离子体的影响(如密度的扰动)时,

$$\frac{\partial\boldsymbol{J}}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}(-en_e\boldsymbol{u}_e)\approx-en_e\frac{\partial\boldsymbol{u}_e}{\partial t}.$$

而速度随时间的变化,可以从电子流体的运动方程得出. 在(7.6)式中略去密度的梯度项和速度的平方项后,得

$$\frac{\partial\boldsymbol{u}_e}{\partial t}=-\frac{e}{m_e}\boldsymbol{E},\quad 及\quad \frac{\partial\boldsymbol{J}}{\partial t}=\frac{n_e e^2}{m_e}\boldsymbol{E}=\frac{\omega_{pe}^2}{4\pi}\boldsymbol{E}, \tag{7.18}$$

ω_{pe}是等离子体振荡频率. 将上面的方程和波动方程耦合,就可以描述激光在等离子体中的传播行为. 令

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})e^{-i\omega t},\quad \boldsymbol{J}(\boldsymbol{r},t)=\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r})e^{-i\omega t},$$

有

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r})=\frac{i\omega_{pe}^2}{4\pi\omega}\boldsymbol{E}\equiv\sigma(\omega)\boldsymbol{E}. \tag{7.19}$$

这就是(频率空间的)欧姆定律. 代入波动方程后,得到

$$\nabla^2\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})+\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon(\boldsymbol{r},\omega)\boldsymbol{E}=0, \tag{7.20}$$

其中

$$\varepsilon(\boldsymbol{r},\omega)\equiv1+i\frac{4\pi\sigma}{\omega}=1-\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}. \tag{7.21}$$

在等离子体文献中称 $\varepsilon(\boldsymbol{r},\omega)$为(等价)介电常数. 应该注意的是:它反映的是等离子体通过扰动电流对电磁波中电场的反影响,与普通电动力学中表示电场和电位移矢量间比例系数的介电常数(反映束缚电子的极化对电场的影响)在物理上并不一样. 但这种命名法在等离子体的波动理论中已经是惯例,我们在这里也沿用了这种命名法.

下面分别讨论等离子体电子密度均匀和非均匀时,以及激光正入射和斜入射时,激光在等离子体中的传播行为.

7.2.2 激光在均匀等离子体中的传播

令 $n_e(\boldsymbol{r})=n_0=$常数,于是 $\varepsilon(\boldsymbol{r},\omega)=\varepsilon(\omega)$和 $\omega_{pe}^2(\boldsymbol{r})=\omega_{pe}^2=(4\pi n_0e^2)/m_e$ 都是与 $\boldsymbol{r}$ 无关的常数. 这时可以取

$$E(r) = E_0 e^{ik\cdot r},$$

于是波动方程变成齐次代数方程

$$-k^2 E_0 + \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon E_0 = 0,$$

由上面方程有解的条件可得熟悉的等离子体中电磁波色散关系

$$\omega^2 = \frac{k^2c^2}{\varepsilon}, \quad \omega^2 = \omega_{pe}^2 + k^2c^2. \tag{7.22}$$

从这个色散关系中可以看出：只有当入射激光的频率高于截止频率(即等离子体电子振荡频率 ω_{pe})时，它才能在等离子体中传播．反过来，对每一个给定的电磁波频率 ω，都存在一个临界电子密度 n_c，这个电子密度对应的等离子体电子振荡频率正好等于电磁波的频率

$$\omega^2 = \frac{4\pi n_c e^2}{m_e}, \quad 或 \quad n_c = \frac{m_e\omega^2}{4\pi e^2}. \tag{7.23}$$

这时，这个特定频率的电磁波，可以在 $n_e<n_c$ 的等离子体中传播，但不能在 $n_e>n_c$ 的等离子体中传播(更详细的讨论可以参考一般等离子体物理原理的教科书)．还可以看出，电磁波在等离子体中的折返点($\omega=\omega_{pe}$或 $n_e=n_c$)相当于波动方程(7.20)中关于 E 的线性项的系数$\varepsilon=0$ 的解．

利用临界密度，可以把等价介电常数表示得更简洁：

$$\varepsilon = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \equiv 1 - \frac{n_e}{n_c}. \tag{7.24}$$

下面来讨论一下束缚态电子对激光传播的影响．如果在波动方程中取普通(线性)的极化强度表达式

$$P = \chi^{(1)}E,$$

则代替(7.17)，(7.20)，(7.22)式会得到新的波动方程和色散关系

$$(1+4\pi\chi^{(1)})\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} - c^2\nabla^2 E = -4\pi\frac{\partial J}{\partial t}, \tag{7.25}$$

$$\nabla^2 E(r) + \frac{\omega^2}{c^2}(1+4\pi\chi^{(1)})\varepsilon(r,\omega)E = 0, \tag{7.26}$$

$$\omega^2 = \frac{k^2c^2}{(1+4\pi\chi^{(1)})\varepsilon}, \quad 或 \quad \omega^2 = \omega_{pe}^2 + \frac{k^2c^2}{1+4\pi\chi^{(1)}}. \tag{7.27}$$

在光学中，光波在色散介质中的色散关系常常被表示成

$$\omega^2 = \frac{k^2c^2}{N^2}, \quad N^2 = \frac{k^2c^2}{\omega^2} = \frac{c^2}{v_{ph}^2},$$

其中 N 就是折射率，它代表光速与波的相速度(v_p)之比．在几何光学中，只要知道了介质的折射率，就完全知道了光在其中的传播行为．由于光学中已经有大量现成的公式可供使用，所以这种表达法有很大的方便之处．对等离子体，其折射率可以表示成

$$N^2 = (1+4\pi\chi^{(1)})\varepsilon \equiv N_0^2\left(1-\frac{n_e}{n_c}\right), \quad n_c = \frac{m_e\omega^2}{4\pi e^2}. \tag{7.28}$$

可见，等离子体的折射率由两个相乘的因子组成：一个是代表束缚电子云极化效应的普通介质的折射率 $N_0^2=(1+4\pi\chi^{(1)})$，另一个是代表非束缚电子(在光的电场作用下产生的)扰动电流影响的等价介电常数 ε．

下面来估算一下这两个因子的量值．取目前激光聚变中典型的等离子体密度 $n_e=10^{21}\ \mathrm{cm^{-3}}$，并假定所有的离子都是未完全剥离的，则按(7.14)式有

$$\chi^{(1)} = 4\times10^{-3}, \quad N_0^2 = 1+4\pi\chi^{(1)} = 1+0.05 = 1.05.$$

激光聚变中三种典型的入射激光频率(波长)与其对应的临界密度分别为

$$\omega_1 = 1.795\times10^{15} \quad (\lambda_1 = 1.05\mu m), \quad n_{c1} = 1.001\times10^{21},$$

$$\omega_2 = 3.557\times10^{15} \quad (\lambda_2 = 0.53\mu m), \quad n_{c2} = 3.969\times10^{21},$$

$$\omega_3 = 5.386\times10^{15} \quad (\lambda_3 = 0.35\mu m), \quad n_{c3} = 9.102\times10^{21}.$$

这样，由于非束缚电子引起的介电常数分别为

$$\varepsilon_1 = 1-0.999 = 0.0001, \quad \varepsilon_2 = 1-0.2520 = 0.7480,$$

$$\varepsilon_3 = 1-0.1099 = 0.8901.$$

由此可见,在等离子体中的非束缚电子对激光传播的影响,要比束缚电子大得多.所以在等离子体中,我们通常并不计入极化率对激光传播的影响.在下面,除非特别指出,否则我们都不考虑束缚电子云对激光-等离子体相互作用的影响,即取 $N_0=1$.

7.2.3 激光在非均匀等离子体中的传播

为了简单,在本节中先讨论激光正入射到等离子体中的情况.假定入射方向为 $\boldsymbol{k}=k\boldsymbol{e}_z$,而等离子体中的不均匀方向也在这个方向 $n_e(\boldsymbol{r})=n(z)$.设激光的电场为

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{E}(z) = \boldsymbol{E}(z)\boldsymbol{e}_x.$$

于是波动方程(7.20)可写成

$$\frac{\mathrm{d}^2E(z)}{\mathrm{d}z^2} + \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon(z,\omega)E(z) = 0. \tag{7.29}$$

这个方程的解依赖于 $\varepsilon(z)$ 的函数形式,迄今为止只对 9 种特殊形式的函数 $\varepsilon(z)$ 找到了这个方程的解析解,其中最有名的是线性函数和所谓的 Epstein 函数(请参考文献[4],[5]).下面就以线性的密度分布为例,来讨论激光在非均匀等离子体中的传播行为.令

$$n(z) = \frac{z}{L}n_c,$$

于是有

$$\varepsilon(z)=\left(1-\frac{z}{L}\right).$$

其中 L 是等离子体区的厚度,并已经用到了介电常数的表达式(7.24).波动方程可写成

$$\frac{\mathrm{d}^2E(z)}{\mathrm{d}z^2} + \frac{\omega^2}{c^2}\left(1-\frac{z}{L}\right)E(z) = 0.$$

这个方程可以化成标准的艾里(Airy)方程,令

$$\eta = \left(\frac{\omega^2}{c^2L}\right)^{1/3}(z-L),$$

$$z=0,\ \eta_0=-\left(\frac{\omega L}{c}\right)^{2/3},\quad z=L,\ \eta_L=0.$$

结果有

$$\frac{\mathrm{d}^2E(\eta)}{\mathrm{d}z^2} - \eta E(\eta) = 0. \tag{7.30}$$

它的通解是两个艾里函数(见图 7.1)的线性叠加

$$E(\eta) = C_1A_i(\eta) + C_2B_i(\eta).$$

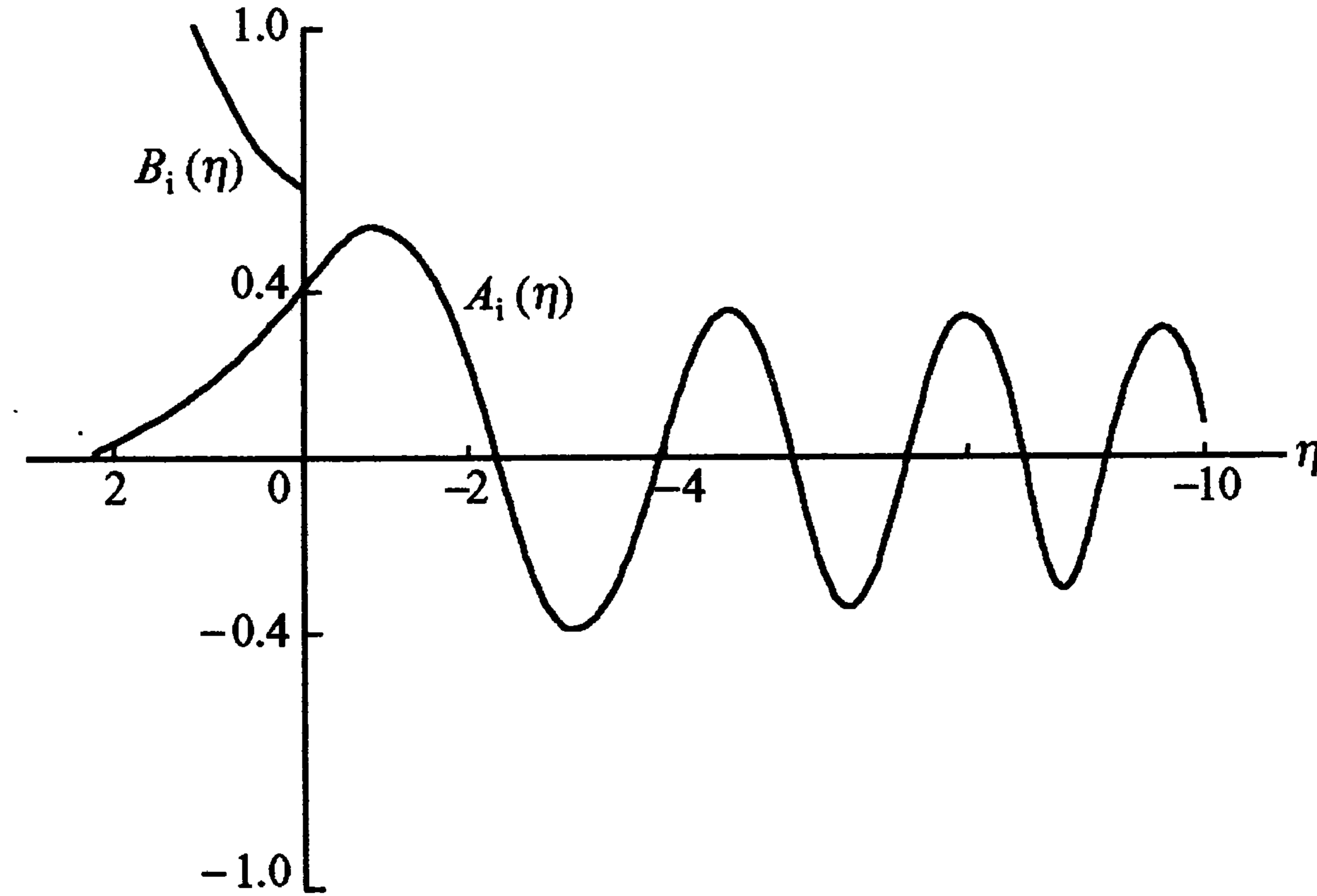


图 7.1 艾里函数 $A_i(\eta)$ 和 $B_i(\eta)$ 的图形

但从物理上来看,电磁波在 $n>n_c$ 的区域(即 $z>L$,或 $\eta>0$)中必须急剧衰减(阻尼),而 $B_i(\eta)$ 在 $\eta>0$ 的区域中却是急剧上升的,故可以根据这个物理图像将 $B_i(\eta)$ 略去(即取 $C_2=0$),结果有

$$E(\eta) = C_1A_i(\eta). \tag{7.31}$$

A_i 函数的图形现示的是一幅驻波的图形——即入射波和反射波相干后的波形.从图可以看出,如果等离子体层比激光波长厚得多 $(\omega L)/c \approx L/\lambda \gg 1$ 时,电磁波从右面边界 $z=0$ 也即 $\eta_0=-(\omega L/c)^{2/3}$ 处入射到等离子体中后会向左在等离子体层中传播许多个波长的距离,并且振幅不断增大.这是因为电磁波在向前(左)传播的同时,也会在密度逐渐增大的等离子体上反射.反射波和入射波相干涉后增大了幅度.然后波在在传到等离子体在左面的边界 $\eta_L=0(z=L)$ 之后,波幅急剧衰减.这是因为这里的密度已

经超过了临界值，因而电磁波无法继续向更高密度的等离子体区传播，而是被反射回去了(应该指出的是：由于目前的模型中没有计入任何吸收波的效应，所以波只能被反射，而不会被吸收掉). 由于电磁波在 $z>L(\eta>0)$ 处被完全反射，所以反射波引起的干涉峰中，最靠近左边界($\eta_L=0$)的那个其幅度最高. 这也是艾里函数的极大值

$$A_i(\eta_{max}) = (A_i)_{max} = 0.536, \quad \eta_{max} = -1.019.$$

有的文献利用 A_i 函数的渐近展开表达式，并从它在左面边界 $z=0$ 处的表达式中辨认出电场中的入射波成分，然后令这部分取真空中波场的幅值 $E(z=0)=E_0$，从而定出待定常数 C_1. 具体的做法如下：当 $|\eta|=(\omega L/c)^{2/3}\gg 1$ 时，有艾里函数 $A_i(\eta)$ 的渐近展开式

$$A_i(-|\eta|) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}\,|\eta|^{1/4}}\cos\left(\frac{2}{3}|\eta|^{3/2}-\frac{\pi}{4}\right),$$

而激光入射点 $z=0$，也即 $\eta_0=-(\omega L/c)^{2/3}$ 处的电场就可以用上式表示成

$$\begin{aligned}E(z=0) &= C_1A_i(-(\omega L/c)^{2/3})\\ &= \frac{C_1}{2\sqrt{\pi}(\omega L/c)^{1/6}}\left\{\exp\left[-i\left(\frac{2}{3}\frac{\omega L}{c}-\frac{\pi}{4}\right)\right]\right.\\ &\quad \left.+\exp\left[i\left(\frac{2}{3}\frac{\omega L}{c}-\frac{\pi}{4}\right)\right]\right\}\\ &= \frac{C_1}{2\sqrt{\pi}(\omega L/c)^{1/6}}\exp\left[-i\left(\frac{2}{3}\frac{\omega L}{c}-\frac{\pi}{4}\right)\right]\\ &\quad \times\left\{1+\exp\left[i2\left(\frac{2}{3}\frac{\omega L}{c}-\frac{\pi}{4}\right)\right]\right\}.\end{aligned}$$

考察上面推得的最后的表达式，可以合理地假定：方括号中的第一项可以看成是入射波，而第二项则可以当成是反射波. 因此可令

$$E_0 = \frac{C_1}{2\sqrt{\pi}(\omega L/c)^{1/6}}\exp\left\{-i\left(\frac{2}{3}\frac{\omega L}{c}-\frac{\pi}{4}\right)\right\},$$

由此定出解的待定常数

$$C_1 = 2\sqrt{\pi}\left(\frac{\omega L}{c}\right)^{1/6}E_0e^{i\phi}, \quad \phi = \frac{2}{3}\frac{\omega L}{c}-\frac{\pi}{4} = \frac{2}{3}|\eta_0|^{3/2}-\frac{\pi}{4}.$$

最后可得

$$E(\eta) = 2\sqrt{\pi}\left(\frac{\omega L}{c}\right)^{1/6}e^{i\phi}E_0A_i(\eta).$$

而电场的极大值为(在 $\eta_{max}=-1.019$ 处)

$$E_{max} = 2\sqrt{\pi}(A_i)_{max}\left(\frac{\omega L}{c}\right)^{1/6}e^{i\phi}E_0 = 1.9\left(\frac{\omega L}{c}\right)^{1/6}e^{i\phi}E_0.$$

由于 $(\omega L/c)\sim L/\lambda>1$，故总有 $E_{max}>2E_0$.

但是应该指出的是，这种将入射波和反射波拆分的方法只是一种特例，其实并不严格. 首先，上述分析要求 $L\gg\lambda$，当层厚只有几个波长时，就不适用了. 其次，即使 $L\gg\lambda$，将入射波和反射波拆分的方法并不是唯一的(例如参考文献[5]中的 25.8 节). 所以现在学术界的一般观点是：对一维几何的非均匀介质来说，原则上在任何空间点都无法将入射波和反射波的振幅唯一地区分开来，因而也就无法准确地定出待定常数 C_1. 这样(7.29)式类型的波动方程就只能给出电磁波在非均匀等离子体中传播的波形，而无法给出其准确的幅值.

7.2.4 激光在等离子体中的经典(碰撞)吸收

激光(或电磁波)在等离子体中最普适的吸收机制是电子的碰撞吸收. 这时，电子首先从激光电场中得到振动(抖动)动能，然后通过电子与离子(完全电离等离子体)或电子与离子及中性原子(未完全电离气体)间的弹性碰撞，把动能转化成等离子体中各种粒子的热能，从而不可逆地使激光失去了波动能量. 其他的吸收机制也必须依赖一些耗散机制(如波-波、波-粒子共振，湍流等)来不可逆地转移波能. 否则的话，带电粒子在波电场中得到的振荡动能，在波通过了这群粒子后，会原封不动地返回到波场之中. 因此，

在理论上往往把带电粒子在波场中的动能当作波能的一个组成部分,而不是粒子系能量的组成部分(例如参见:本书 8.2.2 节).

为了计入碰撞效应,只需在电子流体的运动方程(7.18)中加入由于碰撞而产生的摩擦力项

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}_e}{\partial t} = -\frac{e}{m_e}\boldsymbol{E} - \nu_e \boldsymbol{u}_e \tag{7.32}$$

就足够了,波动方程仍用(7.17)式.上式中的 ν_e 是电子总的弹性碰撞频率.在对时间变化作了傅里叶变换 $\boldsymbol{E}(t), \boldsymbol{u}_e(t) \propto \exp(-\mathrm{i}\omega t)$ 后,上式的解为

$$\boldsymbol{u}_e(\boldsymbol{r}) = -\mathrm{i}\frac{e\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})}{m_e(\omega + \mathrm{i}\nu_e)},$$

因此扰动电流可写成

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}) = -en_e\boldsymbol{u}_e(\boldsymbol{r}) = \sigma\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}), \quad \sigma = \frac{\mathrm{i}}{4\pi}\frac{\omega_{pe}^2}{\omega + \mathrm{i}\nu_e}.$$

其中的电导率已经是复数.这样激光在等离子体中的传播和吸收仍可用(7.20)式描述,只需将其中的电导率和等价介电常数的表达式改成

$$\varepsilon = 1 + \mathrm{i}\frac{4\pi\sigma}{\omega} = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega(\omega + \mathrm{i}\nu_e)}. \tag{7.33}$$

1. 空间均匀情况

类似 7.2.2 小节的讨论,在对空间函数作傅氏变换 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{E}_0\exp(-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})$ 后,可由波动方程得复数的色散关系

$$\omega^2 = \omega_{pe}^2\left(1 - \mathrm{i}\frac{\nu_e}{\omega}\right) + k^2c^2. \tag{7.34}$$

为了看出复数色散关系的物理意义,先假定波数(波矢)是实数,于是波频现在成为复数.令 $\omega = \omega_R - \mathrm{i}\nu/2$,于是电场的时间行为可表示成

$$\boldsymbol{E}(t) = \boldsymbol{E}_0 e^{-\mathrm{i}\omega_R t} e^{-\nu t/2}.$$

即电场在以频率 ω_R 作简谐振荡的同时还随时间以 $\exp(-\nu t/2)$

作指数衰减.由色散关系可得

$$\omega_R^2 = \omega_{pe}^2 + k^2c^2, \quad \nu = \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_R^2}\nu_e, \tag{7.35}$$

其中已经假定了 $\nu/\omega_R \ll 1$,也即 $\nu_e/\omega \ll 1$.可以看到,振荡频率与无碰撞吸收时完全一样,而阻尼速率则正比于碰撞频率.阻尼速率 ν 在物理上相当于电磁波能量的衰减速率,因为波能正比于电场强度的平方,因而其随时间下降行为是

$$\varepsilon^w(t) = \frac{E^2(t)}{8\pi} = \frac{E_0^2}{8\pi}e^{-\nu t} = \varepsilon^w(0)e^{-\nu t}.$$

类似上面对电的讨论,也可以讨论电场的空间变化行为.现在假定频率是实数,但令 $k = k_R + \mathrm{i}\kappa/2$,这时电场的空间行为可表示成

$$\boldsymbol{E}(x) = \boldsymbol{E}_0 e^{\mathrm{i}k_R x} e^{-\kappa x/2}.$$

这表示:电场在空间以波数 k_R 作周期变化的同时,还随空间以 $\exp(-\kappa x/2)$ 作指数衰减.由色散关系可得

$$k_R^2 = \frac{1}{c^2}(\omega^2 - \omega_{pe}^2), \quad \kappa = \frac{1}{k_R}\frac{\omega_{pe}^2}{c^2}\frac{\nu_e}{\omega}, \tag{7.36}$$

其中也用到了 $\kappa/k_R \ll 1$.当然原则上频率和波数可以同时都为复数,但碰撞引起的波幅在时、空中的衰减的结论是不变的.电磁波场幅度的衰减说明波能已经因碰撞而被转化和吸收了.

应该注意的是,上述讨论在电子碰撞频率远小于电磁波频率的假定下才是正确的.这时电磁波因碰撞吸收而导致的阻尼过程其特征时间比波的周期长,其特征长度比波长要长(即要经历许多周期或波长,波幅才有明显的下降).如果电子碰撞频率接近电磁波频率 $\nu_e \sim \omega$,这时波幅将在波的一个周期内显著下降,因而对时间函数的傅里叶变换不再正确.这时应该考虑波动方程(7.17)与电子流体方程(7.32)的全波解.不过在本书中,只讨论傅氏变换仍适用的情况.

2. 空间非均匀、正入射情况

类似 7.2.3 节的讨论,这时波动方程(7.29)仍适用,只是介电

常数要改成复数形式：

$$\varepsilon(z,\omega) = 1 - \frac{\omega_{pe}^2(z)}{\omega(\omega + i\nu_e)}. \tag{7.37}$$

当密度分布是厚度的线性增长函数，$n_e = (z/L)n_c$，上式变成

$$\varepsilon(z,\omega) = 1 - \frac{z}{L(1 + i\nu_e^c/\omega)},$$

其中 ν_e^c 是在临界密度处的电子碰撞频率. 这时可以将波动方程(7.29)写成上节中的艾里方程，因而有其解析解

$$E(\eta) = C_1 A_i(\eta), \quad \eta = \left[\frac{\omega^2}{c^2 L(1 + i\nu_e^c/\omega)}\right]^{1/3}\left[z - L\left(1 + i\frac{\nu_e^c}{\omega}\right)\right]. \tag{7.38}$$

应该注意的是，上式中的 η，现在已经是复变量了，其虚部和碰撞频率有关. 当无碰撞时，它就回到 7.2.3 小节的 η 表达式. 通过和 7.2.3 小节相同的定解程序，可得

$$E(\eta) = 2\sqrt{\pi}\left[\frac{\omega L}{c}\left(1 + i\frac{\nu_e^c}{\omega}\right)\right]^{1/6} e^{i\phi} E_0 A_i(\eta), \tag{7.39}$$

其中波场的相角也为复数

$$\phi = \frac{2}{3}\left[\frac{\omega L}{c}\left(1 + i\frac{\nu_e^c}{\omega}\right)\right] - \frac{\pi}{4}, \tag{7.40}$$

$$\phi_r = \frac{2}{3}\frac{\omega L}{c} - \frac{\pi}{2}, \quad \phi_i = \frac{2}{3}\frac{L}{c}\nu_e^c. \tag{7.41}$$

其中的实部(ϕ_r)就是 7.2.3 小节中给出的相角，而虚部(ϕ_i)则与碰撞频率有关. 这些在变量和相角中的虚部造成了波幅的衰减，也即电磁波的被吸收. 为了简单，我们来看在激光入射处($z=0, \eta_0 = [(\omega L/c)(1+i\nu_e^c/\omega)]^{2/3}$)的波场：

$$E(z=0) = E_0 + E_0 e^{i2\phi_r} e^{-2\phi_i} = E_{in} + E_{re},$$

其中第一项 E_{in} 可以看成向左($z>0$)传播的入射波，而第二项 E_{re} 可以当成是激光在等离子体中被吸收并反射出去时在入射点处向右($z<0$)传播的反射波. 由电场能量的定义 $\varepsilon^w = E^2/(8\pi)$ 可以求

出在这点的激光能量吸收率，也即激光总的吸收率

$$f_A = \frac{\varepsilon_{in}^w - \varepsilon_{re}^w}{\varepsilon_{in}^w} = \frac{\varepsilon_{ab}^w}{\varepsilon_{in}^w} = 1 - \exp\left(-\frac{8}{3}\frac{L}{c}\nu_e^c\right), \tag{7.42}$$

其中 ε_{ab}^w 是被等离子体吸收的波能. 因此吸收率与碰撞频率有关，碰撞频率愈大，吸收率就愈高.

7.2.5　在非均匀等离子体中斜入射的 S 波和 P 波的传播和吸收

如图 7.2 所示，等离子体在 $0 \leqslant z \leqslant L$ 区域，并在 z 方向上不均匀. 设电子密度为 $n_e(z) = n_0 F(z)$，n_0 为固体的密度(大大超过入射激光所对应的等离子体临界密度)，$F(0)=1, F(L)=0$. $z<0$ 的区域是固体，而 $z>L$ 的区域是真空. 设(y,z)平面为入射平面，即由激光入射方向 $\boldsymbol{k}$ 与入射表面法线方向 $\boldsymbol{e}_z$ 所构造的平面.

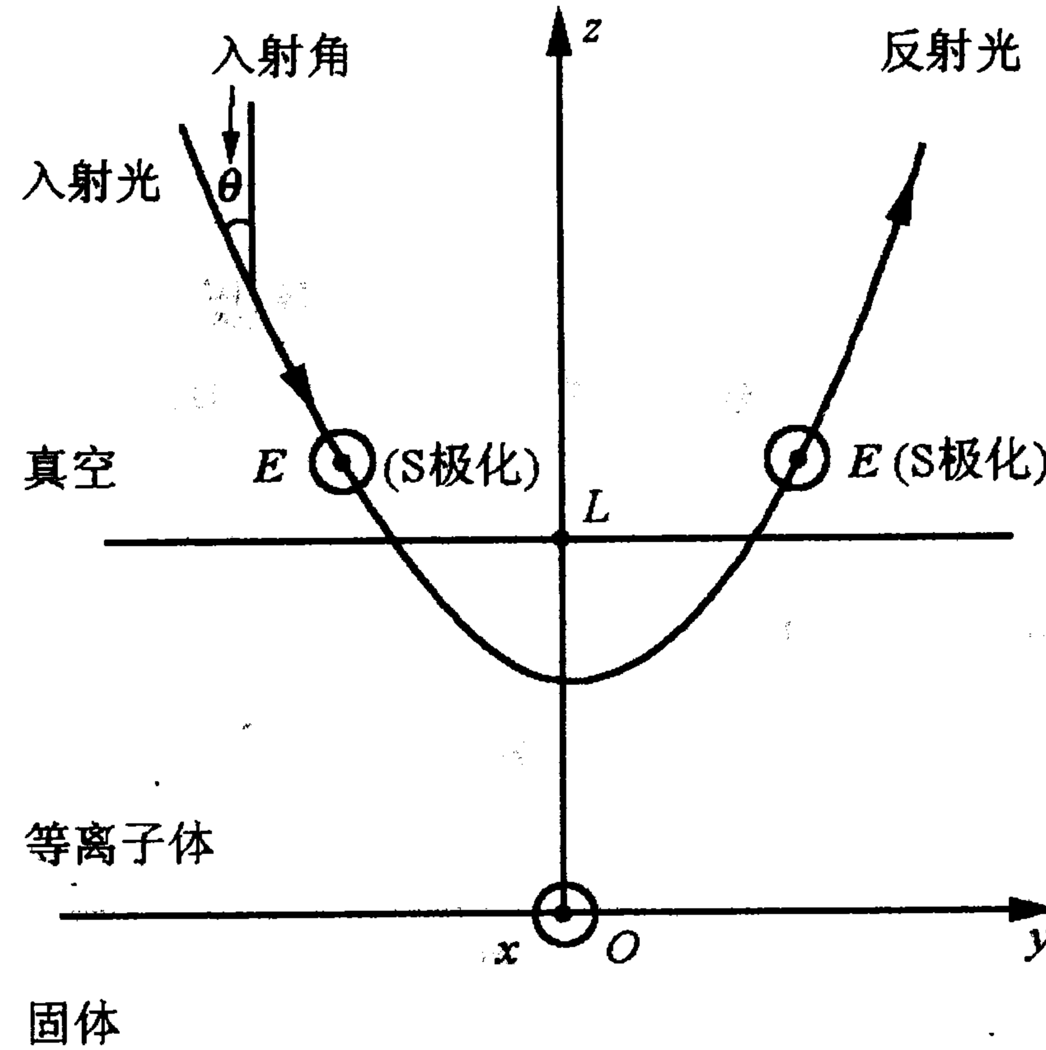


图 7.2　激光斜入射非均匀等离子体

当激光斜入射时，其电场的极化方向会对激光在等离子体中的传播和相互作用(如吸收)有很大影响. 电场方向与入射平面(y,z)垂直的入射波被称为 S 波，电场方向在入射平面(y,z)内的入射波被称为 P 波. S 波在传播和反射过程中，电场 $\boldsymbol{E} = E\boldsymbol{e}_x$ 的极化方向 $\boldsymbol{e}_x$ 始终不变，因此用关于电场 E 的一维波动方程就可以描述；P 波在传播和反射过程中，其电场的方向不断在变，因此必须用二维电场 $\boldsymbol{E} = E_y\boldsymbol{e}_y + E_z\boldsymbol{e}_z$ 的波动方程描述. 但在 P 波中，激光的磁场方向 $\boldsymbol{B} = B\boldsymbol{e}_x$ 垂直于入射平面，它在传播过程中方向不会

改变,因此关于 $\boldsymbol{B}$ 的波动方程只需要是一维的. 下面先讨论 S 波的斜入射,再讨论 P 波的斜入射.

1. S 波情况

从波动方程(7.20)

$$\nabla^2 \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) + \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon(\boldsymbol{r},\omega)\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = 0$$

出发,在图 7.2 的几何中 S 波的电场可表示成

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = E_x(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_y y}\boldsymbol{e}_x, \quad k_y = k\sin\theta.$$

于是波动方程可写成一维形式

$$\frac{\mathrm{d}^2 E_x(z)}{\mathrm{d}z^2} + \frac{\omega^2}{c^2}(\varepsilon(z,\omega) - \sin^2\theta)E_x(z) = 0, \qquad (7.43)$$

其中的介电常数就是(7.33)式给出的复函数. 引入新的复函数 $\xi = \xi_r + \mathrm{i}\xi_i$,可把介电常数重新写成

$$\varepsilon = N^2 = 1 - \frac{\omega_{pe}^2(z)}{\omega^2(1+\mathrm{i}\nu_e/\omega)} \equiv 1 - \xi(z,\omega),$$

$$\xi_r = \frac{\omega_{pe}^2(z)}{\omega^2(1+\nu_e^2/\omega^2)}, \quad \xi_i = -\frac{\nu_e}{\omega}\xi_r. \qquad (7.44)$$

按 7.2.2 小节中对于电磁波折返点的讨论:折返发生在波动方程线性项的系数等于零之处,该处用 z_{ref} 表示,则

$$\varepsilon(z_{ref},\omega) - \sin^2\theta = \cos^2\theta - \xi(z_{ref}) = 0. \qquad (7.45)$$

由上式的实部 $\xi_r = \cos^2\theta$,可得折返点处的密度 n_e^{ref}

$$\omega_{pe}^2(z_{ref}) = \omega^2(1+\nu_e^2/\omega^2)\cos^2\theta,$$

$$\frac{4\pi n_e(z_{ref})e^2}{m_e} = \frac{4\pi n_c e^2}{m_e}(1+\nu_e^2/\omega^2)\cos^2\theta,$$

$$n_e^{ref} = n_c(1+\nu_e^2/\omega^2)\cos^2\theta. \qquad (7.46)$$

由于在本书中只讨论 $\nu_e/\omega \ll 1$ 的情况,故上式表明:在斜入射情况下,折返总是发生在电子密度小于临界密度之处. 当正入射时,$\theta = 0$,上式就回到了正入射时的折返点密度 $n_e^{ref} = n_c$.

下面来给出一种数值求解波动方程(7.43)以及入射波的反射

率、吸收率的方法.

(i) 在 $z < z_{ref}$ 处,这时光波是纯阻尼的,可以把电场的行为写成:

$$E_x(z) \propto \mathrm{e}^{-\beta k_z |z|}, \quad k_z > 0, \quad \beta = \beta_r + \mathrm{i}\beta_i. \qquad (7.47)$$

将上式代入波动方程(7.43),得

$$\beta^2 k_z^2 + k_z^2[\varepsilon(z,\omega) - \sin^2\theta] = 0,$$

也即

$$\beta^2 = -[\cos^2\theta - \xi].$$

按前面的讨论,在折返点 $z = z_{ref}$ 处,有 $\xi = \cos^2\theta$,故有 $\beta \equiv 0$. 在 $z < z_{ref}$ 的区域中,上式的解为

$$\beta_r = \frac{1}{\sqrt{2}}\{-(\cos^2\theta - \xi_r) + [(\cos^2\theta - \xi_r)^2 + \xi_i^2]^{1/2}\}^{1/2}, \qquad (7.48)$$

$$\beta_i = \frac{1}{\sqrt{2}}\{(\cos^2\theta - \xi_r) + [(\cos^2\theta - \xi_r)^2 + \xi_i^2]^{1/2}\}^{1/2}. \qquad (7.49)$$

为了使电场是阻尼的,要求 $\beta_r > 0$,这就要求上式中 $\xi_r > \cos^2\theta$.

(ii) 在 $z_{ref} \leqslant z < L$ 处,电场行为满足波动方程(7.43),这是一个常微分方程. 为了求出在任意电子密度分布 $n_e(z)$ 下的方程解,可以用在 $z = z_{ref}^-$ 处的形如(7.47)式的表达式作为初条件,通过数值方法(例如龙格-库塔(Runge-Kutta)法)得出这个区域的电场 $E_x(z)$.

(iii) 在 $z = L$ 处,将上面区域的数值解与真空中计入了入射波与反射波的电磁波解衔接,

$$E_{vac}(L) = E_0\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_z(L)L} + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_z(L)L}\right). \qquad (7.50)$$

由于 $k_z(L) = -k\cos\theta$ 是已知的,故从边界连接条件可以定出 $r\exp(\mathrm{i}\phi)$ 的值. 然后可以计算出(在 L 这一点的)电磁波在非均匀等离子体层中的反射率 R 和吸收率 T

$$R = |r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}|^2 = r^2, \quad T = 1 - R. \qquad (7.51)$$

2. P 波情况

先推导电磁波中磁场所满足的波动方程. 由麦克斯韦方程

$$\begin{aligned}\nabla\times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t) &= \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r},t)+\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}\\ &= \frac{4\pi\sigma}{c}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)-\mathrm{i}\frac{\omega}{c}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\\ &= -\mathrm{i}\frac{\omega}{c}\varepsilon(\boldsymbol{r},\omega)\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t).\end{aligned}$$

其中已经用到了关于时间函数的傅氏变换,而 $\varepsilon=1+\mathrm{i}(4\pi\sigma)/\omega$ 就是(7.33)式给出的复介电常数. 于是有

$$\nabla\times(\nabla\times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t))=-\mathrm{i}\frac{\omega}{c}\nabla\times(\varepsilon(\boldsymbol{r},\omega)\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)),$$

$$\begin{aligned}\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{B})-\nabla^2\boldsymbol{B} &= -\mathrm{i}\frac{\omega}{c}[\varepsilon\nabla\times\boldsymbol{E}+(\nabla\varepsilon)\times\boldsymbol{E}]\\ &= -\mathrm{i}\frac{\omega}{c}\varepsilon\left(\mathrm{i}\frac{\omega}{c}\boldsymbol{B}\right)+(\nabla\varepsilon)\times\left(\frac{1}{\varepsilon}(\nabla\times\boldsymbol{B})\right).\end{aligned}$$

考虑到 $\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$,故最后有关于磁场的波动方程

$$\nabla^2\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},\omega)+\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon(\boldsymbol{r},\omega)\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},\omega)+\frac{1}{\varepsilon}(\nabla\varepsilon(\boldsymbol{r},\omega))\times(\nabla\times\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},\omega))=0. \tag{7.52}$$

按图 7.2 的几何,令

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})=B_x(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_y y},\quad k_y=k\sin\theta.$$

则有

$$\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}z}=\mathrm{i}\frac{4\pi}{\omega}\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}z},$$

及

$$\frac{\mathrm{d}^2B_x(z)}{\mathrm{d}z^2}+k^2[\varepsilon(z)-\sin^2\theta]B_x(z)-\mathrm{i}\frac{4\pi}{\varepsilon ck}\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}z}\frac{\mathrm{d}B_x(z)}{\mathrm{d}z}=0.$$

再令

$$B_x(z)=B(z)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi(z)}, \tag{7.53}$$

其中 $B(z)$ 是磁场的幅度,也是 z 的慢变函数;而相角部分则是 z 的快变函数. 将上式代入波动方程,分出实部、虚部,最后得关于

$B(z)$ 和 $u(z)=\mathrm{d}\phi(z)/\mathrm{d}z$ 的两个联立方程

$$\frac{\mathrm{d}^2B}{\mathrm{d}z^2}-u^2B+k^2(\cos^2\theta-\xi_\mathrm{r})B-\frac{F\dfrac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}z}+GBu}{(1-\xi_\mathrm{r})^2+\xi_\mathrm{i}^2}=0, \tag{7.54}$$

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z}+\frac{2u}{B}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}z}+k^2\xi_\mathrm{i}+\frac{F\dfrac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}z}-FBu}{(1-\xi_\mathrm{r})^2+\xi_\mathrm{i}^2}=0, \tag{7.55}$$

其中 ξ_r,ξ_i 的定义见(7.44)式,而

$$F=F(z)=\xi_\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}\xi_\mathrm{i}}{\mathrm{d}z}-(1-\xi_\mathrm{r})\frac{\mathrm{d}\xi_\mathrm{r}}{\mathrm{d}z}, \tag{7.56}$$

$$G=G(z)=-\xi_\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}\xi_\mathrm{r}}{\mathrm{d}z}-(1-\xi_\mathrm{r})\frac{\mathrm{d}\xi_\mathrm{i}}{\mathrm{d}z}, \tag{7.57}$$

则是一些依赖于电子密度分布 $n_\mathrm{e}(z)$ 的函数. 当给定 $n_\mathrm{e}(z)$ 的具体形式后,就可以通过类似上面 S 波求解的程序来得到磁场 $B_x(z)$ 的数值解,及 P 波在非均匀等离子体层中的反射率和吸收率. 例如,在文献[6]中就给出了

$$n_\mathrm{e}(z)=\left(1-\frac{z}{L}\right)^q n_\mathrm{c}\quad(q>0)$$

情况下,P 波的数值解.

7.3 参量过程的线性演化和非线性演化

当入射激光的强度达到一定阈值后,一方面它在介质中的传播会受到带电粒子系极化及扰动电流效应的影响,另一方面它也会在介质中激发出比较强(即可以被观测到)的本征模式. 这时,激光可以通过波-波耦合的方式将波能(以 $\hbar\omega$ 的形式)和波的动量(以 $\hbar\boldsymbol{k}$ 的形式)转换给新产生的波. 这类的光-介质相互作用过程一般被称为参量过程. 光的参量过程最初是在光和晶体的相互作用中发现并被充分研究的,在较后的激光-等离子体参量过程研究

中也采取了光在固体中参量过程的大量术语. 所以下面在 7.3.1 小节中，首先介绍中性介质(包括固体)中的主要参量过程，然后概述等离子体中的主要参量过程. 在 7.3.2 小节中，首先给出了所用的出发方程组. 然后给出了描述参量过程中的电磁波(包括入射激光——也称泵波，和等离子体中的本征电磁波)，高频静电波(电子静电波)及低频静电波(离子声波)的耦合波动方程组. 在 7.3.3 小节中，给出了描述主要参量过程的线性理论. 而在 7.3.4 小节中，则给出了由泵波衰竭而引起的参量非线性演化过程.

7.3.1　中性介质和等离子体中参量过程的简介

1. 中性介质中的主要参量过程

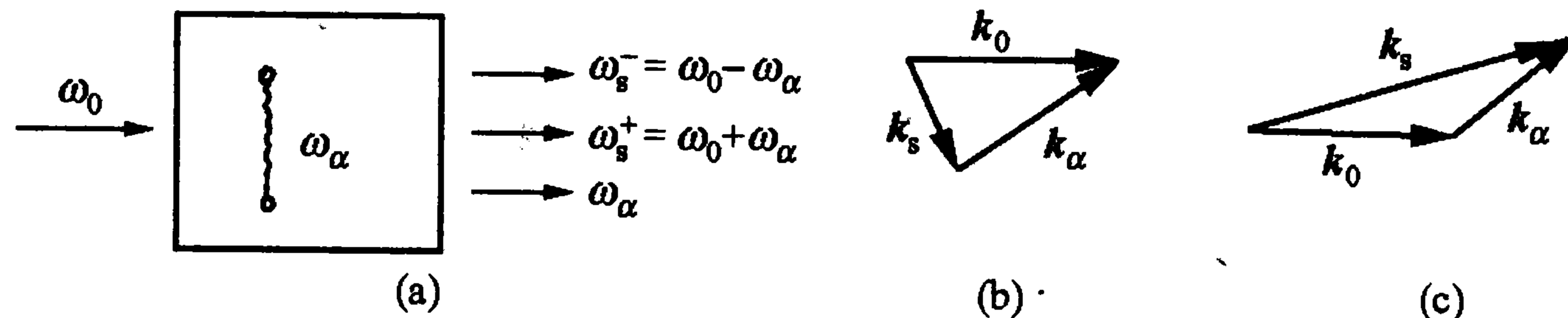


图 7.3　(a) 介质本征模 ω_α 与入射电磁波 ω_0 的耦合模式，(b) 斯托克斯模，(c) 反斯托克斯模

假定晶体中存在 N 支本征的集体运动模式 $\omega_\alpha, \boldsymbol{k}_\alpha, \alpha=1,2,\cdots N$，并令入射电磁波(以下称泵波)为 $\omega_0, \boldsymbol{k}_0$，如图 7.3. 于是当泵波强度超过某一阈值后，入射的泵波与本征模的耦合会产生下列新的电磁波(又称为散射电磁波)：

$\omega_s^- = \omega_0 - \omega_\alpha$，降频散射模(down scattering mode)或斯托克斯模(Stokes mode)；

$\omega_s^+ = \omega_0 + \omega_\alpha$，升频散射模(up scattering mode)或反斯托克斯模(anti-Stokes mode)；

$\omega_0 = \omega_\alpha$，共振模转换.

以上三类耦合模式是参量过程中的主要模式，它们必须满足波能量和动量的守恒定律：

$$\omega_0 = \omega_s^- + \omega_\alpha, \quad \boldsymbol{k}_0 = \boldsymbol{k}_s + \boldsymbol{k}_\alpha,$$

$$\omega_0 = \omega_s^+ - \omega_\alpha, \quad \boldsymbol{k}_0 = \boldsymbol{k}_s - \boldsymbol{k}_\alpha,$$
$$\omega_0 = \omega_\alpha, \quad \boldsymbol{k}_0 = \boldsymbol{k}_\alpha.$$

在晶体中有两种重要的本征模式：高频的电子等离子体波 ω_p 和低频的声波 ω_{is}，前者是由在导带中的电子集体运动造成的，后者是被约束在晶格中的离子晶格振荡造成的. 由这两支本征模引起的斯托克斯(降频散射)型的参量过程是

$\omega_0 = \omega_s^- + \omega_p, \quad \boldsymbol{k}_0 = \boldsymbol{k}_s + \boldsymbol{k}_p,$　　受激拉曼(Raman) 散射.

$\omega_0 = \omega_s^+ + \omega_{is}, \quad \boldsymbol{k}_0 = \boldsymbol{k}_s + \boldsymbol{k}_{is},$　　受激布里渊(Brillouin) 散射.

此外在其他中性介质(非晶体、气体、流体)中还会有：瑞利中心(center)散射，这是由光在气体密度扰动(涨落)上的散射；瑞利翼(wing)散射，这是由光在各向异性分子的取向扰动上的散射. 下面简要介绍等离子体中的主要参量过程.

2. 等离子体中的主要参量过程

(1) 受激拉曼散射(Stimulated Raman Scattering, SRS)过程，发生在等离子体中 $n_e \leqslant n_c/4$ 的区域中.

$$\omega_0 \to \omega_s + \omega_p,$$

其中 ω_p 是等离子体中的电子等离子体波. 在等离子体中的电磁波，只有当 $\omega_s > \omega_{pe}$ 时才能传播，如果令 $\omega_s = \omega_{pe} + \Delta\omega$，则有 $\omega_0 = 2\omega_{pe} + \Delta\omega$. 所以由 $\omega_{pe}^2 \leqslant \omega_0^2/4$，分别代入等离子体振荡频率的定义式和电磁波与临界密度的关系式后，可以得出能够发生这个参量过程的电子密度范围是

$$n_e \leqslant \frac{1}{4} n_c.$$

(2) 受激布里渊散射(Stimulated Brillouin Scattering, SBS)过程，发生在等离子体 $n_e < n_c$ 的区域中.

$$\omega_0 \to \omega_s + \omega_a,$$

其中 ω_a 是等离子体中的离子声波. 下面来估算一下离子声波的波矢(波长)和频率. 取目前激光和等离子体实验中的典型参数：$n_e \approx 10^{21}\ \mathrm{cm}^{-3}$, $T_e \approx 2\ \mathrm{keV}$, $\omega_0 = 1.8 \times 10^{15}\ \mathrm{Hz}$, $\lambda_0 = 1\ \mu\mathrm{m}$，于是有

$\omega_{pe}\approx 1.78\times 10^{15}$ Hz,$C_a\approx 10^7$ cm/s. 离子声波的波矢可以从背散射的情况估算出,这时散射波的波矢在数值上与入射泵波的相近,但方向相反 $\boldsymbol{k}_s\approx-\boldsymbol{k}_0$,故从动量守恒可知离子声波的波矢 $k_a=k_0-k_s\approx 2k_0$. 于是离子声波的频率近似为

$$\omega_a = k_a C_s \approx 2k_0 C_s = \frac{4\pi}{\lambda_0}C_s \approx 10^{12}\ \text{Hz} \ll \omega_0(10^{15}\ \text{Hz}).$$

(3) 双等离子体波衰变(Twin Plasmon Decay,TPD)不稳定性,发生在 $n_e=n_c/4$ 的等离子体区域附近.

$$\omega_0 \to \omega_{p1} + \omega_{p2}.$$

双等离子体波衰变产生的电子等离子体波,频率约为泵波频率的一半 $\omega_{p1}\approx\omega_{p2}\approx\frac{1}{2}\omega_0$. 这个频率对应的电子临界密度是泵波临界密度的 1/4,因此这个过程只可能发生在 $n_c/4$ 的密度点附近. 频率在 $\omega_0/2$ 附近的电子等离子体波和泵波的再次耦合可以产生频率为 1/2 倍和 3/2 倍泵波频率的电磁波

$$\omega_0 - \omega_{p1,p2} = \omega_s \quad \left(\approx \frac{1}{2}\omega_0\right),$$

$$\omega_0 + \omega_{p1,p2} = \omega_s \quad \left(\approx \frac{3}{2}\omega_0\right).$$

由于实验上的确探测到这种散射电磁波,并且还没有其他原因可以合理地解释这种现象,因此可以把它当成 TPD 不稳定过程存在的间接证明.

(4) 离子声衰变不稳定性(Ion Acoustic Decay Instability, IADI),发生在 $n_e>0.8n_c$ 的等离子体区域.

$$\omega_0 \to \omega_p + \omega_a \quad (\omega_p \approx \omega_0).$$

它们往往被用来解释在实验上观测到的 2 倍(泵波)频散射电磁波的产生机制

$$\omega_0 + \omega_p = \omega_s \quad (\omega_s \approx 2\omega_0).$$

(5) 泵波和等离子体波的共振模耦合,发生在临界密度层附近.

$$\omega_0 \to \omega_p.$$

这时泵波直接通过波-粒子共振相互作用转换成电子等离子体波,因此所产生的等离子体波其频率和波矢都和泵波相同.

7.3.2 描述参量过程的基本方程组

1. 出发方程组

按(7.1)式,不考虑束缚电子的极化作用(只讨论完全电离等离子体),则有基本的波动方程

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} + c^2[\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{E})] = 4\pi e\frac{\partial}{\partial t}(n\boldsymbol{u}).$$

其中用到了扰动电流主要由电子流贡献的近似,并且为了简单、略去了表示电子流体的下标:$\boldsymbol{J}=-en_e\boldsymbol{u}_e+Zen_i\boldsymbol{u}_i\approx-en\boldsymbol{u}$.

对于电磁波 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_t$,由于是横波,有 $\nabla\cdot\boldsymbol{E}_t\equiv 0$;故有电磁波的波动方程

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}_t}{\partial t^2} - c^2\nabla^2\boldsymbol{E}_t = 4\pi e\frac{\partial}{\partial t}(n\boldsymbol{u}). \tag{7.58}$$

而对于电子等离子体波 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_p$,由于是静电波(即纵波) $\nabla\times\boldsymbol{E}_p\equiv 0$;故有高频静电波的波动方程

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}_p}{\partial t^2} = 4\pi e\frac{\partial}{\partial t}(n\boldsymbol{u}). \tag{7.59}$$

上面用到的 $\boldsymbol{e}_t$ 和 $\boldsymbol{e}_p$ 分别是表示横波($\boldsymbol{e}_t\perp\boldsymbol{k}$)和电子静电波(高频纵波)($\boldsymbol{e}_p\parallel\boldsymbol{k}$)的单位矢量.

低频静电波——离子声波也是纵波,但习惯上是通过离子流体方程来描述的,我们将在后面讨论.

在上面两个波动方程右面的电流扰动项中,

$$\frac{\partial}{\partial t}(n\boldsymbol{u}) = \frac{\partial n}{\partial t}\boldsymbol{u} + n\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}. \tag{7.60}$$

而后两个时间演化项是由电子流体方程组决定的. 按(7.2)和(7.6)式,并略去表示电子流体的下标后,电子流体的连续性方程

和动量方程为

$$\frac{\partial n}{\partial t}+\nabla\cdot(n\boldsymbol{u})=0, \tag{7.2}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}=-\frac{1}{2}\nabla(\boldsymbol{u}^2)-\frac{e}{m}\boldsymbol{E}-\frac{\gamma T}{mn}\nabla n. \tag{7.6}$$

将(7.2)和(7.6)式代入(7.60)式,得

$$\frac{\partial}{\partial t}(n\boldsymbol{u})=-\nabla\cdot(n\boldsymbol{u})\boldsymbol{u}+\boldsymbol{n}\left[-\frac{1}{2}\nabla(\boldsymbol{u}^2)-\frac{e}{m}\boldsymbol{E}-\frac{\gamma T}{mn}\nabla n\right],$$

$$4\pi e\frac{\partial}{\partial t}(n\boldsymbol{u})=-4\pi e\boldsymbol{u}[n(\nabla\cdot\boldsymbol{u})+(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)n]-2\pi en\nabla(\boldsymbol{u}^2)$$
$$-\frac{4\pi e^2}{m}n\boldsymbol{E}-4\pi e\frac{\gamma T}{m}\nabla n. \tag{7.61}$$

其中电子密度由三部分组成——平衡(静态)密度分布,密度的高频扰动和密度的低频扰动:

$$n=n_0(\boldsymbol{r})+n^{\mathrm{h}}+n^{\mathrm{L}}. \tag{7.62}$$

而电场则由电磁波(又分为泵波 0 和散射波 s,统称横波 t)的电场和静电波(电子等离子体波 p 和离子声波 a,统称纵波 l)的电场组成

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_{\mathrm{t}}+\boldsymbol{E}_{\mathrm{l}},\quad \boldsymbol{E}_{\mathrm{t}}=\boldsymbol{E}_0+\boldsymbol{E}_{\mathrm{s}},\quad \boldsymbol{E}_{\mathrm{l}}=\boldsymbol{E}_{\mathrm{p}}+\boldsymbol{E}_{\mathrm{a}}. \tag{7.63}$$

将(7.62)、(7.63)式代入(7.61)式的最后两项,可将它们改写成

$$-\frac{4\pi n_0e^2}{m}\left(1+\frac{n^{\mathrm{h}}}{n_0}+\frac{n^{\mathrm{L}}}{n_0}\right)(\boldsymbol{E}_{\mathrm{t}}+\boldsymbol{E}_{\mathrm{p}}+\boldsymbol{E}_{\mathrm{a}})$$
$$-4\pi e\frac{\gamma T}{m}\nabla(n_0+n^{\mathrm{h}}+n^{\mathrm{L}})$$
$$=-\omega_{\mathrm{pe}}^2\boldsymbol{E}_{\mathrm{t}}+\left(\frac{\gamma T}{m}\nabla^2-\omega_{\mathrm{pe}}^2\right)\boldsymbol{E}_{\mathrm{p}}-\frac{\omega_{\mathrm{pe}}^2}{n_0}(n^{\mathrm{h}}+n^{\mathrm{L}})\boldsymbol{E}$$
$$-\omega_{\mathrm{pe}}^2\boldsymbol{E}_{\mathrm{a}}-4\pi e\frac{\gamma T}{m}\nabla(n_0+n^{\mathrm{L}}). \tag{7.64}$$

在上式的推导中用到了电子静电波所满足的泊松方程

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}_{\mathrm{p}}=-4\pi en^{\mathrm{h}}. \tag{7.65}$$

另外(7.61)式中的电子总流速 $\boldsymbol{u}$ 也同样可以写成各波场所驱动的

扰动速度之和

$$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}_{\mathrm{t}}+\boldsymbol{u}_{\mathrm{l}}=\boldsymbol{u}_{\mathrm{t}}+\boldsymbol{u}_{\mathrm{p}}+\boldsymbol{u}_{\mathrm{a}},\quad \boldsymbol{u}_{\mathrm{l}}=\boldsymbol{u}_{\mathrm{p}}+\boldsymbol{u}_{\mathrm{a}}, \tag{7.66}$$

于是 $u^2=\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}$ 可以分成高频部分和低频部分

$$u^2=(\boldsymbol{u}_{\mathrm{t}}+\boldsymbol{u}_{\mathrm{p}}+\boldsymbol{u}_{\mathrm{a}})^2$$
$$=u_{\mathrm{t}}^2+u_{\mathrm{p}}^2+u_{\mathrm{a}}^2+2\boldsymbol{u}_{\mathrm{t}}\cdot\boldsymbol{u}_{\mathrm{p}}+2\boldsymbol{u}_{\mathrm{t}}\cdot\boldsymbol{u}_{\mathrm{a}}+2\boldsymbol{u}_{\mathrm{p}}\cdot\boldsymbol{u}_{\mathrm{a}}$$
$$=(u^2)^{\mathrm{h}}+(u^2)^{\mathrm{L}}.$$

其中高频部分由两个高频成分相乘后的和频分量,及高频成分与低频成分的乘积(不论和频与差频)组成

$$(u^2)^{\mathrm{h}}=(u_{\mathrm{t}}^2)^{\mathrm{h}}+(u_{\mathrm{p}}^2)^{\mathrm{h}}+2(\boldsymbol{u}_{\mathrm{t}}\cdot\boldsymbol{u}_{\mathrm{p}})^{\mathrm{h}}+2\boldsymbol{u}_{\mathrm{t}}\cdot\boldsymbol{u}_{\mathrm{a}}+2\boldsymbol{u}_{\mathrm{p}}\cdot\boldsymbol{u}_{\mathrm{a}}, \tag{7.67}$$

而低频部分则由低频成分的相乘项,及两个高频成分相乘后的差频分量组成

$$(u^2)^{\mathrm{L}}=u_{\mathrm{a}}^2+(u_{\mathrm{t}}^2)^{\mathrm{L}}+(u_{\mathrm{p}}^2)^{\mathrm{L}}+2(\boldsymbol{u}_{\mathrm{t}}\cdot\boldsymbol{u}_{\mathrm{p}})^{\mathrm{L}}. \tag{7.68}$$

在某些电磁波和静电波方程的非线性耦合项中,我们只需取高频成分 $(u^2)^{\mathrm{h}}$. 而在离子声波波动方程的非线性耦合项中,我们只取低频部分 $(u^2)^{\mathrm{L}}$.

扰动的流体速度与扰动密度分别与驱动它们的各种波场有关. 由电子流体的运动方程,在最低阶的近似下,只保留电场驱动力项,有

$$\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial t}=-\frac{e}{m}\boldsymbol{E},$$

于是

$$\boldsymbol{u}=-\frac{e}{m}\int\boldsymbol{E}\mathrm{d}t. \tag{7.69}$$

高频扰动的电子密度可以从泊松方程(7.65)得出

$$n^{\mathrm{h}}=-\frac{1}{4\pi e}\nabla\cdot\boldsymbol{E}_{\mathrm{p}}.$$

在低频下,电子密度扰动可以完全与离子的扰动同步,所以可以令

$$n^{\mathrm{L}}=n_{\mathrm{i}}^{\mathrm{L}}, \tag{7.70}$$

而扰动的离子密度可以由离子的运动方程得出. 在(7.11)式中略去非线性的力项,只保留线性(热压力)驱动项后,有

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}_i}{\partial t} = -C_s^2 \frac{1}{n_{i0}} \nabla n_i^L,$$

其中 $n_i = n_{i0} + n_i^L$ 分别是平衡(无扰动)的离子密度分布和离子声频的扰动离子密度,于是

$$\boldsymbol{u}_i = -C_s^2 \frac{1}{n_{i0}} \int \nabla n_i^L dt. \tag{7.71}$$

对于给定的波模(泵波或各种等离子体波),波电场有确定的频率和波矢,其时间快变部分(也即是线性部分)可以取平面波的形式. 因而上面的积分或微商就可以容易地求出,这样扰动流速及密度就和驱动它的电场有线性的代数关系.

2. 电磁波的耦合方程组

将(7.61)及(7.64)式代入(7.58)式,并把原来方程右面的 $-\omega_{pe}^2 \boldsymbol{E}_t$ 项移到左面,电磁波的非线性耦合波动方程可写成

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \nabla^2 + \omega_{pe}^2\right] \boldsymbol{E}_t = 4\pi \dot{\boldsymbol{J}}_{non}^t. \tag{7.72}$$

方程式的左面对于电磁波的电场来说是线性的,而方程右面代表可能出现的所有非线性高频耦合项

$$4\pi \dot{\boldsymbol{J}}_{non}^t = -4\pi e \boldsymbol{u}[n(\nabla \cdot \boldsymbol{u}) + (\boldsymbol{u} \cdot \nabla) n] - 2\pi e n \nabla(\boldsymbol{u}^2) + \left(\frac{\gamma T}{m} \nabla^2 - \omega_{pe}^2\right) \boldsymbol{E}_p - \frac{\omega_{pe}^2}{n_0}(n^h + n^L) \boldsymbol{E}. \tag{7.73}$$

其中已略去了纯低频项 $-\omega_{pe}^2 \boldsymbol{E}_a$ 和非扰动的梯度项 $\nabla_t(n_0 + n^L)$.

为了看出波动方程右面非线性耦合项能描述什么样的参量过程,以第一大项 $-4\pi e(\boldsymbol{u}_t + \boldsymbol{u}_p + \boldsymbol{u}_a)[n(\nabla \cdot \boldsymbol{u}) + (\boldsymbol{u} \cdot \nabla) n]$ 为例来说明. 将(7.62)和(7.66)式代入其中的第一项以后,可以进一步把它写开成

$$-4\pi e \boldsymbol{u}_t[n(\nabla \cdot \boldsymbol{u}) + (\boldsymbol{u} \cdot \nabla) n]$$
$$= -4\pi e \boldsymbol{u}_t[n_0(\nabla_l \cdot \boldsymbol{u}_l) + (\boldsymbol{u}_l \cdot \nabla_l) n_0 + (\boldsymbol{u}_t \cdot \nabla_t) n_0] \tag{7.74}$$
$$-4\pi e \boldsymbol{u}_t[n^h(\nabla_l \cdot \boldsymbol{u}_l) + (\boldsymbol{u}_l \cdot \nabla_l) n^h + (\boldsymbol{u}_t \cdot \nabla_t) n^h] \tag{7.75}$$
$$-4\pi e \boldsymbol{u}_t[n^L(\nabla_l \cdot \boldsymbol{u}_l) + (\boldsymbol{u}_l \cdot \nabla_l) n^L + (\boldsymbol{u}_t \cdot \nabla_t) n^L]. \tag{7.76}$$

如果假定波动方程左面的横波(下标 t)为泵波 ω_0,而其右面的横波代表散射电磁波 ω_s,且纵波(下标 l)由电子静电波 ω_p 和离子声波 ω_a 组成,则(7.74)—(7.76)三项就为泵波所满足的波动方程提供了右面的非线性耦合项. 其中(7.74)项可以描述以下三波参量过程

$$\omega_0 \to \omega_s + \omega_p, \quad \omega_0 \to \omega_s + \omega_a, \quad \omega_0 \to \omega_{s1} + \omega_{s2};$$

它们习惯上被称为:受激拉曼散射(SRS),受激布里渊散射(SBS)和三(电磁)波混频. 而(7.75)项可以描述以下四波参量过程

$$\omega_0 \to \omega_s + \omega_{p1} + \omega_{p2}, \quad \omega_0 \to \omega_s + \omega_p + \omega_a,$$
$$\omega_0 \to \omega_{s1} + \omega_{s2} + \omega_p.$$

最后(7.76)项可以描述以下四波参量过程

$$\omega_0 \to \omega_s + \omega_p + \omega_a, \quad \omega_0 \to \omega_s + \omega_{a1} + \omega_{a2},$$
$$\omega_0 \to \omega_{s1} + \omega_{s2} + \omega_a.$$

如果把 ω_0 和 ω_s 对换,则(7.74)—(7.76)项就提供了上述过程中散射波 ω_s 波动方程右面的非线性耦合项. 这时取左面的横波为散射波;右面的项中当只有一个横波时,取它为泵波,当有两个横波时,其中一个是泵波,另一个是第二个散射波. 用类似的方法可以将 $4\pi \dot{\boldsymbol{J}}_{non}^t$ 中的所有其他项对应的参量过程辨认出来. 所有过程一共有 14 个(包括上面已经给出的),其中有三波过程 5 个(包括 SRS,SBS,TPD,IADI 等几个在 7.3.1 小节中提到过的典型过程):

$$\omega_0 \to \omega_s + \omega_p \ (\text{SRS}), \quad \omega_0 \to \omega_s + \omega_a \ (\text{SBS}),$$
$$\omega_0 \to \omega_{p1} + \omega_{p2} \ (\text{TPD}); \quad \omega_0 \to \omega_p + \omega_a \ (\text{IADI}),$$
$$\omega_0 \to \omega_{s1} + \omega_{s2}. \tag{7.77}$$

四波过程 8 个:

$$\omega_0 \to \omega_s + \omega_{p1} + \omega_{p2}, \quad \omega_0 \to \omega_{s1} + \omega_{s2} + \omega_p,$$
$$\omega_0 \to \omega_{p1} + \omega_{p2} + \omega_{p3}; \quad \omega_0 \to \omega_s + \omega_p + \omega_a,$$
$$\omega_0 \to \omega_{s1} + \omega_{s2} + \omega_a;$$
$$\omega_0 \to \omega_s + \omega_{a1} + \omega_{a2}, \quad \omega_0 \to \omega_p + \omega_{a1} + \omega_{a2},$$
$$\omega_0 \to \omega_{p1} + \omega_{p2} + \omega_a. \tag{7.78}$$

以及 1 个二波过程，即由 $4\pi\dot{\boldsymbol{j}}^{\,t}_{\rm non}$ 中 $((\gamma T/m)\nabla^2-\omega_{pe}^2)\boldsymbol{E}_p$ 项所贡献的共振模转换

$$\omega_0 \to \omega_p. \tag{7.79}$$

3. 电子静电波的耦合方程组

将(7.61)及(7.64)式代入(7.59)式，并把原来方程右面的 $((\gamma T/m)\nabla^2-\omega_{pe}^2)\boldsymbol{E}_p$ 项移到左面，电子静电波的非线性耦合波动方程可写成

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_{pe}^2 - \frac{\gamma T}{m}\nabla^2\right]\boldsymbol{E}_p = 4\pi\dot{\boldsymbol{j}}^{\,p}_{\rm non}. \tag{7.80}$$

方程右面代表可能出现的所有非线性高频扰动电流项

$$4\pi\dot{\boldsymbol{j}}^{\,p}_{\rm non} = -4\pi e\boldsymbol{u}[n(\nabla\cdot\boldsymbol{u}) + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)n] - 2\pi en\nabla(\boldsymbol{u}^2)$$
$$-\omega_{pe}^2\boldsymbol{E}_t - \frac{\omega_{pe}^2}{n_0}(n^h + n^L)\boldsymbol{E}. \tag{7.81}$$

用和电磁波情况时相同的讨论方法，可以得出涉及静电波的所有三波和四波参量过程. 除了在(7.77)—(7.79)式中含有静电波的 9 个参量过程外(这时静电波波动方程描述在这些参量过程中，静电波所满足的耦合方程)，还有以下 5 个不涉及电磁波的纯静电波间的相互作用过程

$$\omega_p \to \omega_{p1} + \omega_{p2}, \quad \omega_p \to \omega_{p1} + \omega_{p2} + \omega_{p3}, \quad \omega_p \to \omega_p + \omega_a,$$
$$\omega_p \to \omega_{p1} + \omega_{p2} + \omega_a, \quad \omega_p \to \omega_p + \omega_{a1} + \omega_{a2}. \tag{7.82}$$

4. 离子声波的耦合方程组

出发的离子流体方程组是(7.7)和(7.11)式，即

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \nabla\cdot(n_i\boldsymbol{u}_i) = 0, \tag{7.7}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}_i}{\partial t} = -\frac{1}{2}\nabla\left[(\boldsymbol{u}_i^2) + \frac{mZ}{m_i}(\boldsymbol{u}^2)^L\right] - C_s^2\frac{1}{n_i}\nabla n_i. \tag{7.11}$$

对连续性方程再求一次时间导数，有

$$\frac{\partial^2 n_i}{\partial t^2} + \nabla\cdot\left[\frac{\partial n_i}{\partial t} + n_i\frac{\partial \boldsymbol{u}_i}{\partial t}\right] = 0,$$

代入连续性方程和运动方程后，可得描述离子声波非线性耦合过程的方程

$$\frac{\partial^2 n_i}{\partial t^2} - C_s^2\nabla^2 n_i = \nabla\cdot\left[\boldsymbol{u}_i\boldsymbol{u}_i\cdot\nabla n_i + n_i\boldsymbol{u}_i\nabla\cdot\boldsymbol{u}_i\right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}n_i\nabla\left(\boldsymbol{u}_i^2 + \frac{Zm}{m_i}(\boldsymbol{u}^2)^L\right)\right]. \tag{7.83}$$

当不考虑上式右面的非线性项时，就回到了描述小扰动的线性离子声波方程

$$\frac{\partial^2 n_i}{\partial t^2} - C_s^2\nabla^2 n_i = 0,$$

当令 $n_i(\boldsymbol{r},t) = n_{i0}\exp(\mathrm{i}\boldsymbol{k}_a\cdot\boldsymbol{r} - \mathrm{i}\omega t)$ 后，可得离子声波的色散关系

$$\omega_a = k_a C_s, \tag{7.84}$$

其中 C_s 就是(7.12)式给出的离子声速. 而(7.83)式右面的非线性项则可以描述以下 8 个涉及离子声波的参量过程，其中上面已经涉及的有 6 个：

$$\omega_0 \to \omega_s + \omega_a\ (\text{SBS}), \quad \omega_0 \to \omega_p + \omega_a\ (\text{IADA});$$
$$\omega_0 \to \omega_s + \omega_a^{(1)} + \omega_a^{(2)}, \quad \omega_0 \to \omega_p + \omega_a^{(1)} + \omega_a^{(2)};$$
$$\omega_p \to \omega_p + \omega_a, \quad \omega_p \to \omega_p + \omega_a^{(1)} + \omega_a^{(2)}.$$

而这里新出现的只涉及离子声波本身的过程有 2 个——离子声波的三波与四波衰变过程：

$$\omega_a \to \omega_a^{(1)} + \omega_a^{(2)}, \quad \omega_a \to \omega_a^{(1)} + \omega_a^{(2)} + \omega_a^{(3)}. \tag{7.85}$$

以上给出的涉及电磁波、静电波和离子声波的所有参量过程一共有 21 个，分别列在(7.77)—(7.79)，(7.82)，(7.85)各式中.

7.3.3 主要参量过程的线性理论

1. 受激拉曼散射(SRS)过程的波、模耦合方程及其简化

(1) 耦合波动方程组

由一般性的电磁波动方程(7.63)和静电波波动方程(7.78)可以得出只涉及 SRS 过程

$$\omega_0 = \omega_s + \omega_p, \quad k_0 = k_s + k_p$$

的非线性耦合方程组. 其中描述入射(泵)、散射电磁波和电子等离子体波的三个方程分别是

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_{pe}^2 - c^2\nabla^2\right]\boldsymbol{E}_0 = -4\pi e\boldsymbol{u}_s(n_0\nabla\cdot\boldsymbol{u}_p + \boldsymbol{u}_p\cdot\nabla n_0)$$
$$-4\pi e n_0\nabla(\boldsymbol{u}_p\cdot\boldsymbol{u}_s) - 4\pi e\boldsymbol{u}_p\boldsymbol{u}_s\cdot\nabla n_0 - \frac{\omega_{pe}^2}{n_0}n^h\boldsymbol{E}_s, \quad (7.86)$$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_{pe}^2 - c^2\nabla^2\right]\boldsymbol{E}_s = -4\pi e\boldsymbol{u}_0(n_0\nabla\cdot\boldsymbol{u}_p + \boldsymbol{u}_p\cdot\nabla n_0)$$
$$-4\pi e n_0\nabla(\boldsymbol{u}_p\cdot\boldsymbol{u}_0) - 4\pi e\boldsymbol{u}_p\boldsymbol{u}_0\cdot\nabla n_0 - \frac{\omega_{pe}^2}{n_0}n^h\boldsymbol{E}_0, \quad (7.87)$$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_{pe}^2 - 3v_{te}^2\nabla^2\right]\boldsymbol{E}_p$$
$$= -4\pi e n_0\nabla(\boldsymbol{u}_0\cdot\boldsymbol{u}_s) - 4\pi e(\boldsymbol{u}_0\boldsymbol{u}_s + \boldsymbol{u}_s\boldsymbol{u}_0)\cdot\nabla n_0. \quad (7.88)$$

在导出最后一个方程时,采取了通常文献中假定的

$$\frac{\gamma T}{m} = \frac{3T}{m} \equiv \langle v_e^2\rangle = 3v_{te}^2, \quad v_{te} = \sqrt{\frac{T_e}{m_e}}.$$

其中$\langle v_e^2\rangle$是电子速度的平方(在麦克斯韦速度分布上的)平均,而v_{te}是电子的特征热速度.

绝热指数(或比热比)取一维时的值 $\gamma=3$,是考虑到电子静电波相速度大于热速度,因此它对电子流体的压缩过程可以被当成一维的绝热压缩. 即在一个波周期中,被压缩流体的动能只在波的传播方向上发生变化,还来不及通过热运动或碰撞而均分到另两

个方向上去.

上面方程中的电场是时间和空间的任意函数,从这类方程求出的解被称为全(完整)波解,一般只能通过数值的方法得到. 本书中不讨论全波解的具体求解法,下面我们给出一种近似的求解方法——模耦合方程解. 当参量过程中诸波间的能量、动量交换只占各波能量和动量的很小部分时,它们的幅度绝对值随时间、空间的变化很缓慢. 也即在一个波周期内或一个波长的距离中,波的幅度的变化可以当成小量. 这样各个波基本上仍保持平面波的形式,只是其波模(波幅)不再是常数,而是随时间、空间缓变的函数. 在这种近似成立的物理条件下,可以通过下面的方法将上面的全波耦合方程组改写成(波)模耦合方程组.

(2) 模耦合方程组

为了将波场分成时空慢变和快变的两部分,设

$$\boldsymbol{E}_\alpha = \frac{1}{2}\boldsymbol{e}_\alpha\left[\varepsilon_\alpha e^{i(k_\alpha\cdot r-\omega_\alpha t)} + \varepsilon_\alpha^* e^{-i(k_\alpha\cdot r-\omega_\alpha t)}\right], \quad \alpha = 0,s,p. \quad (7.89)$$

其中(波)模 $\varepsilon(r,t)$是时、空慢变的复变量(因而 $\varepsilon^*(r,t)$是它的复共轭),而上式中的指数部分是原来无耦合平面波的时、空快变部分. 在下面的讨论中,我们引入表征时间慢变的特征量 Γ,有

$$\varepsilon(t) \propto \varepsilon(0)e^{\Gamma t}.$$

当 $\Gamma>0$,波模就随时间指数增长(不稳定);反之,波模就减小(阻尼). 一般在$|\Gamma/\omega|\leqslant 10^{-3}$时,通过模耦合方程可以很好地描述参量过程中各波的时间行为. 对空间慢变行为的描述可以用完全类似的办法进行,这里就不详述了. 利用上面对波电场的分解, 以及

$$n^h = -\frac{1}{4\pi e}\nabla\cdot\boldsymbol{E}_p, \quad \boldsymbol{u}_\alpha = -\frac{e}{m}\int\boldsymbol{E}_\alpha dt,$$

可以将全波方程组中其他物理量分成慢变和快变部分,如速度就可以写成

$$\boldsymbol{u}_\alpha = \frac{1}{2}\frac{e}{im\omega_\alpha}\boldsymbol{e}_\alpha\left[\varepsilon_\alpha e^{i(k_\alpha\cdot r-\omega_\alpha t)} - \varepsilon_\alpha^* e^{-i(k_\alpha\cdot r-\omega_\alpha t)}\right], \quad \alpha = 0,s,p.$$
$$(7.90)$$

下面给出从泵波的全波方程导出相应模耦合方程的方法. 根据(7.89)式,利用

$$\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{E}_\alpha = \frac{1}{2}\boldsymbol{e}_\alpha\left[e^{i(\boldsymbol{k}_\alpha\cdot\boldsymbol{r}-\omega_\alpha t)}\left(-i\omega_\alpha + \frac{\partial}{\partial t}\right)\varepsilon_\alpha + \text{c.c.}\right],$$

其中 c.c. 表示这里的项是前一项的复共轭,以及

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}_\alpha = \frac{1}{2}\boldsymbol{e}_\alpha\cdot\left[e^{i(\boldsymbol{k}_\alpha\cdot\boldsymbol{r}-\omega_\alpha t)}(i\boldsymbol{k}_\alpha + \nabla)\varepsilon_\alpha + \text{c.c.}\right],$$

泵波电场的方程(7.86)可以化成相应的模耦合微分方程(下面只保留了慢变量的一阶时间导数项 $\partial/\partial t$,而略去了与它相比小得多的时间二阶导数项 $\partial^2/\partial t^2$)

$$\begin{aligned}&\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{c^2}{\omega_0}\boldsymbol{k}_0\cdot\nabla - i\Omega_0\right)\varepsilon_0\\
&= \frac{e\omega_{pe}^2}{4m\omega_0\omega_s\omega_p}\left\{\left[-(\boldsymbol{e}_0\cdot\boldsymbol{e}_s)\left(1+\frac{\omega_s\omega_p}{\omega_{pe}^2}\right)k_p\right.\right.\\
&\quad + i(\boldsymbol{e}_0\cdot\boldsymbol{e}_s)(\boldsymbol{e}_p\cdot\nabla\ln n_0)\\
&\quad \left. + i(\boldsymbol{e}_0\cdot\boldsymbol{e}_p)(\boldsymbol{e}_s\cdot\nabla\ln n_0) + i(\boldsymbol{e}_p\cdot\boldsymbol{e}_s)(\boldsymbol{e}_0\cdot\nabla)\right]\varepsilon_s\varepsilon_p\\
&\quad \left. + i\left(1+\frac{\omega_s\omega_p}{\omega_{pe}^2}\right)(\boldsymbol{e}_0\cdot\boldsymbol{e}_s)\varepsilon_s(\boldsymbol{e}_p\cdot\nabla)\varepsilon_p\right\}. \qquad (7.91)\end{aligned}$$

在导出上式时用到了 $\boldsymbol{k}_0\cdot\boldsymbol{e}_0=\boldsymbol{k}_s\cdot\boldsymbol{e}_s\equiv 0$(横波)和 $\boldsymbol{k}_p\cdot\boldsymbol{e}_p=k_p$(纵波),其中

$$\Omega_0 = \frac{\omega_0^2-\omega_{00}^2}{2\omega_0},\quad \omega_{00}^2 = \omega_{pe}^2 + c^2k_0^2,$$

可以解释为因参量过程中模耦合所引起的泵波频移(对本征频率 ω_{00} 的偏离). 在上面方程中的空间梯度都是对空间慢变量 $n_0,\varepsilon_s,\varepsilon_p$ 来作的,在最低阶的近似下,可以把它们作为小量而略去. 这样最后可得泵波的模耦合方程

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - i\Omega_0\right)\varepsilon_0 = -A(\boldsymbol{e}_0\cdot\boldsymbol{e}_s)\left(1+\frac{\omega_s\omega_p}{\omega_{pe}^2}\right)\varepsilon_s\varepsilon_p, \qquad (7.92)$$

其中非线性耦合系数

$$A = \frac{ek_p\omega_{pe}^2}{4m\omega_0\omega_s\omega_p}. \qquad (7.93)$$

同理可得另外两个波的模耦合方程组

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - i\Omega_s\right)\varepsilon_s = A(\boldsymbol{e}_0\cdot\boldsymbol{e}_s)\left(\frac{\omega_0\omega_p}{\omega_{pe}^2} - 1\right)\varepsilon_0\varepsilon_p^*, \qquad (7.94)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - i\Omega_p\right)\varepsilon_p = A(\boldsymbol{e}_0\cdot\boldsymbol{e}_s)\varepsilon_0\varepsilon_s^*. \qquad (7.95)$$

其中散射波和等离子体波的频移分别是

$$\Omega_s = \frac{\omega_s^2-\omega_{s0}^2}{2\omega_s},\quad \omega_{s0}^2 = \omega_{pe}^2 + c^2k_s^2;$$

$$\Omega_p = \frac{\omega_p^2-\omega_{p0}^2}{2\omega_p},\quad \omega_{p0}^2 = \omega_{pe}^2 + 3v_{te}^2k_p^2.$$

(3) 模耦合方程组的简化

令

$$\varepsilon_\alpha = g_\alpha(t)e^{i\phi_\alpha(t)}e^{i\Omega_\alpha t},\quad \alpha = 0,s,p, \qquad (7.96)$$

并假定 $\Omega_0=\Omega_s+\Omega_p$,可以进一步简化模耦合方程. 结果得到以下的联立方程组

$$\frac{\partial g_0}{\partial t} = -\beta_0 g_s g_p\cos\theta,\quad g_0\frac{\partial\phi_0}{\partial t} = \beta_0 g_s g_p\sin\theta; \qquad (7.97)$$

$$\frac{\partial g_s}{\partial t} = \beta_s g_0 g_p\cos\theta,\quad g_s\frac{\partial\phi_s}{\partial t} = \beta_s g_0 g_p\sin\theta; \qquad (7.98)$$

$$\frac{\partial g_p}{\partial t} = \beta_p g_0 g_s\cos\theta,\quad g_p\frac{\partial\phi_p}{\partial t} = \beta_p g_0 g_s\sin\theta. \qquad (7.99)$$

其中 $\theta=\phi_0-\phi_s-\phi_p$,而耦合系数

$$\beta_0 = A(\boldsymbol{e}_0\cdot\boldsymbol{e}_s)\left(1+\frac{\omega_s\omega_p}{\omega_{pe}^2}\right),\quad \beta_s = A(\boldsymbol{e}_0\cdot\boldsymbol{e}_s)\left(\frac{\omega_0\omega_p}{\omega_{pe}^2}-1\right),$$
$$\beta_p = A(\boldsymbol{e}_0\cdot\boldsymbol{e}_s).$$

方程(7.97)—(7.99)就是下面对 SRS 过程作线性和非线性稳定性分析的出发点.

2. 受激拉曼散射(SRS)过程的线性稳定性分析

在 SRS 不稳定性发展的初始阶段也即线性阶段,泵波很强,

而散射波刚刚超过热噪声或本底(种子)的扰动水平. 这时泵波幅度可以近似地当成常数,于是可令

$$\frac{\partial g_0}{\partial t} = 0, \quad g_0 = g_0(0) = g_{00}.$$

结果 SRS 的模耦合方程组就只剩下两个(其中含有作为时间函数的相角差 $\theta(t)$,但它的具体值不影响线性分析,故这里不列出关于相角的演化方程. 在线性演化阶段,我们可以取它们的初始值 $\theta(0)=\theta_0$):

$$\frac{\partial g_s}{\partial t} = \beta_s g_{00} g_p \cos\theta_0, \quad \frac{\partial g_p}{\partial t} = \beta_p g_{00} g_s \cos\theta_0. \tag{7.100}$$

令 $g_s, g_p \propto \exp\Gamma t$,上面的微分方程就变成代数方程,并有解

$$\Gamma = \sqrt{\beta_s\beta_p} g_{00} |\cos\theta_0| = |A| g_{00} \sqrt{\frac{\omega_0\omega_p}{\omega_{pe}^2} - 1}\, |\boldsymbol{e}_0 \cdot \boldsymbol{e}_s| |\cos\theta_0|.$$

显然 $\Gamma>0$,也就是说这时入射泵波会将能量带给散射的等离子体电磁波和电子静电波,使它们随时间指数地增大——这就是 SRS 不稳定性. 代入耦合系数,并取 $\omega_p \approx \omega_{pe}, \omega_s \approx \omega_p$,最后可将 SRS 不稳定过程的线性增长率写成下面的常见形式

$$\Gamma \approx \frac{k_p u_0}{4} \frac{\omega_{pe}}{\omega_s} |\boldsymbol{e}_0 \cdot \boldsymbol{e}_s| |\cos\theta_0|. \tag{7.101}$$

其中

$$u_0 = \frac{e g_{00}}{m\omega_0}$$

是电子在泵波电场 g_{00} 中的"抖动"速度. 将增长率写成上面的特殊形式是为了和用其他方式所得出的表达式作比较. 一般文献中给出的增长率是和电磁波的极化(偏振)取向无关的(如文献[7]):

$$\Gamma \approx \frac{k_p u_0}{4} \sqrt{\frac{\omega_{pe}^2}{\omega_s \omega_p}},$$

只有刘全生等人(见文献[8])给出过与电场极化取向有关的增长率表达式

$$\Gamma \approx \frac{k_p u_0}{2} \sqrt{\frac{\omega_{pe}}{\omega_s}} |\boldsymbol{e}_0 \cdot \boldsymbol{e}_s|.$$

这个增长率表达式和(7.101)式给出的极化关联是相同的,它们表明:当散射电磁波的极化方向和泵波的极化方向垂直时,增长率为零. (7.101)式还表明 SRS 的增长率和三支耦合波的初始相角差 θ_0 有关,这是其他增长率表达式所不曾指出的. 这些理论结果都可以通过精心设计的实验来检验.

3. 受激布里渊散射(SBS)过程的线性稳定性分析

(1) 全波及模耦合的方程组. 由一般性的电磁波动方程(7.63)和离子声波波动方程(7.81)可以得出只涉及 SBS 过程

$$\omega_0 = \omega_s + \omega_a, \quad k_0 = k_s + k_a$$

的全波波动方程组:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_{pe}^2 - c^2 \nabla^2\right]\boldsymbol{E}_0 = -4\pi e \boldsymbol{u}_s (n_0 \nabla \cdot \boldsymbol{u}_a + \boldsymbol{u}_a \cdot \nabla n_0) - 4\pi e \boldsymbol{u}_a \boldsymbol{u}_s \cdot \nabla n_0 - 4\pi e n_0 \nabla(\boldsymbol{u}_a \cdot \boldsymbol{u}_s) - \frac{\omega_{pe}^2}{n_0} n^L \boldsymbol{E}_s, \tag{7.102}$$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_{pe}^2 - c^2 \nabla^2\right]\boldsymbol{E}_s = -4\pi e \boldsymbol{u}_0 (n_0 \nabla \cdot \boldsymbol{u}_a + \boldsymbol{u}_a \cdot \nabla n_0) - 4\pi e \boldsymbol{u}_a \boldsymbol{u}_0 \cdot \nabla n_0 - 4\pi e n_0 \nabla(\boldsymbol{u}_a \cdot \boldsymbol{u}_0) - \frac{\omega_{pe}^2}{n_0} n^L \boldsymbol{E}_0, \tag{7.103}$$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - C_s^2 \nabla^2\right] n_i = \frac{Zm}{m_i} \nabla \cdot [n_0 \nabla(\boldsymbol{u}_0 \cdot \boldsymbol{u}_s)]. \tag{7.104}$$

当波模(幅)是时间和空间的慢变量时,可以将全波方程改写成模方程. 对电磁波 $\boldsymbol{E}_0$ 和 $\boldsymbol{E}_s$,仍利用(7.89)和(7.90)式来把波场分成时、空慢变量和快变量. 对离子声波中的离子密度扰动则可以写成

$$n_i = \frac{1}{2}[N e^{-i\omega_a t + i\boldsymbol{k}_a \cdot \boldsymbol{r}} + \text{c.c.}], \tag{7.105}$$

而相应的离子速度扰动则可以用线性近似下的运动方程得到,

$$\boldsymbol{u}_a = -\frac{C_s^2}{n_0}\int \nabla n_i \mathrm{d}t.$$

当 n_i 取表达式(7.105)时，可得

$$\boldsymbol{u}_i = \frac{C_s^2}{n_0\omega_a}\boldsymbol{k}_a n_i, \quad \boldsymbol{k}_a = k_a \boldsymbol{e}_a. \tag{7.106}$$

将这些表达式代入全波方程组，并同 SRS 中一样，忽略其中对空间慢变量的空间导数后，可得相应的模耦合方程组

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \mathrm{i}\Omega_0\right)\varepsilon_0 = -\mathrm{i}B[k_a^2(\boldsymbol{e}_0\cdot\boldsymbol{e}_s) + k_0 k_a(\boldsymbol{e}_a\cdot\boldsymbol{e}_s)]N\varepsilon_s - \mathrm{i}\frac{\omega_{pe}^2}{4n_0\omega_0}(\boldsymbol{e}_0\cdot\boldsymbol{e}_s)N\varepsilon_s,$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \mathrm{i}\Omega_s\right)\varepsilon_s = \mathrm{i}B[k_a^2(\boldsymbol{e}_0\cdot\boldsymbol{e}_s) - k_s k_a(\boldsymbol{e}_a\cdot\boldsymbol{e}_0)]N^*\varepsilon_0 - \mathrm{i}\frac{\omega_{pe}^2}{4n_0\omega_s}(\boldsymbol{e}_0\cdot\boldsymbol{e}_s)N^*\varepsilon_0,$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \mathrm{i}\Omega_a\right)N = -\mathrm{i}Ck_a^2(\boldsymbol{e}_0\cdot\boldsymbol{e}_s)\varepsilon_0\varepsilon_s^*.$$

其中

$$B = \frac{\pi e^2 C_s^2}{m\omega_0\omega_s\omega_a}, \quad C = \frac{n_0 e^2}{4m_i m\omega_0\omega_s\omega_a}, \quad \Omega_a = \frac{\omega_a^2 - C_s^2 k_a^2}{2\omega_a}.$$

注意到，在上面两个电磁波模方程右面的非线性项中，第一项远小于第二项. 因为第一项的量级为

$$Bk_a^2 = \frac{4\pi n_0 e^2}{4n_0}\frac{k_a^2 C_s^2}{m\omega_0\omega_s\omega_a} = \frac{\omega_{pe}^2}{4n_0}\frac{\omega_a^2}{\omega_0\omega_s\omega_a} = \frac{\omega_{pe}^2}{4n_0\omega_0}\frac{\omega_a}{\omega_s},$$

上式中的第一个因子就是非线性项中的第二项的数量级，而由于离子声波的频率远小于散射电磁波的频率 $\omega_a \ll \omega_s$，故上式的第二个因子远小 1. 也即非线性耦合项中第一项只是第二项的 $\omega_a/\omega_s \sim 10^{-3}$左右，因此下面在电磁波模耦合方程中我们将略去右面第一项.

下面，采取同 SRS 过程中相同的简化方法，令

$$\varepsilon_{0,s} = g_{0,s}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_{0,s}(t)+\mathrm{i}\Omega_{0,s}t}, \quad N = g_a \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_a(t)+\mathrm{i}\Omega_a t},$$

并假定 $\Omega_0 = \Omega_s + \Omega_a$，最后可以得到描述 SBS 过程的模耦合方程组

$$\frac{\partial g_0}{\partial t} = \beta_0 g_s g_a \sin\theta, \quad g_0\frac{\partial\phi_0}{\partial t} = \beta_0 g_s g_a\cos\theta; \tag{7.107}$$

$$\frac{\partial g_s}{\partial t} = -\beta_s g_0 g_a \sin\theta, \quad g_s\frac{\partial\phi_s}{\partial t} = \beta_s g_0 g_a\cos\theta; \tag{7.108}$$

$$\frac{\partial g_a}{\partial t} = \beta_a g_0 g_s \sin\theta, \quad g_a\frac{\partial\phi_a}{\partial t} = -\beta_a g_0 g_s\cos\theta. \tag{7.109}$$

其中 $\theta = \phi_0 - \phi_s - \phi_a$，而耦合系数(已略去了小量)

$$\beta_0 = -\frac{\omega_{pe}^2}{4n_0\omega_0}(\boldsymbol{e}_0\cdot\boldsymbol{e}_s), \quad \beta_s = -\frac{\omega_{pe}^2}{4n_0\omega_s}(\boldsymbol{e}_0\cdot\boldsymbol{e}_s),$$

$$\beta_a = Ck_a^2(\boldsymbol{e}_0\cdot\boldsymbol{e}_s).$$

可见和 SRS 一样，在 SBS 中也不存在散射波的极化方向和泵波极化方向相互垂直的散射过程.

(2) 线性稳定性分析. 在 SBS 不稳定性发展的初始阶段，同 SRS 过程一样可以假定泵波的波模为常数，即令 $g_0(t) = g_{00}$ = 常数. 于是模耦合方程组进一步简化成(同 SRS 的线性分析一样，这里也不讨论相角的时间演化)

$$\frac{\partial g_s}{\partial t} = -\beta_s g_{00} g_a \sin\theta_0, \quad \frac{\partial g_a}{\partial t} = \beta_a g_{00} g_s \sin\theta_0. \tag{7.110}$$

令

$$g_s, g_a \propto \mathrm{e}^{\Gamma t},$$

可得 SBS 过程的线性不稳定增长率

$$\Gamma = \sqrt{-\beta_s\beta_a g_{00}|\sin\theta_0||\boldsymbol{e}_0\cdot\boldsymbol{e}_s|} \tag{7.111}$$

$$= \frac{k_a u_0}{4}\sqrt{\frac{\omega_{pi}^2}{\omega_s\omega_a}}\sqrt{\frac{\omega_0}{\omega_s}}|\sin\theta_0||\boldsymbol{e}_0\cdot\boldsymbol{e}_s|. \tag{7.112}$$

上式右面的第一、二个因子是一般文献中也给出过的(见文献[7])，第三个因子在 SBS 中接近于 1. 和 SRS 线性增长率表达式一样，这里给出的表达式还指出增长率跟初始相位差以及泵波与

散射电磁波极化关联有关.

前面曾指出,在本章给出的理论框架下,可以讨论多达 21 种的参量过程. 下面作为例子,将对一个已知文献所不曾分析过的参量过程作线性稳定性分析.

4. 三电磁波混合的线性稳定性分析

这个过程涉及的三个波均是电磁波,它们满足的能量和动量守恒条件为

$$\omega_0 = \omega_{s1} + \omega_{s2}, \quad \boldsymbol{k}_0 = \boldsymbol{k}_{s1} + \boldsymbol{k}_{s2}. \tag{7.113}$$

描述这个过程的全波波动方程是

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_{pe}^2 - c^2 \nabla^2\right]\boldsymbol{E}_0$$

$$= - 4\pi e[\boldsymbol{u}_{s1}(\boldsymbol{u}_{s2} \cdot \nabla n_0) + \boldsymbol{u}_{s2}(\boldsymbol{u}_{s1} \cdot \nabla n_0)] - 4\pi e \nabla(\boldsymbol{u}_{s1} \cdot \boldsymbol{u}_{s2}),$$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_{pe}^2 - c^2 \nabla^2\right]\boldsymbol{E}_{s1}$$

$$= - 4\pi e[\boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{u}_{s2} \cdot \nabla n_0) + \boldsymbol{u}_{s2}(\boldsymbol{u}_0 \cdot \nabla n_0)] - 4\pi e \nabla(\boldsymbol{u}_0 \cdot \boldsymbol{u}_{s2}),$$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_{pe}^2 - c^2 \nabla^2\right]\boldsymbol{E}_{s2}$$

$$= - 4\pi e[\boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{u}_{s1} \cdot \nabla n_0) + \boldsymbol{u}_{s1}(\boldsymbol{u}_0 \cdot \nabla n_0)] - 4\pi e \nabla(\boldsymbol{u}_0 \cdot \boldsymbol{u}_{s1}).$$

利用与讨论 SRS 及 SBS 相似的办法,将泵波电场写成

$$\boldsymbol{E}_0 = \frac{1}{4}\mathrm{e}^{-\Gamma t}\{\boldsymbol{E}_{00}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}_0\cdot\boldsymbol{r}-\omega_0 t-\Omega_0 t)} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\boldsymbol{k}_0\cdot\boldsymbol{r}-\omega_0 t-\Omega_0 t)}] + \mathrm{c.c.}\},$$

而将两个散射波电场(下面,为了简单,将它们的下标记为 1 和 2)写成

$$\boldsymbol{E}_i = \frac{1}{4}\mathrm{e}^{\Gamma t}\{\boldsymbol{E}_{i0}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}_i\cdot\boldsymbol{r}-\omega_i t-\Omega_i t)} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\boldsymbol{k}_i\cdot\boldsymbol{r}-\omega_i t-\Omega_i t)}] + \mathrm{c.c.}\}, \quad i = 1,2,$$

可以得出这个过程的线性增长率

$$\Gamma^2 = b^2[(\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_2)(\boldsymbol{E}_{00} \cdot \nabla n_0) + (\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{E}_{00})(\boldsymbol{e}_2 \cdot \nabla n_0)]$$
$$\times [(\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_2)(\boldsymbol{E}_{00}^* \cdot \nabla n_0) + (\boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{E}_{00}^*)(\boldsymbol{e}_1 \cdot \nabla n_0)]. \tag{7.114}$$

其中耦合系数

$$b = \frac{\pi e^3}{2m^2\omega_0\omega_{s1}\omega_{s2}}.$$

从增长率表达式可以看到:

(i) 此过程只发生在具有很大密度梯度的等离子体中,例如在由强激光打固体靶而产生的薄等离体层中;对均匀等离子体,此过程不会发生($\Gamma \equiv 0$).

(ii) 此过程是否不稳定还与各波间极化关联,以及各波极化方向与密度梯度方向的关联有密切关系. 当泵波是斜入射的 P 波,而散射波也是斜出射的 P 波时,线性增长率总是正的——即此过程总是不稳定的.

7.3.4 泵波衰竭引起的非线性演化过程

在前面的线性稳定性分析中,我们假定泵波的强度(因而波幅或波模)是常数. 但随着时间推进,散射波的幅度会指数型地增大,以至于达到和泵波幅度可以相比的程度. 于是泵波的幅度就会不断衰减,而散射波也不可能再以指数形式增大. 这时不稳定过程进入了非线性的发展阶段. 最后当泵波耗尽时,散射波也会达到饱和. 事实上导致参量过程进入非线性发展阶段的机制还有很多,但在本节中,我们只讨论由于泵波衰竭引起的非线性演化过程.

1. SRS 过程的非线性行为

讨论的出发点是式(7.97)—(7.99),与线性分析不同,这里不再令泵波波模为常数. 在解上述 6 个联立方程前,我们先分析一下其中所包含的积分不变量,也即守恒量.

(1) 方程组所含有的守恒量

一共存在 3 个守恒量. 第一个是

$$g_0 g_s g_p \sin\theta = C_1. \tag{7.115}$$

其中 C_1 是常数,它的取值可以从初值 $g_{00}g_{s0}g_{p0}\sin\theta_0$ 给出,也可以从任一时刻的这几个量的测量值得出. 这个守恒关系的推导如下.

由(7.97)—(7.99)式中的三个相位方程可得

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}(\phi_0-\phi_s-\phi_p)=\sin\theta\left[\frac{\beta_0 g_s g_p}{g_0}-\frac{\beta_s g_0 g_p}{g_s}-\frac{\beta_p g_0 g_s}{g_p}\right],$$

在上式两边同乘 $\sin\theta$ 后，得

$$\frac{\partial\cos\theta}{\partial t}=-\sin^2\theta\left[\frac{\beta_0 g_s g_p}{g_0}-\frac{\beta_s g_0 g_p}{g_s}-\frac{\beta_p g_0 g_s}{g_p}\right].$$

另一方面，从三个波模方程可得

$$\frac{\partial}{\partial t}\ln(g_0 g_s g_p)=-\cos\theta\left[\frac{\beta_0 g_s g_p}{g_0}-\frac{\beta_s g_0 g_p}{g_s}-\frac{\beta_p g_0 g_s}{g_p}\right].$$

注意在上面两个导出的式子右面，方括号中的项是相同的. 将这项消去，可得

$$\frac{\partial}{\partial t}\ln(g_0 g_s g_p)=\frac{1}{2}\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial\cos^2\theta}{\partial t}=-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\ln\sin^2\theta=\frac{\partial}{\partial t}\ln\frac{1}{\sin\theta}.$$

这样就得出了(7.115)式，也即第一个守恒量. 下面来求另两个守恒量. 从关于 $g_\alpha(\alpha=0,s,p)$ 的微分方程出发，在两边同乘 g_α 后，可得连等式

$$\frac{1}{2\beta_0}\frac{\partial g_0^2}{\partial t}=-\frac{1}{2\beta_s}\frac{\partial g_s^2}{\partial t}=-\frac{1}{2\beta_p}\frac{\partial g_p^2}{\partial t}=-g_0 g_s g_p\cos\theta.$$

从这三个连等式可以得到两个独立的等式

$$\frac{g_0^2}{\beta_0}+\frac{g_s^2}{\beta_s}=C_2,\quad \frac{g_0^2}{\beta_0}+\frac{g_p^2}{\beta_p}=C_3. \tag{7.116}$$

这就是第二、三个守恒量，它们将 g_0 和 $g_s(g_p)$ 分别联系起来

$$g_s=\sqrt{\beta_s\left(C_2-\frac{g_0^2}{\beta_0}\right)},\quad g_p=\sqrt{\beta_p\left(C_3-\frac{g_0^2}{\beta_0}\right)}. \tag{7.117}$$

而 g_s 和 g_p 间则可以通过这两个守恒量相关联

$$\frac{g_s^2}{\beta_s}-\frac{g_p^2}{\beta_p}=C_2-C_3. \tag{7.118}$$

这两个常数也可以通过泵波和散射波的初值来给出.

(2) 方程组在某些特殊情况下的解析解

如果在初始($t=0$)时，有 $C_1=0$. 这可以是由初始的相位差

$\sin\theta_0=0$ 引起的；也可能是由于在一开始，等离子体中只有泵波，而没有散射波(它们只处在热噪声的水平)，即 $g_{s0}\approx g_{p0}\approx 0$. 这时第一个守恒量在以后的任何时刻也一直保持零值，$C_1\equiv 0$. 但在 SRS 不稳定性发展起来后($t>0$)，散射波的模不断增大，$g_s(t)$ 和 $g_p(t)$ 不再为零，这时为了保持第一个守恒量仍为零，就必须有

$$\sin\theta(t)\approx 0\quad 或\quad \cos\theta\approx\pm 1.$$

另一方面，从泵波的演化方程可以看到：SRS 不稳定性的发展使泵波波模在 $t>0$ 时不断减小($g_0(t)<g_{00}$)，这就要求 $\partial g_0/\partial t>0$. 因此当 $\beta_0(\boldsymbol{e}_0\cdot\boldsymbol{e}_s)>0$ 时，应该取 $\cos\theta=+1$；而当 $\beta_0(\boldsymbol{e}_0\cdot\boldsymbol{e}_s)<0$ 时，应该取 $\cos\theta=-1$. 在下面的讨论中，为了确定，我们取 $\cos\theta=1$. 于是将(7.117)式代入关于 $\partial g_0/\partial t$ 的方程后，有

$$\frac{\partial g_0}{\partial t}=-\sqrt{\beta_s\beta_p}(g_{00}^2+\Delta^2-g_0^2),\quad \Delta^2=\frac{\beta_0 g_{s0}^2}{\beta_s}=\frac{\beta_0 g_{p0}^2}{\beta_p}.$$

令

$$G_0^2=g_{00}^2+\Delta^2,\quad x=\frac{g_0}{G_0},$$

则可以进一步完全写成对 x 的微分方程，并积分，

$$\frac{dx}{dt}=-\sqrt{\beta_s\beta_p}G_0(1-x^2),$$

$$\int\frac{dx}{1-x^2}=-\sqrt{\beta_s\beta_p}G_0 t+C_4,$$

$$\operatorname{arctanh}x=C_4-\sqrt{\beta_s\beta_p}G_0 t,$$

将 x(也即 g_0)反解出来后，就得到泵波波模随时间衰减的解析表达式

$$g_0(t)=G_0\tanh(C_4-\sqrt{\beta_s\beta_p}G_0 t). \tag{7.119}$$

其中 C_4 是积分常数，可由 $t=0$ 时刻的波系统初值定出

$$C_4=\operatorname{arctanh}\frac{1}{\sqrt{1+\Delta^2/g_{00}^2}}.$$

C_4 对于散射波的初值 Δ 很不敏感，当 Δ^2/g_{00}^2 从 10^{-8} 变到 10^{-2} 时，C_4 才从 9.557 变到 2.65；即前者变了 6 个数量级，而后者才变了 3.6 倍. 由(7.119)和(7.117)式可以得出散射波的非线性演化行为

$$g_s(t) = G_0\sqrt{\frac{\beta_s}{\beta_0}}\operatorname{arccosh}(C_4 - \sqrt{\beta_s\beta_p}G_0 t), \tag{7.120}$$

$$g_p(t) = G_0\sqrt{\frac{\beta_p}{\beta_0}}\operatorname{arccosh}(C_4 - \sqrt{\beta_s\beta_p}G_0 t). \tag{7.121}$$

在图 7.4 中给出了 $C_4=3(\Delta^2/g_{00}^2\sim10^{-2})$ 和 $C_4=10(\Delta^2/g_{00}^2<10^{-8})$ 时，SRS 非线性演化过程中泵波和两支散射波的行为：散射波的波模从初值开始经历了指数型、幂指数型的增大，然后趋于饱和；与此同时，泵波从一开始的缓慢下降到急剧下降，最后几乎耗尽. 可以看到，散射波的初值越小，它们开始就发展得越慢，泵波衰减得也慢；但最后它们都经历了一个变化非常快的演化，而达到饱和或竭尽.

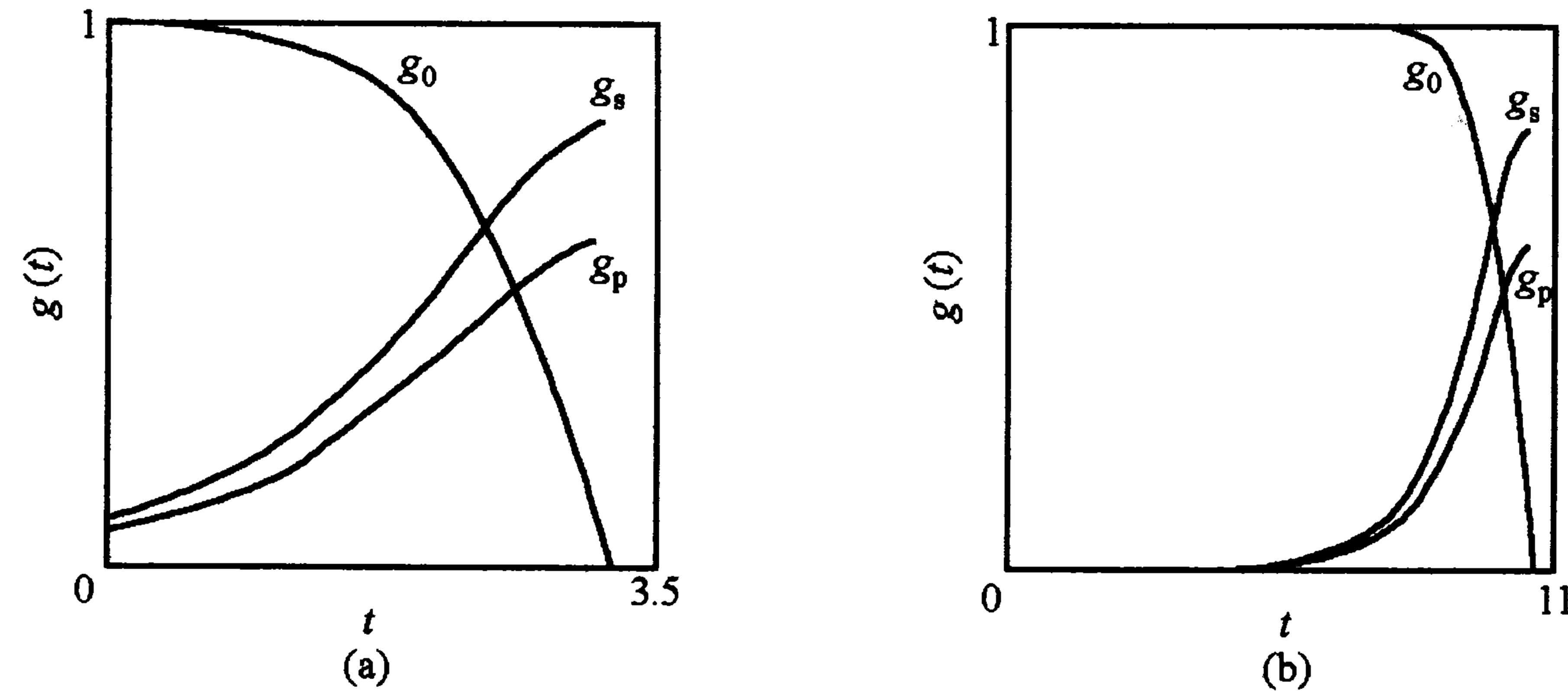


图 7.4　SRS 中各波的非线性演化

(a) $C_4=3,\beta_0=2,\beta_s=1.2,\beta_p=0.8$，(b) $C_4=10,\beta_0=2,\beta_s=1.2,\beta_p=0.8$

在非线性演化过程中，增长率(或衰减率)Γ 不再是常数. 为了估算不稳定过程发展的快慢，可以从各波模的解析解

$$g_0(t) = G_0\tanh(C_4 - \sqrt{\beta_s\beta_p}G_0 t)$$

$$= G_0\tanh\left[C_4\left(1 - \frac{\sqrt{\beta_s\beta_p}}{C_4}G_0 t\right)\right]$$

中，令括号中的量为零来得到一个特征的“非线性饱和时间”

$$\tau_{SRS} = \frac{C_4}{\sqrt{\beta_s\beta_p}G_0} \tag{7.122}$$

和相应的“非线性增长率”

$$\Gamma_{SRS} = \frac{1}{\tau_{SRS}} = \frac{\sqrt{\beta_s\beta_p}G_0}{C_4}. \tag{7.123}$$

可以看出，增长时间正比于 C_4，当散射波的初值 Δ^2/g_{00}^2 小时，C_4 较大，因而整个非线性演化耗时较长. 这就解释了上面图 7.4 中不同 C_4 值演化趋势的不同. 为了使大家对于 SRS 不稳定达到饱和所需的特征时间有一定的量的概念，取泵波强度为 $I_0=10^{13}\ \mathrm{W/cm^{-2}}$，波长为 $\lambda_0=0.35\ \mu\mathrm{m}$，可得 $\tau_{SRS}<0.2$ ps(在估算中 C_4 设为一个在 3～10 间的量). 对于更强的泵波，饱和时间会更短. 一般说来在多数激光聚变实验所感兴趣的特征时间中，SRS 过程总是能达到饱和的.

(3) 一般情况下 SRS 因泵波衰竭而引起的非线性行为

如果在 SRS 过程的一开始，散射波的波模与泵波相比并不可忽略(例如，存在着超出热噪声水平的电子静电波，即所谓的“种子”波场)，或相位差 $\theta(0)\neq0$，同时以后的 $\theta(t)\neq0,t>0$. 这时上面的解析分析就不合适了. 但利用前面得到的三个守恒量，仍可以给出非线性演化行为的定性描述. 最后，通过数值解模耦合方程也可以得出非线性演化的图像，并可以检验各种近似方法的正确程度.

利用三个守恒量，可将 SRS 的模耦合方程(7.97)—(7.99)改写成

$$\left(\frac{\partial g_0^2}{\partial t}\right)^2 + 4[C_1^2\beta_0^2 - \beta_s\beta_p g_0^2(g_0^2 - C_2\beta_0)(g_0^2 - C_3\beta_0)] = 0, \tag{7.124}$$

$$\left(\frac{\partial g_s^2}{\partial t}\right)^2 + 4[C_1^2\beta_s^2 + \beta_0\beta_p g_s^2(g_s^2 - C_2\beta_s)(g_s^2 - (C_2 - C_3)\beta_s)] = 0, \tag{7.125}$$

$$\left(\frac{\partial g_p^2}{\partial t}\right)^2 + 4[C_1^2\beta_p^2 + \beta_0\beta_s g_p^2(g_p^2 - C_3\beta_p)(g_p^2 - (C_3 - C_2)\beta_p)] = 0. \tag{7.126}$$

仔细看来,上面三个方程都有着"动能+势能=总机械能"的形式

$$\left(\frac{dx_\alpha}{dt}\right)^2 + V_\alpha(x_\alpha) = E_\alpha, \quad \alpha = 0,s,p,$$

其中 x 就是三个方程中的波模平方 g_α^2,E 就是三个方程中的常数 $4C_1^2\beta_\alpha^2$,而 V_α 则是三个方程中的剩余项,它们具有势能的物理意义——通常被称为赝势或者说 Sagdeev 势. 按照这样的物理图像,泵波和两个散射波就像在保守势场中的"粒子". 可以证明(这里就不详述了),对应着上面三个方程的势能 V_α 都是开口朝上的势阱,泵波像一开始位于阱口边的粒子,而散射波则是位于阱底附近的粒子. 在"泵波粒子"沿阱壁向下滑的过程中它把动能交给"散射波粒子",从而使"散射波粒子"从低势能处上升到高势能处. 最后,"泵波粒子"到达阱底时,"散射波粒子"也达到了其最高势能处. 由于在本章中没有考虑各种耗散效应(如碰撞或波-粒子共振相互作用所引起的波能被吸收),故整个 SRS 三波体系中的总波能是守恒的. 因此在"泵波粒子"到达阱底后,它会因"惯性"而继续沿壁上升,而"散射波粒子"则会回头下降;如此往返不已,就像光滑的弹子在重力势场中的运动一样.

对方程(7.124)—(7.126)的数值解也证明了上述图像. 图 7.5 就是通过数值计算得出的 SRS 三波非线性演化图. 图中分别给出了势能 V_α,波模 $g_\alpha(t)$ 及相位差 $\theta(t)$ 的图像. 从相位差的时间演化可以看出,它在一个演化周期中基本保持常量,只是在泵波衰竭到底(同时散射波达到饱和)的前后有一急剧的跳跃——从 $0\to\pi$. 因此相位差的突变,在使整个 SRS 过程随时间往返振荡时起了

关键作用.

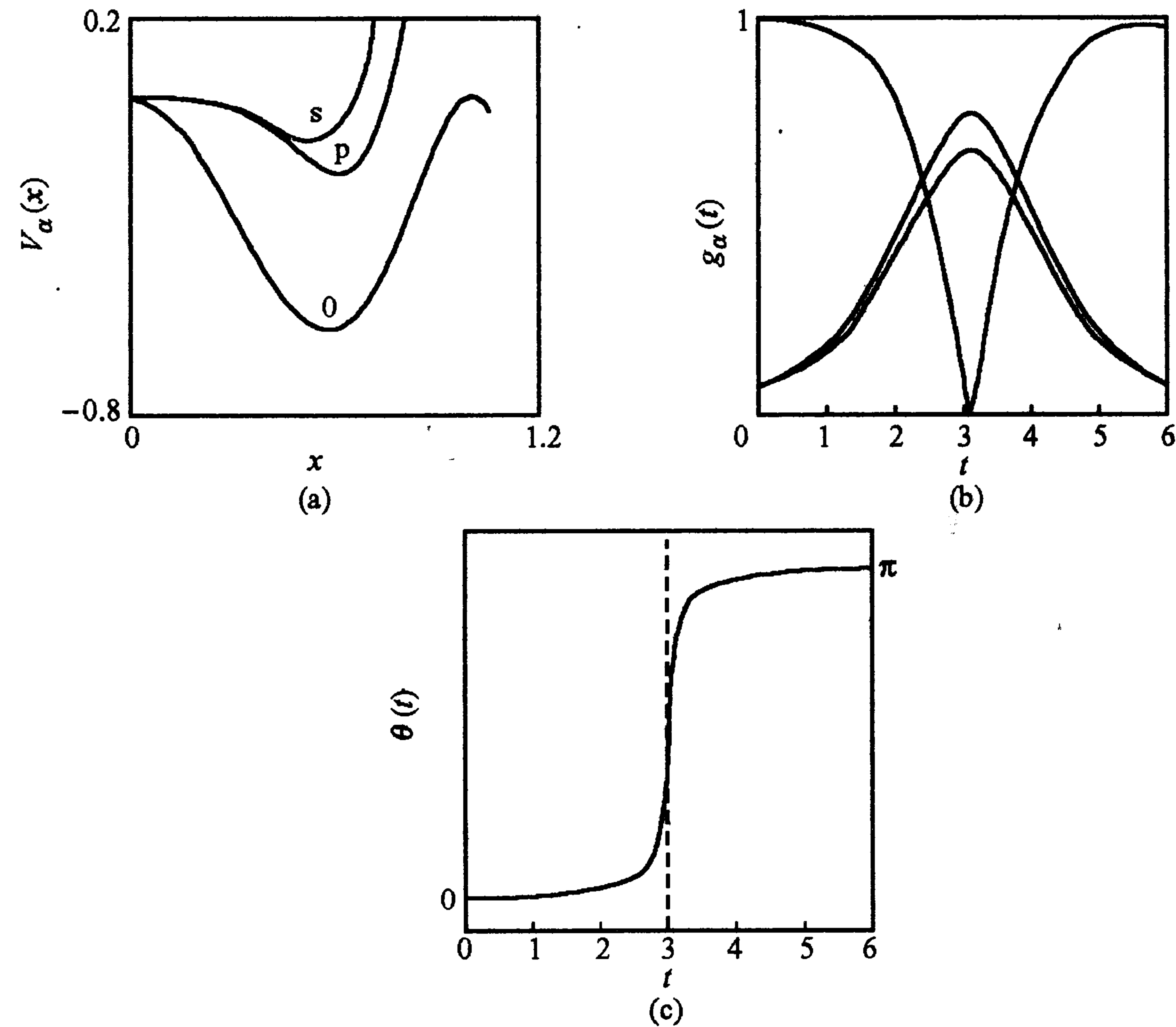


图 7.5 SRS 非线性演化过程中,(a)势能 $V_\alpha(x_\alpha)$,(b)波模 $g_\alpha(t)$及(c)相位差 $\theta(t)$的图形

2. SBS 过程的非线性行为

从 SBS 的模耦合方程组(7.105)—(7.107)出发,完全类似于上一节中对 SRS 非线性演化的讨论,可以找到此组方程的三个守恒量

$$C_1 = g_0 g_s g_a \cos\theta, \quad C_2 = \frac{g_0^2}{\beta_0} + \frac{g_s^2}{\beta_s}, \quad C_3 = \frac{g_0^2}{\beta_0} - \frac{g_a^2}{\beta_a}. \tag{7.127}$$

由此可得出第一个守恒量 $C_1=0$ 时,非线性演化方程的解析解:

$$g_0(t) = G_0\tanh(C_4 - \sqrt{-\beta_s\beta_a}G_0 t), \tag{7.128}$$

$$g_s(t) = G_0\sqrt{\frac{\beta_s}{\beta_0}}\operatorname{arccosh}(C_4 - \sqrt{-\beta_s\beta_a}G_0 t), \tag{7.129}$$

$$g_p(t)=G_0\sqrt{-\frac{\beta_a}{\beta_0}}\operatorname{arccosh}(C_4-\sqrt{-\beta_s\beta_a}G_0t). \quad (7.130)$$

其中

$$G_0=\sqrt{g_{00}^2+\Delta^2},\quad \Delta^2=\frac{\beta_0 g_s^2}{\beta_s},$$

而 SBS 的“非线性饱和特征时间”为

$$\tau_{\text{SBS}}=\frac{C_4}{\sqrt{-\beta_s\beta_a}},\quad C_4=\operatorname{arctanh}\frac{1}{\sqrt{1+\Delta^2/g_{00}^2}}. \quad (7.131)$$

在初始散射波模和相位差取任意值时，也有相应的赝势方程：

$$\left(\frac{\partial g_0^2}{\partial t}\right)^2+4[C_1^2\beta_0^2+\beta_s\beta_a g_0^2(g_0^2-C_2\beta_0)(g_0^2-C_3\beta_0)]=0, \quad (7.132)$$

$$\left(\frac{\partial g_s^2}{\partial t}\right)^2+4[C_1^2\beta_s^2-\beta_0\beta_a g_s^2(g_s^2-C_2\beta_s)(g_s^2-(C_2-C_3)\beta_s)]=0, \quad (7.133)$$

$$\left(\frac{\partial g_a^2}{\partial t}\right)^2+4[C_1^2\beta_a^2+\beta_0\beta_s g_a^2(g_a^2+C_3\beta_a)(g_a^2-(C_2-C_3)\beta_a)]=0. \quad (7.134)$$

其演化的行为和物理图像也与 SRS 的非线性演化相似，这里就不详述了.

3. 四波过程非线性行为的特点

本章给出的非线性耦合模型，还可以描述许多四波过程. 这些四波过程的线性分析和非线性分析完全可以类比于上面讨论过的三波过程来进行. 但四波(因泵波衰竭而引起的)非线性演化与三波非线性演化过程在物理上有些不同，它们对于散射波的初始幅度(也即种子的强度)更为敏感. 因此，对一个已经被扰动过的湍流等离子体，四波参量过程可能会起到很重要的作用. 下面将以一个四波过程为例来说明. 这个过程相当于 SRS 过程的扩展——出现了两支电子静电波. 它们的能量和动量耦合关系是

$$\omega_0=\omega_s+\omega_{p1}+\omega_{p2},\quad \boldsymbol{k}_0=\boldsymbol{k}_s+\boldsymbol{k}_{p1}+\boldsymbol{k}_{p2}.$$

由于它和 SRS 过程很类似，所以可以类比于 SRS 线性稳定性分析一样的方法来讨论，详细的推导过程在这里就不给出了(有兴趣的读者请参看文献[9]).

从这个四波过程的模耦合方程可以导出四个守恒量

$$C_1=g_0g_sg_1g_2\sin\theta,\quad C_2=\frac{g_0^2}{\beta_0}-\frac{g_s^2}{\beta_s},$$

$$C_3=\frac{g_0^2}{\beta_0}+\frac{g_1^2}{\beta_1},\quad C_4=\frac{g_0^2}{\beta_0}+\frac{g_2^2}{\beta_2}.$$

当第一个守恒量 $C_1=0$(这时 $\cos\theta_0=1$ 或初始散射波的强度可以忽略)时，有解析解

$$g_0(t)=G_0\frac{1-\Gamma't}{\sqrt{(1-\Gamma't)^2+\Delta^2/g_{00}^2}},$$

其中的四波“非线性增长率”为

$$\Gamma'=\sqrt{-\frac{\beta_s\beta_1\beta_2}{\beta_0}}\frac{G_0}{g_{00}}\Delta,\quad G_0=\sqrt{g_{00}^2+\Delta^2},$$

$$\Delta^2=\left|\frac{\beta_0}{\beta_s}\right|g_{s0}^2=\frac{\beta_0}{\beta_1}g_{10}^2=\frac{\beta_0}{\beta_2}g_{20}^2.$$

Γ' 和三波的“非线性增长率”Γ_{SRS}的最大不同在于：Γ_{SRS}对散射波的种子(初始幅度)不敏感，而 Γ' 却正比于散射波的种子(初始幅度)Δ. 前者在种子的相对值(Δ/g_{00})变化 3 个数量级时只有 3 倍左右的改变；而后者却有同样数量级的改变. 因此，如果在一开始等离子体中就已经有了相当强的电子静电波(它们可以是由先期发展的 SRS 或其他参量过程所激发的)，则这种四波过程就会有很大的非线性增长率和很短的饱和时间. 因此我们应该对各种四波参量过程给予足够的重视.

对于 $C_1\neq0$(初始相位差不为零，或散射波的种子较强而不可忽略)的一般情况，从模耦合方程和四个守恒量，可以得到四个波的赝势型的运动方程. 这些方程组所描述的四波参量过程的非线

性演化行为和前面 SRS 非线性演化有相同的图像和特点.

7.4 未完全剥离等离子体中的参量过程

本章从 7.2 节开始，是从波动方程(7.17)出发来描述各种参量过程的. 在(7.17)式中只考虑了感生电流对波动方程的影响. 这些感生电流是由于等离子体中自由带电粒子(电子及离子)受到了外来电磁波(泵波)以及等离子体中散射波电场的扰动而产生的. 但在强激光照射高 Z 固体靶所产生的等离子体中，往往还存在着大量未被完全电离的离子. 这些离子还带有一些处在束缚态的电子，这些束缚电子云会在入射的强激光或等离子体中被激发的强散射波电场的作用下，产生极化效应. 按电动力学的普遍规律，这种极化效应又会通过波动方程反过来影响泵波和散射波的耦合过程. 所以在这种情况下，除了自由电子，束缚电子也将对参量过程起重要作用. 本节将以受激拉曼散射(SRS)过程和受激布里渊散射过程(SBS)为例，导出它们在部分剥离等离子体中的非线性模耦合方程组. 然后通过线性增长率的解析表达式和非线性演化的数值解，分析部分剥离等离子体的非线性极化率对这两个过程的影响.

本节的主要参考文献见文献[10].

7.4.1 基本波动方程

我们从最一般的波动方程(7.1)出发

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} + c^2[\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{E})] = -4\pi \frac{\partial \boldsymbol{J}}{\partial t} - 4\pi \frac{\partial^2 \boldsymbol{P}}{\partial t^2},$$

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 + \boldsymbol{E}_s + \boldsymbol{E}_l. \tag{7.1}$$

其中 $\boldsymbol{E}_{0,s,l}$ 分别是泵波、散射电磁波以及散射(电子或离子)静电波的电场强度，$\boldsymbol{J} = -en_e\boldsymbol{v}_e$ 是通常的由自由电子在泵波和散射波电场扰动下运动而产生的感生电流，$\boldsymbol{P}$ 则是由于束缚电子云的极化而产生的等离子体极化强度矢量. 和以往讨论参量过程时的做法一样，这里，扰动电流是通过耦合的电子流体方程组求出的. 而极化强度对外加电场的依赖则比较复杂，在外电场强小于"玻尔场强" E_{sat}，$E<E_{sat}$(E_{sat} 是在氢原子玻尔半径处的核电场强度 $E_{sat} \approx 5.2\times10^9$ V/cm，对应激光强度 $I_{sat} \approx 3.6\times10^{16}$ W/cm^2)时，一般非线性光学文献中往往取

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{E}) \approx \chi^{(1)}\boldsymbol{E} + \chi^{(2)} \cdot \boldsymbol{EE} + \chi^{(3)}(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E})\boldsymbol{E}, \tag{7.135}$$

这里 $\chi^{(1)}$，$\chi^{(2)}$，$\chi^{(3)}$ 分别是线性的，二阶的及三阶的非线性极化率，而且是与电场无关的常数. 在一般情况中，一阶极化率应该是二阶张量，二阶极化率应该是三阶张量，三阶极化率应该是四阶张量，……. 但这些张量在我们所感兴趣的部分剥离等离子体中，应该如何取值？以及在强激光场($I_0>I_{sat}$)下，极化强度对电场的幂级数展开不再适用后，极化强度对电场应该是什么样的依赖关系？这在目前都不清楚，它正成为当前强场物理研究中需要解决的一个课题. 在本节中为了确定性起见，取非线性极化率为上面的表达式.

把(7.135)式代入(7.1)式，并代入从电子、离子流体耦合方程组解得的扰动电流 $\boldsymbol{J}$ 后，可以分别给出在参量过程中电磁波 $\boldsymbol{E}_t$ 和电子静电波 $\boldsymbol{E}_p$ 所应满足的非线性耦合(全波)波动方程组

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{c^2}{N_0^2}\nabla^2 + \frac{\omega_{pe}^2}{N_0^2}\right)\boldsymbol{E}_t = \frac{4\pi}{N_0^2}\dot{\boldsymbol{J}}^{t}_{non} - \frac{4\pi}{N_0^2}\chi^{(2)} \cdot \frac{\partial^2(\boldsymbol{EE})_t}{\partial t^2} - \frac{4\pi\chi^{(3)}}{N_0^2}\frac{\partial^2[(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E})\boldsymbol{E}]_t}{\partial t^2},$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{3v_{te}^2}{N_0^2}\nabla^2 + \frac{\omega_{pe}^2}{N_0^2}\right)\boldsymbol{E}_p = \frac{4\pi}{N_0^2}\dot{\boldsymbol{J}}^{p}_{non} - \frac{4\pi}{N_0^2}\chi^{(2)} \cdot \frac{\partial^2(\boldsymbol{EE})_p}{\partial t^2} - \frac{4\pi\chi^{(3)}}{N_0^2}\frac{\partial^2[(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E})\boldsymbol{E}]_p}{\partial t^2}.$$

其中 $v_{te}=(T_e/m_e)^{1/2}$ 是电子的特征热速度，$N_0=(1+4\pi\chi^{(1)})^{1/2}$ 是等离子体的线性折射率，而 $\dot{\boldsymbol{J}}^{t}_{non}$，$\dot{\boldsymbol{J}}^{p}_{non}$，则是电磁波和静电波相应

的非线性感应电流的变化速率(见(7.73)和(7.81)式).

对于 SRS($\omega_0=\omega_s+\omega_p$, $\boldsymbol{k}_0=\boldsymbol{k}_s+\boldsymbol{k}_p$,这里 0,s 和 p 分别是代表泵波、散射电磁波和电子等离子体波的下标)来说,总电场由下面三部分组成:$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_0+\boldsymbol{E}_s+\boldsymbol{E}_p$. 对于 SBS($\omega_0=\omega_s+\omega_a$, $\boldsymbol{k}_0=\boldsymbol{k}_s+\boldsymbol{k}_a$,这里 0,s 和 a 分别是代表泵波、散射电磁波和离子声波的下标)来说,总电场由下面三部分组成:$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_0+\boldsymbol{E}_s+\boldsymbol{E}_a$. 在前面(7.3.3 小节)讨论纯等离子体的 SBS 过程时,对离子声波用的是关于离子密度扰动满足的波动方程. 在本节,为了统一,将采用对于离子声波扰动电场所满足的波动方程,这个低频扰动电场可以通过泵波场及离子密度扰动从(7.10)式

$$\boldsymbol{E}_a=-\frac{m}{e}\nabla(\boldsymbol{u}^2)^{\mathrm{L}}-\frac{\gamma_e T_e}{e n_0}\nabla n^{\mathrm{L}}$$

来得出.

下面将讨论可以将波场分成快变和慢变因子时的情况,即可以采用模耦合近似来处理参量过程的情况. 采取和前面几节相同的作法,令

$$\boldsymbol{E}_i(\boldsymbol{r},t)=\frac{1}{2}\boldsymbol{e}_i\left[\varepsilon_i \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}_i\cdot\boldsymbol{r}-\omega_i t)}+\varepsilon_i^*\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\boldsymbol{k}_i\cdot\boldsymbol{r}-\omega_i t)}\right],\quad i=0,\mathrm{s},\mathrm{p(a)},$$

和

$$n^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{r},t)=\frac{1}{2}\left[N\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}_a\cdot\boldsymbol{r}-\omega_a t)}+\mathrm{c.c.}\right],$$

则有

$$\varepsilon_a=-\mathrm{i}(a_1\varepsilon_0\varepsilon_s^*+a_2N),\quad a_1=\frac{k_a e}{2m\omega_0\omega_s},$$

$$a_2=\frac{4\pi e}{m}\frac{k_a}{\omega_{pe}^2}\gamma_e k_B T,\tag{7.136}$$

$$\boldsymbol{u}_i(\boldsymbol{r},t)=\frac{1}{2}\boldsymbol{e}_i\frac{e}{\mathrm{i}m\omega_i}\left[\varepsilon_i\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}_i\cdot\boldsymbol{r}-\omega_i t)}-\varepsilon_i^*\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\boldsymbol{k}_i\cdot\boldsymbol{r}-\omega_i t)}\right],$$

$$i=0,\mathrm{s},\mathrm{p(a)}.\tag{7.137}$$

上式中 ε_i 代表电场 $\boldsymbol{E}_i$ 中随时间和空间慢变的幅度,$\boldsymbol{e}_i$ 则是电场的(极化)方向矢量.

经过冗长的代数运算后,可以得到描述上述两参量过程的关于 $\varepsilon_i(i=0,\mathrm{s},\mathrm{p(a)})$ 的非线性耦合方程组. 然后,进一步将 ε_i 的幅值与幅角分开

$$\varepsilon_i=g_i\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Omega_i t+\mathrm{i}\alpha_i},\tag{7.138}$$

其中

$$\Omega_i=\frac{\omega_i^2-\omega_{i0}^2}{2\omega_i},\quad i=0,\mathrm{s},\mathrm{p(a)},\tag{7.139}$$

$$\omega_{00(s0)}^2=\omega_{pe}^2+c^2k_{0(s)}^2,\quad \omega_{p0}^2=\omega_{pe}^2+3v_t^2k_p^2,\quad \omega_{a0}^2=k_a^2C_s^2.\tag{7.140}$$

进一步假定 $\Omega_0=\Omega_s+\Omega_{p(a)}$,可得关于实幅值 g_i 及实幅角 α_i 的模耦合非线性方程组,它们描述了本节两个参量过程的非线性时间演化行为.

1. SRS 过程的模耦合方程

对于 SRS 过程,它们的具体形式是(详见文献[11])

$$\begin{aligned}(1+\delta_i)\frac{\partial g_i}{\partial t}=&\left[A_i\cos\gamma+\frac{2\pi\zeta_i}{N_0^2}\left(\frac{\omega_i}{2}-\Omega_i\right)\sin\gamma_i\right]g_jg_k\\&-\frac{2\pi\zeta_i}{N_0^2}\left[\cos\gamma\frac{\partial g_jg_k}{\partial t}+\sin\gamma_i\frac{\partial\alpha_{jk}}{\partial t}g_jg_k\right]\\&-g_i\frac{\partial\delta_i}{\partial t},\end{aligned}\tag{7.141}$$

$$\begin{aligned}(1+\delta_i)g_i\frac{\partial\alpha_i}{\partial t}=&-\left[A_i\sin\gamma_i-\frac{2\pi\zeta_i}{N_0^2}\left(\frac{\omega_i}{2}-\Omega_i\right)\cos\gamma\right]g_jg_k\\&+\frac{2\pi\zeta_i}{N_0^2}\left[\sin\gamma_i\frac{\partial g_jg_k}{\partial t}-\cos\gamma\frac{\partial\alpha_{jk}}{\partial t}g_jg_k\right]\\&+\left(\frac{\omega_i}{2}-\Omega_i\right)\delta_ig_i.\end{aligned}\tag{7.142}$$

其中

$$\delta_i=\frac{2\pi\chi^{(3)}}{N_0^2}\left[\frac{3}{2}|\varepsilon_i|^2+\sum_{j\neq i}^{0,s,p}(1+2a_{ij}^2)|\varepsilon_j|^2\right],\tag{7.143}$$

$$\zeta_i = \sum_{j\neq i,k\neq j,i} a_{ij}(\vec{\chi}^{(2)} \cdot \boldsymbol{e}_k), \tag{7.144}$$

$$A_i = \begin{cases} -Aa_{0s}(1+\omega_s\omega_p/\omega_{pe}^2), & i=0, \\ -Aa_{0s}(1-\omega_0\omega_p/\omega_{pe}^2), & i=s, \\ Aa_{0s}, & i=p, \end{cases} \tag{7.145}$$

$$A = \frac{ek_p\omega_{pe}^2}{2m\omega_0\omega_s\omega_p}, \quad a_{ij} = \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j. \tag{7.146}$$

此外 $\gamma = \alpha_0 - \alpha_s - \alpha_p$，而

$$\alpha_{jk} = \begin{cases} \alpha_s + \alpha_p, & i=0 \\ \alpha_0 - \alpha_p, & i=s, \\ \alpha_0 - \alpha_s, & i=p \end{cases} \quad \gamma_i = \begin{cases} \gamma, & i=0, \\ -\gamma, & i=s, \\ -\gamma, & i=p. \end{cases} \tag{7.147}$$

2. SBS 过程的模耦合方程

对于 SBS 过程，非线性耦合方程组是(详见文献[12])

$$(1+\delta_0)\frac{\partial g_0}{\partial t} + \delta_{0I}\left(\frac{\omega_0}{2} - \Omega_0\right)g_0 =$$

$$(\beta_0\sin\gamma - \beta_{0I}\cos\gamma)g_sg_a - \frac{\partial\delta_0}{\partial t}g_0 + \frac{2\pi\zeta_0}{N_0^2}\frac{\partial}{\partial t}(a_2g_sg_a\sin\gamma)$$

$$-\frac{2\pi\zeta_0}{N_0^2}(a_1g_s^2g_0 + a_2g_sg_a\cos\gamma)\frac{\partial\alpha_0}{\partial t}, \tag{7.148}$$

$$(1+\delta_s)\frac{\partial g_s}{\partial t} + \delta_{sI}\left(\frac{\omega_s}{2} - \Omega_s\right)g_s =$$

$$-(\beta_s\sin\gamma + \beta_{sI}\cos\gamma)g_0g_a - \frac{\partial\delta_s}{\partial t}g_s + \frac{2\pi\zeta_s}{N_0^2}\frac{\partial}{\partial t}(a_2g_0g_a\sin\gamma)$$

$$+\frac{2\pi\zeta_s}{N_0^2}(a_1g_0^2g_s + a_2g_0g_a\cos\gamma)\frac{\partial\alpha_s}{\partial t}, \tag{7.149}$$

$$\frac{\partial g_a}{\partial t} = \beta_ag_0g_s\sin\gamma. \tag{7.150}$$

$$(1+\delta_0)g_0\frac{\partial\alpha_0}{\partial t} - \delta_0\left(\frac{\omega_0}{2} - \Omega_0\right)g_0 =$$

$$(\beta_0\cos\gamma - \beta_{0I}\sin\gamma)g_sg_a + \frac{2\pi\zeta_0}{N_0^2}(a_2g_sg_a\sin\gamma)\frac{\partial\alpha_0}{\partial t}$$

$$+\frac{2\pi\zeta_0}{N_0^2}\frac{\partial}{\partial t}(a_1g_s^2g_0 + a_2g_sg_a\cos\gamma), \tag{7.151}$$

$$(1+\delta_s)g_s\frac{\partial\alpha_s}{\partial t} - \delta_s\left(\frac{\omega_s}{2} - \Omega_s\right)g_s =$$

$$(\beta_s\cos\gamma - \beta_{sI}\sin\gamma)g_0g_a + \frac{2\pi\zeta_s}{N_0^2}(a_2g_0g_a\sin\gamma)\frac{\partial\alpha_s}{\partial t}$$

$$-\frac{2\pi\zeta_s}{N_0^2}\frac{\partial}{\partial t}(a_1g_0^2g_s + a_2g_0g_a\cos\gamma), \tag{7.152}$$

$$g_a\frac{\partial\alpha_a}{\partial t} = -\beta_ag_0g_s\cos\gamma. \tag{7.153}$$

其中

$$\delta_i = \frac{2\pi\chi^{(3)}}{N_0^2}\left[\frac{3}{2}|\varepsilon_i|^2 + \sum_{j\neq i}^{0,s,a}(1+2a_{ij}^2)|\varepsilon_j|^2\right], \quad i=0,s, \quad \delta_a \equiv 0, \tag{7.154}$$

$$\zeta_i = \sum_{j\neq i,k\neq j,i}^{0,s,a} a_{ij}(\chi^{(2)} \cdot \boldsymbol{e}_k), \quad i=0,s, \quad \zeta_a \equiv 0, \tag{7.155}$$

$$\beta_0 = -\frac{\omega_{pe}^2}{4n_0\omega_0}a_{0s}, \quad \beta_s = -\frac{\omega_{pe}^2}{4n_0\omega_s}a_{0s}, \tag{7.156}$$

$$\beta_a = \frac{k_a^2\omega_{pi}^2}{16\pi m\omega_0\omega_s\omega_a}a_{0s}, \quad a_{ij} = \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j. \tag{7.157}$$

此外模耦合方程中的 $\gamma = \alpha_0 - \alpha_s - \alpha_a$ 是 SBS 过程中三波间的相位差，而

$$\beta_{0I} = \frac{2\pi\zeta_0}{N_0^2}a_2\left(\Omega_0 - \frac{\omega_0}{2}\right), \quad \delta_{0I} = -\frac{2\pi\zeta_0}{N_0^2}a_1g_s^2, \tag{7.158}$$

$$\beta_{sI} = -\frac{2\pi\zeta_s}{N_0^2}a_2\left(\Omega_s - \frac{\omega_s}{2}\right), \quad \delta_{sI} = \frac{2\pi\zeta_s}{N_0^2}a_1g_0^2, \tag{7.159}$$

其中 a_1, a_2 见(7.136)式.

当不考虑极化效应时 $\chi^{(2)} = \chi^{(3)} = 0$，上面的方程组就都回复到普通、完全电离等离子体中的表达形式(见 7.3.3 小节).

7.4.2 SRS 和 SBS 过程的线性不稳定性增长率

在不稳定性发展的最初阶段,可令

$$g_0(t) \approx g_{00} = \text{常数}, \quad g_s \sim g_{p(a)} \sim 0,$$
$$\partial \alpha_i / \partial t \sim 0 \quad (i = 0, s, p(a)), \quad \gamma = \text{常数}.$$

1. SRS 过程的线性不稳定性分析

由于幅角不再变化,由模方程(7.141)可得

$$(1+\delta_s^0)\frac{\partial g_s}{\partial t} = A_s' g_p - \zeta_s' \frac{\partial g_p}{\partial t},$$

$$(1+\delta_p^0)\frac{\partial g_p}{\partial t} = A_p' g_s - \zeta_p' \frac{\partial g_s}{\partial t},$$

$$\delta_i^0 \approx \frac{2\pi\chi^{(3)}}{N_0^2}(1+2a_{i0}^2)g_{00}^2, \quad \zeta_i' = \frac{2\pi\zeta_i}{N_0^2}g_{00}\cos\gamma,$$

$$A_i' = \left(A_i\cos\gamma - \frac{\pi\zeta_i}{N_0^2}\omega_i\sin\gamma\right)g_{00} \quad (i = s, p).$$

令 $g_i(t) = g_{i0}\exp(\Gamma_R t)$,代入上面的两个耦合方程后,可得到线性增长率

$$\Gamma_R = \frac{\zeta_p' A_s' + \zeta_s' A_p'}{2[(1+\delta_s^0)(1+\delta_p^0)+\zeta_s'\zeta_p']} \times \left\{-1 \pm \sqrt{1 + \frac{4A_s'A_p'[(1+\delta_s^0)(1+\delta_p^0)+\zeta_s'\zeta_p']}{(\zeta_p'A_s' + \zeta_s'A_p')^2}}\right\}. \tag{7.160}$$

(i) 当不考虑所有的非线性极化率(即取 $\chi^{(2)} = \chi^{(3)} = 0$)时,上式中的

$$\delta_i^0 = \zeta_i' = 0, \quad A_i' = A_i\cos\gamma g_{00}, \quad i = s, p,$$

结果(7.178)式退化到普通的 SRS 线性增长率

$$\Gamma_R^{(0)} = \sqrt{A_s A_p}g_{00}|\cos\gamma| \approx \frac{k_p u_0}{4}\frac{\omega_p}{\omega_s}|\boldsymbol{e}_0 \cdot \boldsymbol{e}_s||\cos\gamma|. \tag{7.101}$$

(ii) 当保留所有的二、三阶极化率项 $\delta_i(\chi^{(3)})$ 和 $\zeta_i(\chi^{(2)})$,并假定它们对线性增长率的修正为小量时,(7.160)式可以近似写作 $\Gamma_R = \Gamma_R^{(0)} + \Gamma_R^{(2)} + \Gamma_R^{(3)}$,其中

$$\Gamma_R^{(0)} + \Gamma_R^{(3)} = \frac{\Gamma_R^{(0)}}{\sqrt{1+\delta_s^{(0)}+\delta_p^{(0)}}} \approx \Gamma_R^{(0)} - \frac{1}{2}(\delta_s^{(0)}+\delta_p^{(0)})\Gamma_R^{(0)}, \tag{7.161}$$

$$\frac{\Gamma_R^{(3)}}{\Gamma_R^{(0)}} = -\frac{1}{2}(\delta_s^{(0)}+\delta_p^{(0)}) = -\frac{2\pi\chi^{(3)}}{N_0^2}(1+a_{0s}^2+a_{0p}^2)g_{00}^2 \tag{7.162}$$

$$= -\frac{2N_2}{N_0^2}(1+a_{0s}^2+a_{0p}^2)I_0^2, \tag{7.163}$$

其中 N_2 是“等效的非线性折射率”,而 I_0 是泵波强度,

$$N_2 = \frac{8\pi^2}{cN_0}\chi^{(3)}, \quad I_0 = \frac{c}{4\pi}N_0\langle \boldsymbol{E}_0 \cdot \boldsymbol{E}_0\rangle = \frac{c}{8\pi}N_0 g_{00}^2.$$

在强激光造成的高 Z(未完全剥离)等离子体中,准确的非线性极化率取值目前还无法得到.但在文献[2]的附录 2 中给出了极化率的估算公式(方括号内的单位为方括号紧左侧物理量的单位)

$$\chi^{(1)} \approx 4\times 10^{-24}n_a[\text{cm}^{-3}], \quad \chi^{(3)}(\text{esu}) \approx 10^{-38}n_a[\text{cm}^{-3}],$$

其中 esu 表示静电单位制,于是等效的非线性折射率(在原文献中表示成 η_2)

$$N_2[\text{cm}^2/\text{W}] = \frac{8\pi^2}{cN_0}\chi^{(3)} \sim 5\times 10^{-40}n_a[\text{cm}^{-3}]. \tag{7.164}$$

在激光聚变和激光-固体靶相互作用中,所产生等离子体中的离子密度约为 $n_a \approx 10^{21}\text{cm}^{-3}$,于是在 $\Gamma_R^{(3)}$ 中的折射率可估为

$$N_0 \approx 1 + 4\times 10^{-3} \approx 1, \quad N_2 \approx 5\times 10^{-19}\ \text{cm}^2/\text{W},$$

这样

$$\Gamma_R^{(3)}/\Gamma_R^{(0)} \sim -10^{-18}I_0[\text{W/cm}^{-2}].$$

这表示,当泵波强度 $I_0 \geq 10^{17}\ \text{W/cm}^2$ 时,三阶非线性极化率对 SRS 线性不稳定增长率会产生明显影响(但这时等离子体的极化强度对电场强度的依赖也不再能通过幂级数展开来表达).在下面

对模耦合方程非线性演化作的数值解中可以看到，实际上在 $I_0 \geqslant 10^{15}\ \mathrm{W/cm^2}$ 时，三阶非线性极化率对 SRS 的非线性演化就已经产生明显影响了. 因此线性分析中对非线性极化率影响的估算是偏低的.

二阶非线性极化率 $\zeta(\chi^{(2)})$ 对 SRS 线性增长率的贡献是

$$\Gamma_{\mathrm{R}}^{(2)} = -\frac{\pi}{N_0^2}\left[(\zeta_{\mathrm{p}}A_{\mathrm{s}} + \zeta_{\mathrm{s}}A_{\mathrm{p}})g_{00}^2\cos^2\gamma + \frac{1}{2}\Gamma_{\mathrm{R}}^{(0)}\left(\frac{\zeta_{\mathrm{s}}\omega_{\mathrm{s}}}{A_{\mathrm{s}}} + \frac{\zeta_{\mathrm{p}}\omega_{\mathrm{p}}}{A_{\mathrm{p}}}\right)\tan\gamma\right]. \tag{7.165}$$

可以看到，它对线性不稳定增长率的影响比较复杂，上面式子的符号取决于相位差 γ、各波间极化关联 a_{ij} 以及各波极化矢量在二阶极化矢量 $\chi^{(2)}$ 上的投影. 不过按非线性光学对固体非线性极化率的一般讨论可知(例如参见文献[3])，只有在束缚电子所处的静电势阱是非中心对称的晶体中，$\chi^{(2)}$ 才不为零. 在一般的未完全剥离等离子体中，虽然对二阶非线性极化率 $\chi^{(2)}$ 完全没有讨论过，但它可能非常小，从而可以忽略. 因此在本书中将不对它的影响作进一步的讨论.

2. SBS 过程的线性不稳定性分析

从 SBS 过程的模耦合方程组(7.148)—(7.153)出发，按照和 SRS 线性稳定性分析同样的方法，可得

$$(1 + \delta_{\mathrm{s}}^0)\frac{\partial g_{\mathrm{s}}}{\partial t} + \frac{1}{2}\delta_{\mathrm{sI}}^{(0)}\omega_{\mathrm{s}}g_{\mathrm{s}} = -(\beta_{\mathrm{s}}\sin\gamma + \beta_{\mathrm{sI}}^{(0)}\cos\gamma)g_{00}g_{\mathrm{a}} + \frac{2\pi\zeta_{\mathrm{s}}}{N_0^2}a_2 g_{00}\sin\gamma\frac{\partial g_{\mathrm{a}}}{\partial t},$$

$$\frac{\partial g_{\mathrm{a}}}{\partial t} = \beta_{\mathrm{a}}g_{00}g_{\mathrm{s}}\sin\gamma,$$

其中

$$\delta_{\mathrm{s}}^0 \approx \frac{2\pi\chi^{(3)}}{N_0^2}(1 + 2a_{\mathrm{s0}}^2)g_{00}^2,\quad \delta_{\mathrm{sI}}^{(0)} = \frac{2\pi\zeta_{\mathrm{s}}}{N_0^2}a_1 g_{00}^2,\quad \beta_{\mathrm{sI}}^{(0)} \approx \frac{\pi\zeta_{\mathrm{s}}}{N_0^2}a_2\omega_{\mathrm{s}}.$$

令 $g_i(t) = g_{i0}\exp(\Gamma_{\mathrm{B}}t)$，代入上面的两个耦合方程后，可得到线性增长率

$$\Gamma_{\mathrm{B}} = \frac{\Gamma_{\mathrm{B}}^{(0)}}{\sqrt{1+\delta_{\mathrm{s}}^{(0)}}}\left[\sqrt{1 + \frac{\beta_{\mathrm{sI}}}{\beta_{\mathrm{s}}}\cot\gamma + \frac{(\delta_{\mathrm{sI}}^{(0)}\omega_{\mathrm{s}})^2}{16(1+\delta_{\mathrm{s}}^{(0)})(\Gamma_{\mathrm{B}}^{(0)})^2}} - \frac{\delta_{\mathrm{sI}}^{(0)}\omega_{\mathrm{s}}}{4\Gamma_{\mathrm{B}}^{(0)}\sqrt{1+\delta_{\mathrm{s}}^{(0)}}}\right]. \tag{7.166}$$

其中

$$\Gamma_{\mathrm{B}}^{(0)} = -\sqrt{-\beta_{\mathrm{s}}\beta_{\mathrm{a}}}\,|\sin\gamma|\,|\boldsymbol{e}_0\cdot\boldsymbol{e}_{\mathrm{s}}| \equiv \frac{k_{\mathrm{a}}u_0}{4}\sqrt{\frac{\omega_{\mathrm{pi}}^2\omega_0}{\omega_{\mathrm{s}}^2\omega_{\mathrm{a}}}}\,|\sin\gamma|\,|\boldsymbol{e}_0\cdot\boldsymbol{e}_{\mathrm{s}}|,$$

就是不考虑非线性极化率时的普通 SBS 线性增长率(7.111)—(7.112)式.

如果在非线性极化率中只考虑三阶极化率的影响，则可以在上式中只保留含 $\delta_{\mathrm{s}}^{(0)} \propto \chi^{(3)}$ 的线性项，而略去与二阶极化率有关的项($\beta_{\mathrm{sI}}, \delta_{\mathrm{sI}}^{(0)} \propto \zeta_{\mathrm{s}}(\chi^{(2)})$)，这样就得到

$$\Gamma_{\mathrm{B}}^{(0)} + \Gamma_{\mathrm{B}}^{(3)} = \frac{\Gamma_{\mathrm{B}}^{(0)}}{\sqrt{1+\delta_{\mathrm{s}}^{(0)}}}. \tag{7.167}$$

其中 $\delta_{\mathrm{s}}^{(0)}$ 在 SBS 与 SRS 中有相同的表达式，因此可以用同样的方法作量值估算：$\delta_{\mathrm{s}}^{(0)} \sim 2(1+2a_{\mathrm{s0}}^2)N_2I_0 \sim 10^{-18}I_0[\mathrm{W/cm^2}]$. 结果三阶极化率对 SBS 线性增长率的影响也与 SRS 过程一样：$\Gamma_{\mathrm{B}}^{(3)} \sim -10^{-18}I_0[\mathrm{W/cm^{-2}}]\Gamma_{\mathrm{B}}^{(0)}$.

至于二阶非线性极化率对 SBS 线性增长率的影响，由于表达式(7.182)比较复杂，并且 $\chi^{(2)}$ 的具体取值无法确定，所以这里就不讨论了. 对这个问题有兴趣的可以参考文献[12].

7.4.3 SRS 和 SBS 过程的非线性演化行为

从 SRS 的非线性耦合方程(7.141)—(7.142)以及 SBS 的非线性耦合方程(7.148)—(7.153)出发，通过数值计算可以得出它

们的非线性演化行为. 为了便于数值计算,需要对上述方程组进行重新整理. 首先,将这些方程进行无量纲化. 定义无量纲量

$$y_1 = \frac{g_0}{g_{00}},\quad y_2 = \frac{g_s}{g_{00}},\quad y_2 = \frac{g_u}{g_{00}}, \tag{7.168}$$

$$y_4 = \frac{\alpha_0}{g_{00}},\quad y_5 = \frac{\alpha_s}{g_{00}},\quad y_6 = \frac{\alpha_u}{g_{00}},\quad u = \mathrm{p(a)}, \tag{7.169}$$

其中 g_{00}是泵波的初始波模. 对某一个过程(SRS 或 SBS),这 6 个量构成一个 6 维矢量 $\boldsymbol{y}=\{y_i\}(i=1,2,\cdots,6)$. 无量纲的时间变量定义成 $w=\omega_0 t$,其中 ω_0 是泵波的频率. 于是经过繁重的代数运算,可以将这两个过程的非线性演化方程组分别写成下列形式

$$\overset{\Rightarrow}{D}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}w} = \boldsymbol{f}. \tag{7.170}$$

其中 6×6 的二阶的张量 $\overset{\Rightarrow}{D}=\{D_{ij}\}(i,j=1,2,\cdots,6)$是各波模和幅角时间导数前的系数矩阵,而 6 维矢量 $\boldsymbol{f}=\{f_i\}(i=1,2,\cdots,6)$是各方程式的非线性耦合项. 由于它们的具体表达式很复杂,这里就不列出了. 上述方程的解可以表示成

$$\frac{\mathrm{d}y_i}{\mathrm{d}w} = \frac{D^i}{D},\quad i = 1,2,\cdots,6, \tag{7.171}$$

其中 $D=\det[D_{ij}]$是矩阵 $\overset{\Rightarrow}{D}$的行列式,而 $D^k=\det[D_{ij}^k](k=1,2,\cdots,6)$则分别是另外 6 个矩阵的行列式,其中第 k 个矩阵$\{D_{ij}^k\}$是通过将原系数矩阵$\{D_{ij}\}$中的第 k 列用耦合矢量$\{f_i\}(i=1,2,\cdots,6)$中的诸元素取代后得到的.

(7.171)式是典型的常微分方程组,在给定初值后,可以用数值方法(例如龙格-库塔(Runge-Kutta)法)求出它们的时间演化行为. 在图 7.6—图 7.8 中分别给出了极化等离子体中 SRS 和 SBS 的非线性演化过程(详见文献[10],[13]).

图 7.6 给出了 SRS 非线性演化过程的一般图像(SBS 也类似),其中 y_7 是三波相位差 θ(或 γ)的无量纲量. 其基本行为和不考虑束缚电子的极化效应时(如图 7.5 所示)的非线性行为相似,

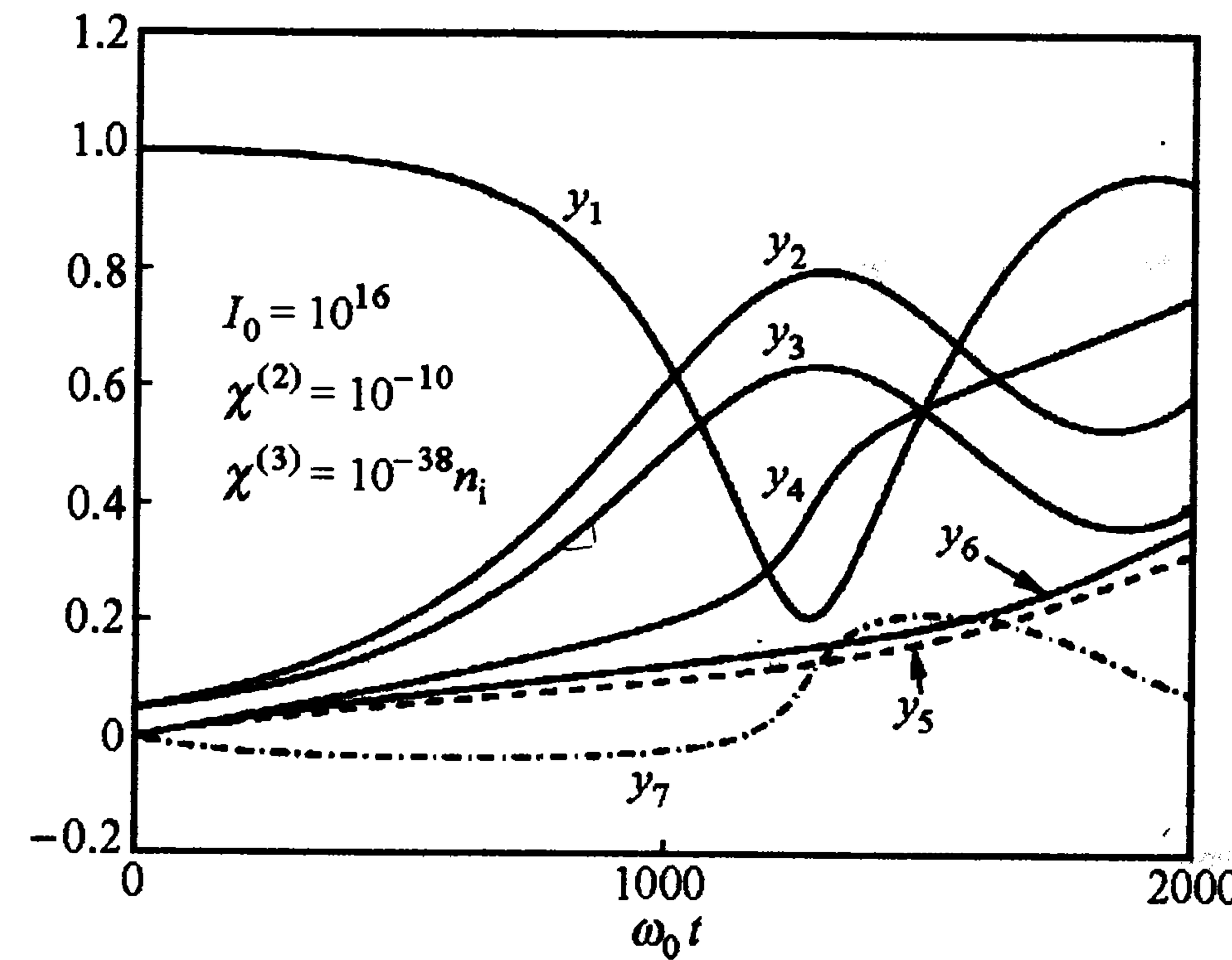


图 7.6 一般的 SRS 非线性演化行为

这里就不再讨论了. 其中散射波的时间行为可以用三个量来定性地描述: 非线性增长率(反映散射波上升速率),饱和强度(反映散射波所能达到的最大幅度)及饱和时间(散射波到达最大值所需时间). 增长率愈大表示参量过程愈不稳定,饱和强度愈大则表示参量过程所能耗散掉的泵波能量愈多. 如果我们所关心的物理过程的特征时间与饱和时间同量级,则饱和时间的准确估算是很重要的;但多数情况下饱和时间(一般在 10^{-13} s 数量级)都比所讨论过程的特征时间短许多,故它的重要性不是很大.

从图 7.7 和图 7.8 中可以讨论非线性极化率对 SRS 和 SBS 过程所产生的影响.

1. 三阶极化率 $\chi^{(3)}$ 的纯影响(此时令 $\chi^{(2)}=0$)

从图 7.7(a)可以看到,当泵波强度保持不变时,散射波的增长率随 $\chi^{(3)}$的增加而减少,同时其饱和时间延长,但饱和强度却几乎不变(但这要求三阶极化率足够大,当它太小,如只有 $\chi^{(3)}=10^{-37}n_a[\mathrm{cm}^{-3}]$时,散射波的强度就小得可以被忽略,而泵波强度也几乎不随时间而变). 在此图中,泵波强度为 10^{16} W/cm^2,但 $\chi^{(3)}$对 SRS 的演化过程就已经有明显的影响了. 而按线性稳定性分析,$\chi^{(3)}$要在 $I_0>10^{17}$ W/cm^2 时才会对线性的不稳定增长率有明显

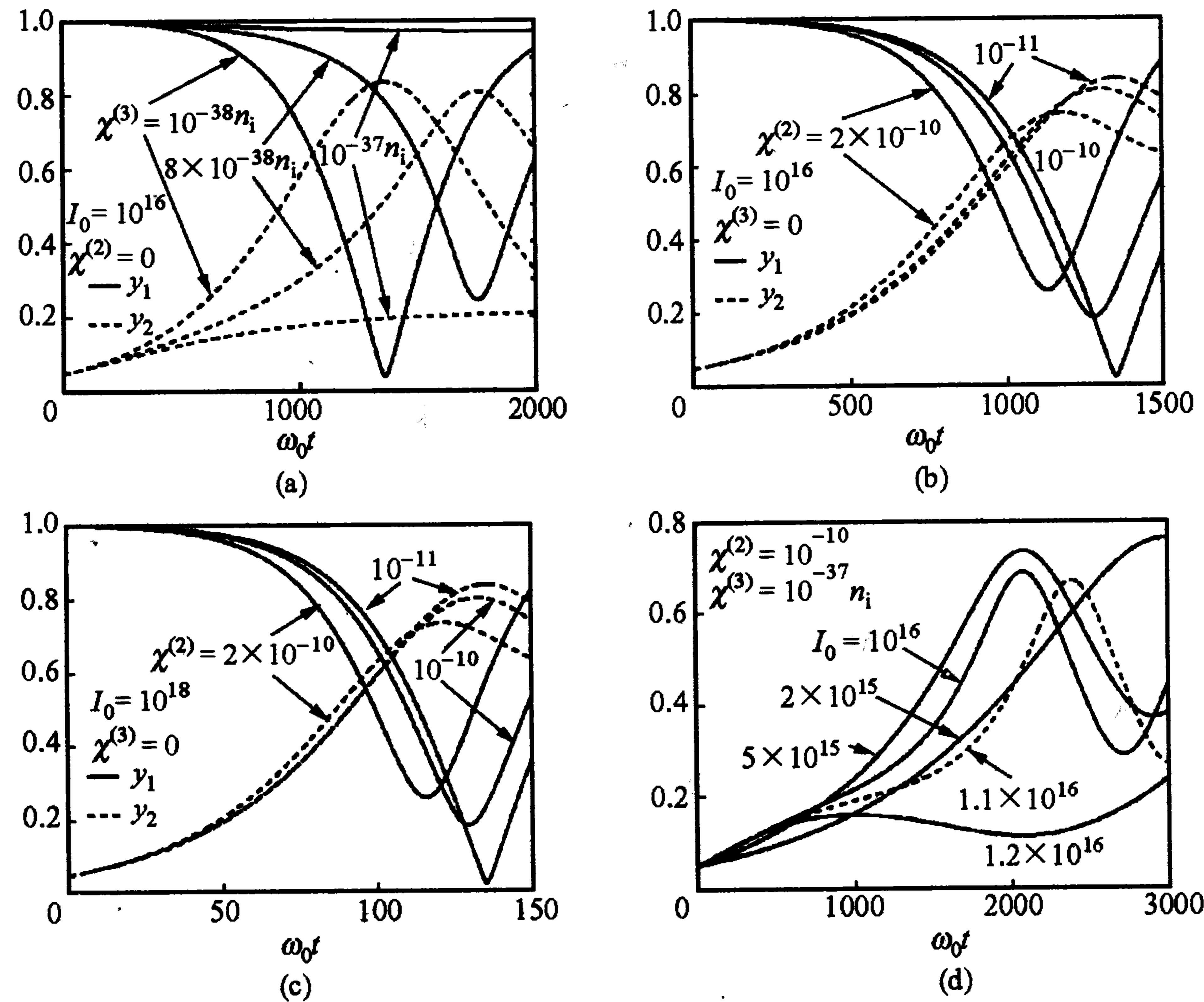


图 7.7 极化率对 SRS 的非线性演化过程的影响

影响. 这表明,如果考虑了泵波衰竭而引起的非线性效应,则 $\chi^{(3)}$ 对 SRS 演化过程的实际影响要比它在线性分析中所被期望的影响大得多.

图 7.8(b)显示了 $\chi^{(3)}$ 对 SBS 非线性演化过程的影响,其定性上和对 SRS 过程一样: 即三阶非线性极化率 $\chi^{(3)}$ 对 SRS 和 SBS 过程来说都是起稳定作用的.

2. 二阶极化率 $\chi^{(2)}$ 的纯影响(此时令 $\chi^{(3)}=0$)

图 7.7(b)给出了 $I_0=10^{16}$ W/cm² 时、$\chi^{(2)}$ 对 SRS 过程的影响. 这时,散射波的饱和强度随 $\chi^{(2)}$ 的增大而下降;而增长率(饱和时间)却只略有增大(减少). 因此 $\chi^{(2)}$ 对 SRS 过程有轻微的解稳作用. 图 7.7(c)给出了 $I_0=10^{18}$ W/cm² 时的 SRS 演化过程. 可以看到这时饱和时间约为 0.02 ps,要比图 7.7(b)($I_0=10^{16}$ W/cm²)时

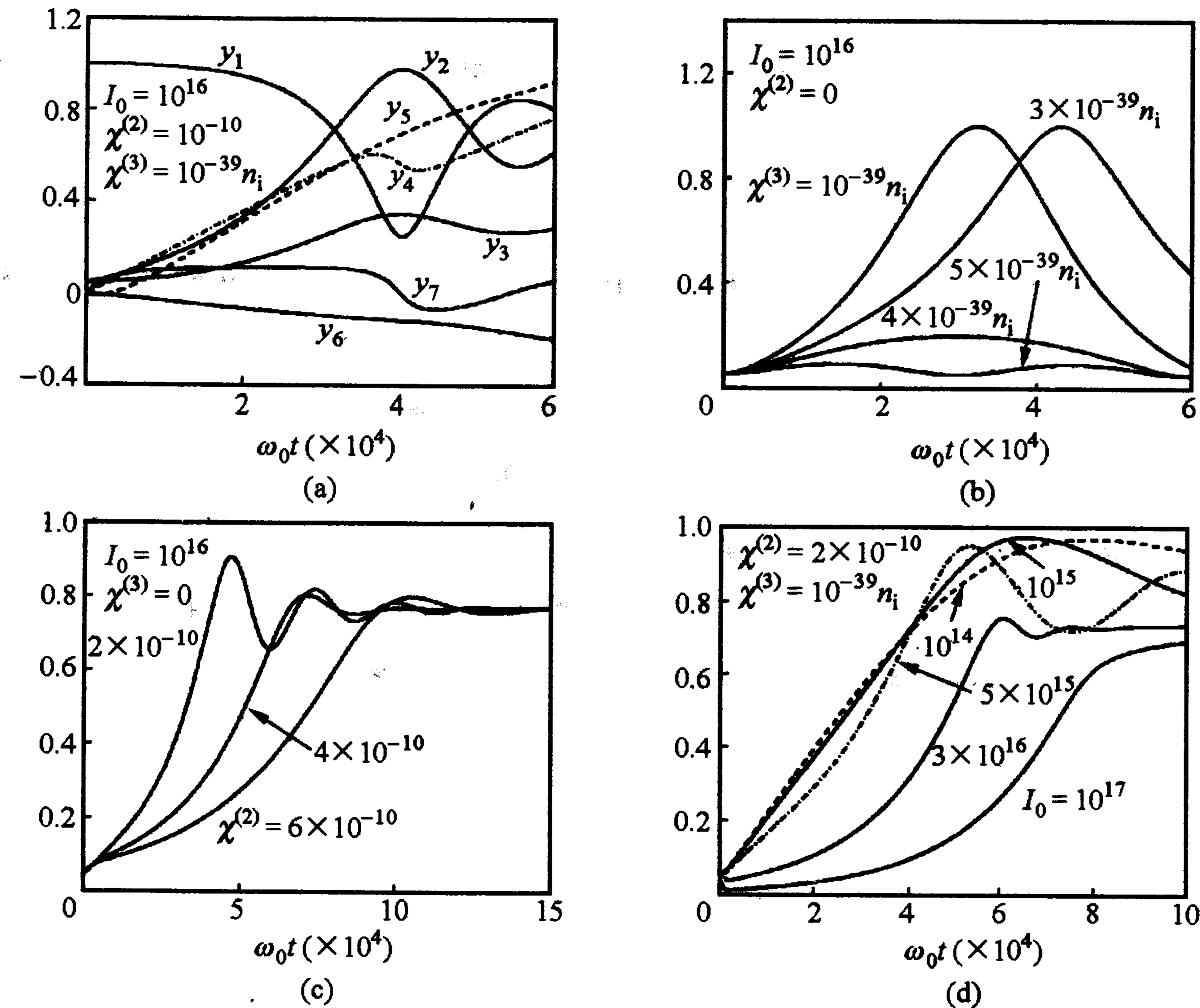


图 7.8 极化率对 SBS 的非线性演化过程的影响

的 0.2 ps 小一个量级左右. 这表明在考虑二阶极化率的影响时,泵波的初始强度会对 SRS 的演化速率有很大影响.

图 7.8(c)显示了 $\chi^{(2)}$ 对 SBS 非线性演化过程的影响. 图中显示: 随 $\chi^{(2)}$ 的增大,增长率下降,饱和时间延长,而饱和强度只略有下降. 因此 $\chi^{(2)}$ 对 SBS 过程来说与 $\chi^{(3)}$ 一样,都是稳定因素(这和上面所说的 $\chi^{(2)}$ 对 SRS 过程有解稳作用相反). 只是在两个极化率之中,$\chi^{(3)}$ 的稳定作用比较大.

3. 二阶和三阶极化率 $\chi^{(2),(3)}\neq0$ 的共同影响

从图 7.7(d)中可以看出: 当二阶和三阶极化率 $\chi^{(2)}$,$\chi^{(2)}$ 均存在但保持常数值时,随 I_0 的增加,SRS 过程的散射波增长率呈单调增大趋势(因此更不稳定了),同时其饱和幅度仅略有下降. 而其饱和时间的行为却比较复杂: 这时可以发现一个临界的泵波强度

$I_{0c} \approx 5 \times 10^{15}$ W/cm^2(具体值与$\chi^{(3)}$有关). 当$I_0 < I_{0c}$时,饱和时间随I_0增大而单调下降;而当$I_0 > I_{0c}$时,饱和时间却随I_0增大而单调增大.

图 7.8(d)与图 7.7(d)相似,只是给出的是对 SBS 过程的影响. 随着I_0的增加,SBS 过程的散射波增长率与饱和强度都单调下降(因此更稳定了). 这时也存在一个临界的泵波强度$I_{0c} \approx 4 \times 10^5$ W/cm^2. 只不过当$I_0 < I_{0c}$时,饱和时间随I_0增大而增大;而当$I_0 > I_{0c}$时,饱和时间却随I_0增大而下降.

由上面的讨论可以看出,三阶非线性极化率$\chi^{(3)}$对 SRS 和 SBS 演化过程的影响是相似的(起稳定作用),但二阶非线性极化率$\chi^{(2)}$对这两个参量过程的影响却有很大不同.

参考文献

[1] Kruer W L. The Physics of Laser Plasma Interaction. Addison-Wesly Publishing Company. Inc., 1988

[2] Sprangle P *et al*. Physical Review E, **56**(1997),5894

[3] Boyd R W. Nonlinear Optics. Academic Press. 2, Appendices

[4] 杨训仁. 大气声学. 北京:科学出版社,1997. 45

[5] П. M. 布列霍夫斯基赫. 分层介质中的波. 北京:科学出版社,1985

[6] Milchberg H M *et al*. J. Opt. Soc. Am., **B6**(1989)1351

[7] Drake R P. Laser and Particle Beams, **10**(1992)599

[8] Liu C S *et al*. Phys. Fluids, **17**(1974)1211

[9] Wang Shan Cai(王善才), Hu Xi Wei(胡希伟). Chin. Phys. Lett., **14**(1997)678

[10] Hu Ye Min, Hu Xi Wei. Physical Review E, **69**(2003)036402

[11] Hu Xi Wei(胡希伟). Chin. Phys. Lett., **17**(2000)893

[12] Hu Xi Wei(胡希伟). Plasma Science and Technology, **2**(2000)279

[13] Hu Ye Min(胡业民), Hu Xi Wei(胡希伟). Chin. Phys. Lett., **9**(2001)1230

第三部分

弗拉索夫波动理论

第八章　和粒子有相互作用的波——它的物理特点及数学描述

8.1　弗拉索夫方程组

8.1.1　线性问题及其分类

动理学描述的是等离子体在 6 维相(3 维坐标+3 维速度)空间中的状态及其时间演化行为,这时等离子体的状态是用相空间的分布函数 $f_\alpha(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v},t)$来描述的,其定义及归一为

$$N_\alpha = n_{\alpha 0}\int f_\alpha(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v},t)\mathrm{d}\boldsymbol{r}\mathrm{d}\boldsymbol{v}, \quad n_{\alpha 0} = N_\alpha/V, \quad V = \int \mathrm{d}\boldsymbol{r}.$$

若 $f_\alpha(\boldsymbol{v})$和坐标无关,则有以下归一定义

$$\int f_\alpha(\boldsymbol{v})\mathrm{d}\boldsymbol{v} = 1.$$

分布函数的时间演化,是由动理学方程和麦克斯韦方程组联合描述的(从这部分开始本书都采用高斯制的单位系统):

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\nabla f_\alpha + \frac{q_\alpha}{m_\alpha}\left(\boldsymbol{E} + \frac{\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}}{c}\right)\cdot\nabla_v f_\alpha = \left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial t}\right)_c;$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E} = 4\pi\sum_\alpha n_{\alpha 0}q_\alpha\int f_\alpha \mathrm{d}\boldsymbol{v} + 4\pi\rho_{\mathrm{apl}},$$

$$\nabla\times\boldsymbol{B} = \frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\sum_\alpha n_{\alpha 0}q_\alpha\int \boldsymbol{v}f_\alpha\mathrm{d}\boldsymbol{v} + \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{J}_{\mathrm{apl}},$$

$$\nabla\times\boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t},$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0.$$

其中 $\nabla=\partial/\partial\boldsymbol{r}$,$\nabla_v=\partial/\partial\boldsymbol{v}$,而 $\rho_{\rm apl}$及 $\boldsymbol{J}_{\rm apl}$则是外加的电荷密度与电流密度. 动理学方程右面的$(\partial f_\alpha/\partial t)_c$是碰撞引起的分布函数变化速率,在无碰撞(即 $f_\alpha(t)$变化的特征时间尺度远小于平均碰撞时间)的情况下,此项往往可以略去. 这时,上述方程组就称为弗拉索夫方程组,它描述的主要等离子体行为是一些和高频集体运动相关的性质,通常把它们一概称为弗拉索夫描述或弗拉索夫(等离子体)波动理论.

无论是一般的动理学描述还是弗拉索夫描述,都是多元的、6维空间的高度非线性微分方程组,要得出其通解是不可能的. 因此总要对它作一些简化,最常用的简化是“无碰撞化”及“线性化”. 无碰撞化上文已经指出,而所谓线性化是指:当可以把状态量按其时空的变化速率分成慢、快两部分时,

$$f_\alpha(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v},t)=f_{\alpha0}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v},t)+f_{\alpha1}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v},t),$$
$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=\boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r},t)+\boldsymbol{E}_1(\boldsymbol{r},t),$$
$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)=\boldsymbol{B}_0(\boldsymbol{r},t)+\boldsymbol{B}_1(\boldsymbol{r},t).$$

如果有

$$\frac{f_{\alpha1}}{f_{\alpha0}}\ll1,\quad\frac{E_1}{E_0}\ll1,\quad\frac{B_1}{B_0}\ll1,$$

则可以把总演化方程式分开写成零阶(平衡或慢变)的方程

$$\frac{\partial f_{\alpha0}}{\partial t}+\boldsymbol{v}\cdot\nabla f_{\alpha0}+\frac{q_\alpha}{m_\alpha}\left(\boldsymbol{E}_0+\frac{\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}_0}{c}\right)\cdot\nabla_v f_{\alpha0}=\left(\frac{\partial f_{\alpha0}}{\partial t}\right)_{c0},$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}_0=4\pi\sum_\alpha n_{\alpha0}q_\alpha\int f_{\alpha0}\mathrm{d}\boldsymbol{v}+4\pi\rho_{\rm apl},$$

$$\nabla\times\boldsymbol{B}_0=\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{E}_0}{\partial t}+\frac{4\pi}{c}\sum_\alpha n_{\alpha0}q_\alpha\int\boldsymbol{v}f_{\alpha0}\mathrm{d}\boldsymbol{v}+\frac{4\pi}{c}\boldsymbol{J}_{\rm apl},$$

$$\nabla\times\boldsymbol{E}_0=-\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{B}_0}{\partial t},$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}_0=0;$$

以及一阶(快变)的线性方程(其中已略去了二阶和高于二阶的

小项)

$$\frac{\partial f_{\alpha1}}{\partial t}+\boldsymbol{v}\cdot\nabla f_{\alpha1}+\frac{q_\alpha}{m_\alpha}\left(\boldsymbol{E}_0+\frac{\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}_0}{c}\right)\cdot\nabla_v f_{\alpha1}+\frac{q_\alpha}{m_\alpha}\left(\boldsymbol{E}_1+\frac{\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}_1}{c}\right)\cdot\nabla_v f_{\alpha0}=\left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial t}\right)_{c1},$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}_1=4\pi\sum_\alpha n_{\alpha0}q_\alpha\int f_{\alpha1}\mathrm{d}\boldsymbol{v},$$

$$\nabla\times\boldsymbol{B}_1=\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{E}_1}{\partial t}+\frac{4\pi}{c}\sum_\alpha n_{\alpha0}q_\alpha\int\boldsymbol{v}f_{\alpha1}\mathrm{d}\boldsymbol{v},$$

$$\nabla\times\boldsymbol{E}_1=-\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{B}_1}{\partial t},$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}_1=0.$$

一般 $\boldsymbol{E}_0,\boldsymbol{B}_0,\rho_{\rm apl},\boldsymbol{J}_{\rm apl}$都被认为是已知的,不受等离子体带电粒子系统的影响,因此零阶方程式可以和相应的零阶麦克斯韦电磁方程组解耦合. 而 $\boldsymbol{E}_1,\boldsymbol{B}_1$ 则是等离子体中的自生(洽)电、磁场,它们是和等离子体的带电粒子系(通过自生电荷分离与自生电流)相耦合的. 故一阶的弗拉索夫方程式必须和一阶的麦克斯韦方程组相耦合. 令

$$L_0=\boldsymbol{v}\cdot\nabla+\frac{q_\alpha}{m_\alpha}\left(\boldsymbol{E}_0+\frac{\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}_0}{c}\right)\cdot\nabla_v,$$

$$L_1=\frac{q_\alpha}{m_\alpha}\left(\boldsymbol{E}_1+\frac{\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}_1}{c}\right)\cdot\nabla_v.$$

则零阶和一阶的演化方程可分别简写成

$$\frac{\partial f_{\alpha0}}{\partial t}+L_0 f_{\alpha0}=\left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial t}\right)_{c0},$$

$$\frac{\partial f_{\alpha1}}{\partial t}+L_0 f_{\alpha1}=\left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial t}\right)_{c1}-L_1 f_{\alpha0},$$

[关于$(\boldsymbol{E}_1,\boldsymbol{B}_1)$的线性麦克斯韦方程组].

在比较简单的情况(如空间均匀、速度空间各向同性、无外电场、均匀外磁场)下,平衡分布 $f_{\alpha0}$往往取热力学平衡分布——麦克斯韦形式:

$$f_{\alpha M}(\boldsymbol{v}) = n_{\alpha 0}\left(\frac{m_\alpha}{2\pi T_\alpha}\right)^{3/2}\exp\left\{-\frac{m_\alpha}{2T_\alpha}(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}_\alpha)^2\right\}, \quad \alpha = \mathrm{e},\mathrm{i},\cdots.$$

而当平衡等离子体中的密度 $n_{\alpha 0}$、温度 $T_{\alpha 0}$和电流 $\boldsymbol{J}_0$(因而外磁场 $\boldsymbol{B}_0$)都是空间不均匀的(即都是坐标的函数)时候,平衡的、无碰撞的弗拉索夫-麦克斯韦联立方程组的严格解直到目前只找到两种:静电解和磁解. 详情请参考文献[1].

对此本教程的主要目的是,给出各种简化条件下的线性问题($f_{\alpha 1}$,$\boldsymbol{E}_1$,$\boldsymbol{B}_1$)的解,说明其物理意义,并介绍其可能的应用. 对线性方程组的简化可按是否考虑碰撞、坐标依赖、速度空间各向同性、外磁场形式以及扰动磁场而大致作一分类(见图 8.1).

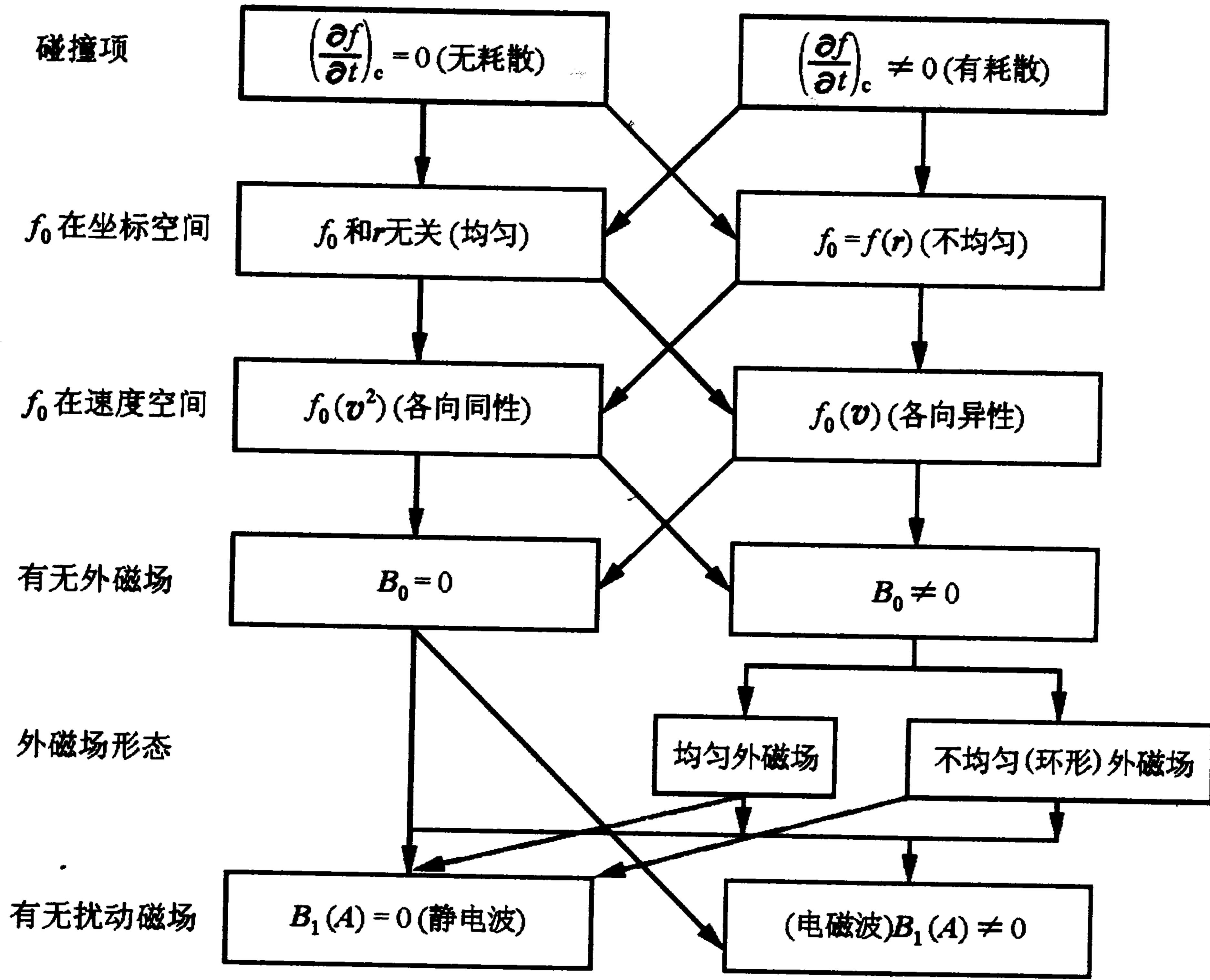


图 8.1 线性弗拉索夫问题分类示意图($\boldsymbol{A}$ 是矢势)

其中最简单的是:无磁场、空间均匀、速度空间各向同性且无耗散的静电波以及电磁波.

然后依次是:均匀磁场、空间均匀、速度空间各向异性的无耗散静电波及电磁波;均匀磁场、空间不均匀、速度空间各向异性的无耗散(漂移)静电波及电磁波.

最复杂的情况是:环形(或更复杂的)磁场、空间不均匀、速度空间各向异性的耗散静电波及电磁波.

本教程只处理前三类的线性弗拉索夫问题. 对最简单的静电波,我们给出了本征模及弹道模解;而对磁化等离子体则只给出它们的本征模色散关系.

线性弗拉索夫问题的解一般可以分成三大类:本征值问题,初值问题及参量过程. 当一个等离子体体系在不受外来扰动的影响时,其线性弗拉索夫问题的解往往是一个表示其内禀集体运动(又称等离子体波)频率和波长关系的色散关系

$$\omega = \omega(\boldsymbol{k}).$$

这就是等离子体的本征值问题(又称本征模),这时由线性弗拉索夫方程组得不出这些集体扰动的绝对幅度. 如果在某一时刻(设为 $t=0$)从外界突然对所讨论的等离子体体系施加一个脉冲扰动,则相应的线性弗拉索夫问题就为初值问题——这时等离子体中除了本征模外,还有由于外加扰动而激发的集体运动——轨道模(ballistic mode),轨道模和本征模有着很不相同的传播行为和时间演化过程,并且和外加扰动的幅度和形式有关. 最后,如果所研究的等离子体体系持续地受到一个外加的、较强的扰动电磁波的作用,它会被激发出一系列的线性本征模,这类线性弗拉索夫问题通常称为参量过程. 在后两类问题中,通过线性弗拉索夫方程组还可以得出等离子体集体模式的幅度. 在本书以下部分只讨论前两种线性弗拉索夫问题. 在第七章中曾通过等离子体的双流体方程组讨论过参量问题,参量问题的动理学描述可以参考其他文献,本书不再介绍(例如文献[2]).

8.1.2 拉氏变换和傅氏变换

在解决线性弗拉索夫问题时常用的数学方法是：通过积分变换，将时间与空间的微分方程组(全部或部分地)变成频率和波数空间的代数方程组，从而大大简化求解的过程. 下面就简单介绍一下这几个积分变换.

1. 无限空间用傅氏变换

$$A(\boldsymbol{r})\Longleftrightarrow A(\boldsymbol{k}) \quad (-\infty\leqslant \boldsymbol{r},\boldsymbol{k}\leqslant\infty).$$

正变换

$$A(\boldsymbol{k})=\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\boldsymbol{r}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}A(\boldsymbol{r}),$$

其中 d 表示空间的维数；逆变换

$$A(\boldsymbol{r})=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\boldsymbol{k}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}A(\boldsymbol{k}).$$

2. 初值问题用拉氏变换

$$A(t)\Longleftrightarrow A(p) \quad (0\leqslant t\leqslant\infty).$$

正变换

$$A(p)=\int_0^{\infty}\mathrm{d}t\mathrm{e}^{-pt}A(t),\quad \mathrm{Re}p\geqslant p_0\geqslant 0,$$

逆变换

$$A(t)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{c-\mathrm{i}\infty}^{c+\mathrm{i}\infty}\mathrm{d}p\mathrm{e}^{pt}A(p),\quad c\geqslant p_0.$$

上述变换中的 p_0 和积分路径见图 8.2(a).

在弗拉索夫波动理论中常取以下变量代换：

$$p=-\mathrm{i}\omega=-\mathrm{i}\omega_r+\gamma\quad(\omega=\omega_r+\mathrm{i}\gamma).$$

即 $\mathrm{Re}p=\gamma$，$\mathrm{Im}p=-\omega_r$，这样拉氏变换就成了单边傅氏变换(见图 8.2(b)，(c))：

$$A(\omega)=\int_0^{\infty}\mathrm{d}t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}A(t),\quad \gamma\geqslant\gamma_0\geqslant 0,$$

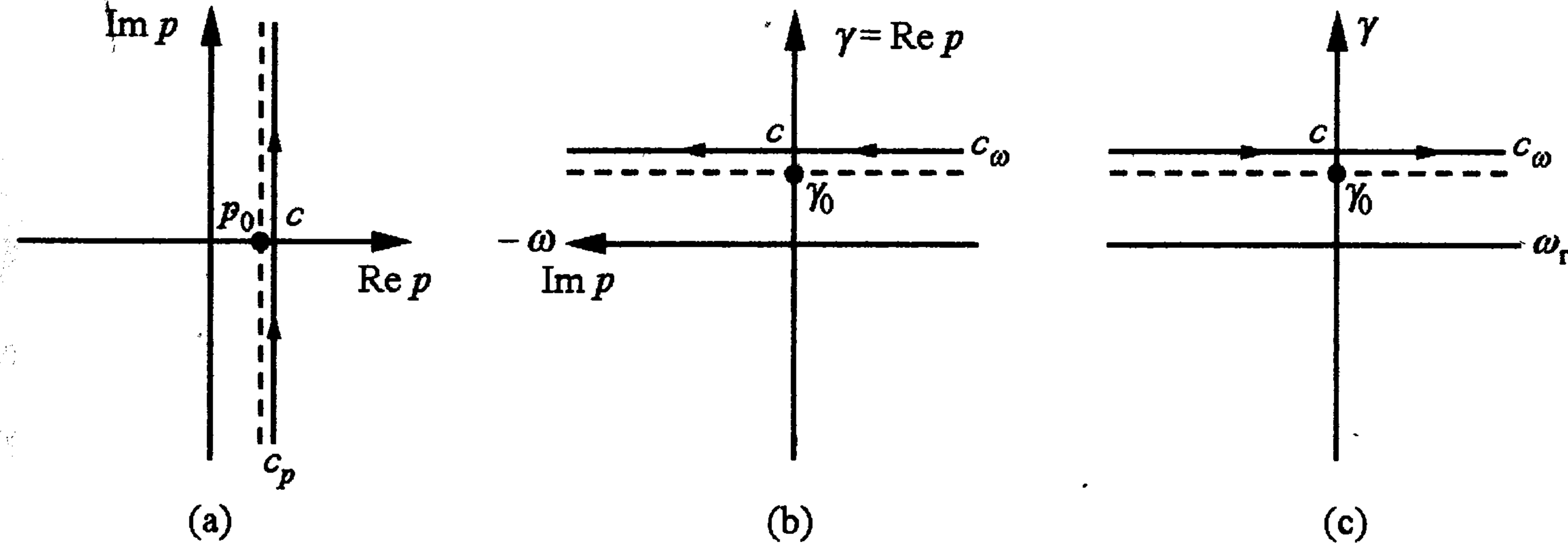


图 8.2 拉氏变换的积分路径(在 p 和 ω 空间)

其逆变换

$$A(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty+\mathrm{i}\gamma}^{\infty+\mathrm{i}\gamma}\mathrm{d}\omega\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}A(\omega),\quad c\geqslant\gamma_0.$$

在下面的讨论中我们都用单边傅氏变换代替拉氏变换来进行分析.

3. 本征值问题用双边傅氏变换

这时把单边傅氏(拉氏)变换解析延拓到 $t<0$ 的时间中去：

$$A(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}A(t),\quad \gamma\geqslant\gamma_0\geqslant 0;\quad A(-\infty)=0,$$

逆变换

$$A(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty+\mathrm{i}0^+}^{\infty+\mathrm{i}0^+}\mathrm{d}\omega\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}A(\omega),\quad c\geqslant\gamma_0.$$

8.1.3 和粒子相互作用的波的表达方式

一个在均匀空间传播的“稳定”平面波，在数学上可以表达成

$$\exp(\mathrm{i}k_r x-\mathrm{i}\omega_r t)=\exp(\mathrm{i}k_r(x-v_\phi t)).$$

其中 ω_r，k_r 分别是取实数值的波频和波数，而 $v_\phi=\omega_r/k_r$ 则是波的相速度. 设 $t=t_0$ 时刻波在 $x=x_0$ 处的相位为 $\phi_0=k_r(x_0-v_\phi t_0)$；则在某个 $t>t_0$ 时刻，此波中相位为 ϕ_0 的点将传播到

$$x=x_0+v_\phi(t-t_0)>x_0.$$

这表明用这种表达式表示的波是朝着 x 坐标的正向传播的(而

$\exp(\mathrm{i}k_r x+\mathrm{i}\omega_r t)$则表示一个向左传播的波),在本书中都采取这种物理图像比较自然的表达式.

当波和等离子体中的粒子之间有相互作用时,它们之间会交换能量.如果波从粒子处得到了能量,则波能应当增加,也即波的振幅会变大(不稳定的波);反之,波幅要减少(阻尼的波).这种波幅会随时间、空间而变的波可以通过引入有虚部的复频率和复波数来表示.当取

$$\omega=\omega_r+\mathrm{i}\gamma, k=k_r, \quad \Longrightarrow \quad \exp(\mathrm{i}k_r x-\mathrm{i}\omega_r t+\gamma t),$$

可以看出,这是一个随时间不断减小(当 $\gamma<0$ 时)或增长(当 $\gamma>0$ 时)的波.反之,当取

$$\omega=\omega_r, \ k=k_r+\mathrm{i}\Gamma, \quad \Longrightarrow \quad \exp(\mathrm{i}k_r x-\Gamma x-\omega_r t),$$

这是一个在向右传播过程中随 x 增大而衰减($\Gamma>0$)或增长($\Gamma<0$)的波.而当频率和波数均为复数时,

$$\exp(\mathrm{i}kx-\mathrm{i}\omega t)=\exp(\mathrm{i}k_r(x-v_\phi t))\exp(-\Gamma x+\gamma t),$$

这是一个在空间只存在于有限区域中的"波包".当 $\gamma>0,\Gamma>0$ 时这一般是一个在空间一面移动、一面变大的(不稳定)波包.如果波包移动的速度 v_g 比较快,就称为可移(convective)不稳定;而当群速度 $v_g\approx 0$ 时,则表现为绝对(absolute)不稳定(见图 8.3).

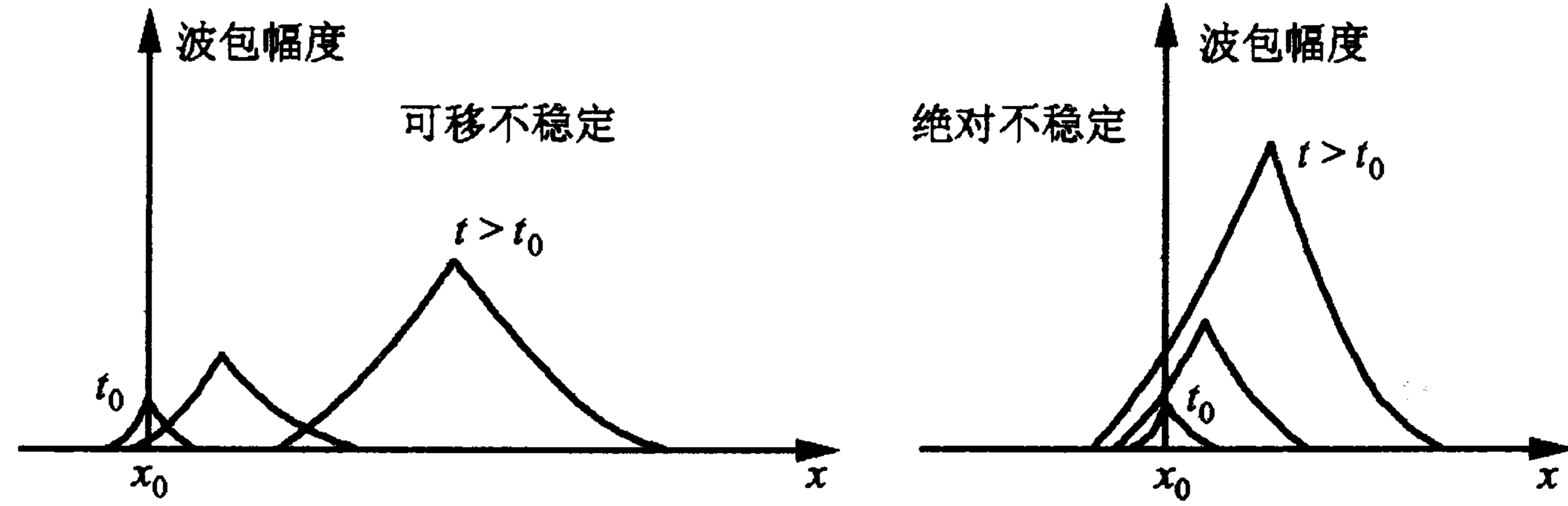


图 8.3 可移和绝对不稳定的波包图形

对于许多实验室等离子体来说,绝对不稳定的模式要比可移不稳定的模式危险得多,因此在动理学不稳定模式的讨论中除了需要求出频率虚部的符号外,在存在不稳定性时还应该进一步辨别它是可移的还是绝对的.由于绝对不稳定波包的特征是群速度很小,故可在求出它的色散关系后,通过是否满足条件:

$$\frac{\partial \omega_r}{\partial k_r}=0,$$

来把它辨别出来.

8.2 扰动波场的能量传播方程

8.2.1 坡印亭波能传播方程

从波场的麦克斯韦方程组

$$\nabla\times \boldsymbol{E}_1=-\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{B}_1}{\partial t},$$

$$\nabla\times \boldsymbol{B}_1=\frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}_1+\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{E}_1}{\partial t}, \quad \boldsymbol{j}_1=\sum_\alpha n_\alpha q_\alpha\int \boldsymbol{v} f_{\alpha 1}\mathrm{d}\boldsymbol{v},$$

可得

$$\boldsymbol{B}_1\cdot(\nabla\times \boldsymbol{E}_1)-\boldsymbol{E}_1\cdot(\nabla\times \boldsymbol{B}_1)$$
$$=-\frac{1}{c}\boldsymbol{B}_1\cdot\frac{\partial \boldsymbol{B}_1}{\partial t}-\frac{1}{c}\boldsymbol{E}_1\cdot\left(4\pi \boldsymbol{j}_1+\frac{\partial \boldsymbol{E}_1}{\partial t}\right),$$
$$\frac{1}{c}\left[\boldsymbol{B}_1\cdot\frac{\partial \boldsymbol{B}_1}{\partial t}+\boldsymbol{E}_1\cdot\left(4\pi \boldsymbol{j}_1+\frac{\partial \boldsymbol{E}_1}{\partial t}\right)\right]+\nabla\cdot(\boldsymbol{E}_1\times \boldsymbol{B}_1)=0.$$

对于真空,$\boldsymbol{j}_1=0$,上式就可写成能量守恒方程

$$\frac{\partial W_0}{\partial t}+\nabla\cdot \boldsymbol{P}=0, \quad W_0=\frac{1}{8\pi}(E_1^2+B_1^2), \quad \boldsymbol{P}=\frac{c}{4\pi}\boldsymbol{E}_1\times \boldsymbol{B}_1. \tag{8.1}$$

其中 W_0 是电磁场能量,$\boldsymbol{P}$ 是电磁场能流,又称坡印亭矢量.在等离子体中,扰动电流 $\boldsymbol{j}_1$ 总是存在,它是粒子对波场的一种响应.对于静态和准稳态的等离子体电流,有欧姆定律 $\boldsymbol{j}_1=\sigma \boldsymbol{E}_1$;故波能传播方程中的 $\boldsymbol{E}_1\cdot \boldsymbol{j}_1=\sigma^{-1}j^2$,即代表欧姆加热功率.这时 $\boldsymbol{j}_1,\sigma$ 都是实数.但对于高频情况,一般并不存在上述$(\boldsymbol{r},t)$空间的欧姆定律.不过从实验及下面的线性理论都可以证明,这时存在着$(\boldsymbol{k},\omega)$空

间的“欧姆定律”，

$$\boldsymbol{j}_1(\omega,\boldsymbol{k}) = \overleftrightarrow{\sigma}(\omega,\boldsymbol{k}) \cdot \boldsymbol{E}_1(\omega,\boldsymbol{k}). \tag{8.2}$$

因此这时在坐标空间电流和电场的关系是非定域、有记忆的，

$$\boldsymbol{j}_1(\boldsymbol{r},t) = \int \overleftrightarrow{\sigma}(\boldsymbol{r}',t') \cdot \boldsymbol{E}_1(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}',t-t')\mathrm{d}\boldsymbol{r}'\mathrm{d}t'. \tag{8.3}$$

进而 $\boldsymbol{E}_1 \cdot \boldsymbol{j}_1$ 对电场的依赖关系就很复杂.

但是对于 $\gamma \ll \omega_r$ 的弱衰减(不稳定)波，可以将扰动电场分成快变部分(由 ω_r 描述)及慢变部分(取决于 γ)

$$\boldsymbol{E}_1(t) = E_0(\varepsilon t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_r t}.$$

这时(在下面的小节中将证明)在电流和电场之间存在如下的简单近似关系：

$$\boldsymbol{j}_1(\boldsymbol{r},t) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_r t}\overleftrightarrow{\sigma}\left(\omega_r + \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}\right) \cdot \boldsymbol{E}_1(\varepsilon t).$$

因而有可能得出一个近似(准确到二阶小量)的波能传播微分方程. 以下先只给出时间行为的分析，然后再(不加推导地)给出同时又计入空间行为的结果，详见文献[3].

8.2.2 两种时间尺度下的波能传播方程

当 $|\gamma|/|\omega_r| = \varepsilon \ll 1$ 时，可将扰动电场写作

$$\boldsymbol{E}_1(t) = \frac{1}{2}[\boldsymbol{E}_0(\varepsilon t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0 t} + \boldsymbol{E}_0^*(\varepsilon t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t}], \quad \boldsymbol{E}_1^*(t) = \boldsymbol{E}_1(t). \tag{8.4}$$

其中 ω_0 是实数，$\boldsymbol{E}^*$ 代表 $\boldsymbol{E}$ 的复共轭. 这种写法表示扰动电场是实的，其快变部分是单频的，而慢变部分则构成了一个窄而低的连续谱背景. $\boldsymbol{E}_1(t)$ 的傅氏变换为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}_1(\omega) &= \int \mathrm{d}t\boldsymbol{E}_1(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} \\ &= \frac{1}{2}\int \mathrm{d}t\boldsymbol{E}_0(\varepsilon t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega-\omega_0)t} + \frac{1}{2}\int \mathrm{d}t\boldsymbol{E}_0^*(\varepsilon t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega+\omega_0)t} \\ &= \frac{1}{2}\boldsymbol{E}_0(\varepsilon(\omega-\omega_0)) + \frac{1}{2}\boldsymbol{E}_0^*(\varepsilon(\omega+\omega_0)).\end{aligned}$$

利用 ω 空间的欧姆定律，可得出在频域中的扰动电流

$$\begin{aligned}\boldsymbol{j}_1(\omega) &= \overleftrightarrow{\sigma}(\omega) \cdot \boldsymbol{E}_1(\omega) \\ &= \frac{1}{2}\overleftrightarrow{\sigma}(\omega) \cdot \boldsymbol{E}_0(\varepsilon(\omega-\omega_0)) + \frac{1}{2}\overleftrightarrow{\sigma}(\omega) \cdot \boldsymbol{E}_0^*(\varepsilon(\omega+\omega_0)).\end{aligned}$$

再通过逆傅氏变换，就得到时域的扰动电流

$$\begin{aligned}\boldsymbol{j}_1(t) &= \int \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi}\boldsymbol{j}_1(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi}\overleftrightarrow{\sigma}(\omega) \cdot \boldsymbol{E}_0(\varepsilon(\omega-\omega_0))\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \\ &\quad + \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi}\overleftrightarrow{\sigma}(\omega) \cdot \boldsymbol{E}_0^*(\varepsilon(\omega+\omega_0))\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \\ &= \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0 t}\int \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi}\overleftrightarrow{\sigma}(\omega_0+\omega-\omega_0) \\ &\quad \cdot \boldsymbol{E}_0(\varepsilon(\omega-\omega_0))\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega-\omega_0)t} \\ &\quad + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t}\int \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi}\overleftrightarrow{\sigma}(-\omega_0+\omega+\omega_0) \\ &\quad \cdot \boldsymbol{E}_0^*(\varepsilon(\omega+\omega_0))\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega+\omega_0)t} \\ &= \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0 t}\int \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi}\left[\overleftrightarrow{\sigma}(\omega_0) + \left.\frac{\partial\overleftrightarrow{\sigma}}{\partial\omega}\right|_{\omega_0}(\omega-\omega_0)\right] \\ &\quad \cdot \boldsymbol{E}_0(\varepsilon(\omega-\omega_0))\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega-\omega_0)t} \\ &\quad + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t}\int \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi}\left[\overleftrightarrow{\sigma}(-\omega_0) + \left.\frac{\partial\overleftrightarrow{\sigma}}{\partial\omega}\right|_{-\omega_0}(\omega+\omega_0)\right] \\ &\quad \cdot \boldsymbol{E}_0^*(\varepsilon(\omega+\omega_0))\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega+\omega_0)t} \\ &= \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0 t}\left[\overleftrightarrow{\sigma}(\omega_0) + \left.\frac{\partial\overleftrightarrow{\sigma}}{\partial\omega}\right|_{\omega_0}\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}\right] \\ &\quad \cdot \int \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi}\boldsymbol{E}_0(\varepsilon(\omega-\omega_0))\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega-\omega_0)t} \\ &\quad + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t}\left[\overleftrightarrow{\sigma}(-\omega_0) + \left.\frac{\partial\overleftrightarrow{\sigma}}{\partial\omega}\right|_{-\omega_0}\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}\right]\end{aligned}$$

$$\cdot \int \frac{d\omega}{2\pi} \boldsymbol{E}_0^* (\varepsilon(\omega+\omega_0)) e^{-i(\omega+\omega_0)t}$$

$$= \frac{1}{2} e^{-i\omega_0 t} \overleftrightarrow{\sigma}\left(\omega_0 + i\frac{\partial}{\partial t}\right) \cdot \boldsymbol{E}_0(\varepsilon t)$$

$$+ \frac{1}{2} e^{i\omega_0 t} \overleftrightarrow{\sigma}\left(-\omega_0 + i\frac{\partial}{\partial t}\right) \cdot \boldsymbol{E}_0^*(\varepsilon t). \tag{8.5}$$

这最后的表达式就是上一小节给出的近似式. 再考虑到 $\boldsymbol{j}_1^*(t) = \boldsymbol{j}_1(t)$，可知

$$\overleftrightarrow{\sigma}^*\left(\omega_0 + i\frac{\partial}{\partial t}\right) = \overleftrightarrow{\sigma}\left(-\omega_0 + i\frac{\partial}{\partial t}\right),$$

$$\overleftrightarrow{\sigma}^*\left(-\omega_0 + i\frac{\partial}{\partial t}\right) = \overleftrightarrow{\sigma}\left(\omega_0 + i\frac{\partial}{\partial t}\right). \tag{8.6}$$

这样，波能传播方程中的乘积

$$\boldsymbol{E}_1(t) \cdot \boldsymbol{j}_1(t) = \frac{1}{4}[\boldsymbol{E}_0(\varepsilon t)e^{-i\omega_0 t} + \boldsymbol{E}_0^*(\varepsilon t)e^{i\omega_0 t}]$$

$$\cdot \left[e^{-i\omega_0 t} \overleftrightarrow{\sigma}\left(\omega_0 + i\frac{\partial}{\partial t}\right) \cdot \boldsymbol{E}_0(\varepsilon t)\right.$$

$$\left. + e^{i\omega_0 t} \overleftrightarrow{\sigma}\left(-\omega_0 + i\frac{\partial}{\partial t}\right) \cdot \boldsymbol{E}_0^*(\varepsilon t)\right],$$

在相乘展开后，会出现含 $e^{-2i\omega_0 t}$ 及 $e^{2i\omega_0 t}$ 的快速振荡项. 但我们感兴趣的是上面乘积中的时间慢变行为(εt)，故可以通过对上述乘积在慢变时间间隔 $T(2\pi/(\varepsilon\omega_0) \gg t \gg 2\pi/\omega_0)$ 上的平均来消除它们：

$$\langle \boldsymbol{E}_1(t) \cdot \boldsymbol{j}_1(t) \rangle = \frac{1}{4}\left[\boldsymbol{E}_0(\varepsilon t) \cdot \overleftrightarrow{\sigma}\left(-\omega_0 + i\frac{\partial}{\partial t}\right) \cdot \boldsymbol{E}_0^*(\varepsilon t)\right.$$

$$\left. + \boldsymbol{E}_0^*(\varepsilon t) \cdot \overleftrightarrow{\sigma}\left(\omega_0 + i\frac{\partial}{\partial t}\right) \cdot \boldsymbol{E}_0(\varepsilon t)\right],$$

其中 $\langle \cdots \rangle = (1/T)\int_0^T dt \cdots$. 用同样的方法可以得

$$\langle \boldsymbol{E}_1(t) \rangle \cdot \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{E}_1(t) \rangle = -\frac{i}{4}\left[\boldsymbol{E}_0(\varepsilon t)\left(-\omega_0 + i\frac{\partial}{\partial t}\right) \cdot \boldsymbol{E}_0^*(\varepsilon t)\right.$$

$$\left. + \boldsymbol{E}_0^*(\varepsilon t)\left(\omega_0 + i\frac{\partial}{\partial t}\right) \cdot \boldsymbol{E}_0(\varepsilon t)\right].$$

把上面二项相加，得(下面为方便，略去时间平均符号 $\langle \cdots \rangle$)

$$\boldsymbol{E}_1 \cdot \left(4\pi \boldsymbol{j}_1 + \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{E}_1\right) = \frac{1}{4}\{\boldsymbol{E}_0(\varepsilon t) \cdot [\,\mathrm{I}\,] \cdot \boldsymbol{E}_1^*(\varepsilon t)$$

$$+ \boldsymbol{E}_0^*(\varepsilon t) \cdot [\,\mathrm{II}\,] \cdot \boldsymbol{E}_1(\varepsilon t)\}.$$

上式中的

$$[\,\mathrm{I}\,] = -i\left(-\omega_0 + i\frac{\partial}{\partial t}\right) + 4\pi\overleftrightarrow{\sigma}\left(-\omega_0 + i\frac{\partial}{\partial t}\right)$$

$$= -i\left[\omega\left(\overleftrightarrow{I} + \frac{4\pi i}{\omega}\overleftrightarrow{\sigma}(\omega)\right)\right]_{\omega=-\omega_0+i\partial/\partial t}$$

$$= -i[\omega\overleftrightarrow{\varepsilon}(\omega)]_{-\omega_0+i\partial/\partial t}$$

$$\approx -i\left[(-\omega_0)\overleftrightarrow{\varepsilon}(-\omega_0) + (-\omega_0)\frac{\partial\overleftrightarrow{\varepsilon}(\omega)}{\partial\omega}\bigg|_{\omega=-\omega_0} i\frac{\partial}{\partial t}\right.$$

$$\left. + \overleftrightarrow{\varepsilon}(-\omega)i\frac{\partial}{\partial t}\right]$$

$$= i\omega_0\overleftrightarrow{\varepsilon}(-\omega_0) + \frac{\partial}{\partial\omega_0}(\omega_0\overleftrightarrow{\varepsilon}(-\omega_0))\frac{\partial}{\partial t}.$$

其中引用了等价介电张量

$$\overleftrightarrow{\varepsilon} \equiv \overleftrightarrow{I} + \frac{4\pi i}{\omega}\overleftrightarrow{\sigma}(\omega), \tag{8.7}$$

它在静电波情况下就是介电张量，但在电磁波情况下直接和电导张量相关. 同理可得

$$[\,\mathrm{II}\,] = -i[\omega\overleftrightarrow{\varepsilon}(\omega)]_{\omega_0+i\partial/\partial t}$$

$$= -i\omega_0\overleftrightarrow{\varepsilon}(\omega_0) + \frac{\partial}{\partial\omega_0}(\omega_0\overleftrightarrow{\varepsilon}(\omega_0))\frac{\partial}{\partial t}.$$

结果有

$$\boldsymbol{E}_1 \cdot \left(4\pi \boldsymbol{j}_1 + \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{E}_1\right) = \frac{1}{4}\left\{-i\omega_0\boldsymbol{E}_0^*(\varepsilon t) \cdot \overleftrightarrow{\varepsilon}(\omega_0) \cdot \boldsymbol{E}_0(\varepsilon t)\right.$$

$$+ i\omega_0\boldsymbol{E}_0(\varepsilon t) \cdot \overleftrightarrow{\varepsilon}(-\omega_0) \cdot \boldsymbol{E}_0^*(\varepsilon t)$$

$$+ \boldsymbol{E}_0^*(\varepsilon t) \cdot \frac{\partial}{\partial\omega_0}[\omega_0\overleftrightarrow{\varepsilon}(\omega_0)] \cdot \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{E}_0(\varepsilon t)$$

$$+\boldsymbol{E}_0(\varepsilon t)\cdot\frac{\partial}{\partial\omega_0}\left[\omega_0\overset{\leftrightarrow}{\varepsilon}(-\omega_0)\right]\cdot\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{E}_0^*(\varepsilon t)\Big\}.$$

其中第一、二项可归并成

$$\frac{\mathrm{i}\omega_0}{4}\left[-E_{0i}^*\varepsilon_{ij}(\omega_0)E_{0j}+E_{0j}\varepsilon_{ji}(-\omega_0)E_{0i}^*\right]$$

$$=-\frac{\mathrm{i}\omega_0}{4}\left[E_{0i}^*(\varepsilon_{ij}(\omega_0)-\varepsilon_{ji}(-\omega_0))E_{0j}\right]$$

$$=\frac{\omega_0}{2}\boldsymbol{E}_0^*\cdot\overset{\leftrightarrow}{\varepsilon}{}^{\mathrm{a}}(\omega_0)\cdot\boldsymbol{E}_0.$$

在上式的推导中用到了

$$\varepsilon_{ji}(-\omega_0)=\varepsilon_{ji}^*(\omega_0)=\varepsilon_{ij}^+(\omega_0).$$

式中上标"+"表示厄米共厄，它和介电张量的厄米部分"h"及反厄米部分"a"有如下关系

$$\overset{\leftrightarrow}{\varepsilon}=\overset{\leftrightarrow}{\varepsilon}{}^{\mathrm{h}}+\overset{\leftrightarrow}{\varepsilon}{}^{\mathrm{a}},\quad \overset{\leftrightarrow}{\varepsilon}{}^{\mathrm{a}}=\frac{1}{2\mathrm{i}}(\overset{\leftrightarrow}{\varepsilon}-\overset{\leftrightarrow}{\varepsilon}{}^{+}),\quad \overset{\leftrightarrow}{\varepsilon}{}^{\mathrm{h}}=\frac{1}{2}(\overset{\leftrightarrow}{\varepsilon}+\overset{\leftrightarrow}{\varepsilon}{}^{+}),$$

而第三、四项同样可合并成

$$\frac{1}{4}E_{0i}^*\frac{\partial}{\partial\omega_0}\left[\omega_0\varepsilon_{ij}(\omega_0)\right]\frac{\partial}{\partial t}E_{0j}+\frac{1}{4}E_{0j}\frac{\partial}{\partial\omega_0}\left[\omega_0\varepsilon_{ji}(-\omega_0)\right]\frac{\partial}{\partial t}E_{0i}^*$$

$$=\frac{1}{8}\frac{\partial}{\partial t}\left\{E_{0i}^*\frac{\partial}{\partial\omega_0}\left[\omega_0\varepsilon_{ij}(\omega_0)+\omega_0\varepsilon_{ji}(-\omega_0)\right]E_{0j}\right\}$$

$$=\frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial t}\left\{E_{0i}^*\frac{\partial}{\partial\omega_0}\left[\omega_0\varepsilon_{ij}^{\mathrm{h}}(\omega_0)\right]E_{0j}\right\}$$

$$=\frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial t}\left\{\boldsymbol{E}_0^*\cdot\frac{\partial}{\partial\omega_0}\left[\omega_0\overset{\leftrightarrow}{\varepsilon}{}^{\mathrm{h}}\right]\cdot\boldsymbol{E}_0\right\}.$$

所以，最后可将电磁波的波能演化方程写成

$$\frac{\partial}{\partial t}W^{\mathrm{h}}+W^{\mathrm{a}}+\nabla\cdot\boldsymbol{P}=0. \tag{8.8}$$

其中 W^{h}，W^{a}，$\boldsymbol{P}$ 分别是(对慢变时间平均了的)波能、波的(因波-粒子共振相互作用而引起的不可逆)功率耗散以及坡印亭矢量(电磁波的能流)，有

$$\boldsymbol{P}=\frac{c}{16\pi}\left[\boldsymbol{E}_0(\varepsilon t)\times\boldsymbol{B}_0^*(\varepsilon t)+\boldsymbol{E}_0^*(\varepsilon t)\times\boldsymbol{B}_0(\varepsilon t)\right], \tag{8.9}$$

$$W^{\mathrm{a}}=\frac{\omega_0}{8\pi}\boldsymbol{E}_0^*(\varepsilon t)\cdot\overset{\leftrightarrow}{\varepsilon}{}^{\mathrm{a}}\cdot\boldsymbol{E}_0(\varepsilon t), \tag{8.10}$$

$$W^{\mathrm{h}}=\frac{1}{16\pi}\left\{|\boldsymbol{B}_0(\varepsilon t)|^2+\boldsymbol{E}_0^*(\varepsilon t)\cdot\frac{\partial}{\partial\omega_0}\left[\omega_0\overset{\leftrightarrow}{\varepsilon}{}^{\mathrm{h}}(\omega_0)\right]\cdot\boldsymbol{E}_0(\varepsilon t)\right\} \tag{8.11}$$

$$=\frac{1}{16\pi}\left\{|\boldsymbol{B}_0|^2+|\boldsymbol{E}_0|^2-\boldsymbol{E}_0^*\cdot\frac{\partial}{\partial\omega_0}\left[4\pi\overset{\leftrightarrow}{\sigma}{}^{\mathrm{a}}(\omega_0)\right]\cdot\boldsymbol{E}_0\right\}. \tag{8.12}$$

上式中的第一、二项分别为电场、磁场的能量密度，而第三项则代表随波场运动的(非共振、可逆)粒子系的振荡(抖动)动能密度.

对于静电波，介电张量是通过电位移矢量来定义的：$\boldsymbol{D}_1(\omega_0)=\overset{\leftrightarrow}{\varepsilon}(\omega_0)\cdot\boldsymbol{E}_1(\omega_0)$，它可以从线性弗拉索夫方程的静电波解得出.考虑到这时 $\boldsymbol{B}_1=0$，$\boldsymbol{P}=0$，故相应的波能演化方程为

$$\frac{\partial}{\partial t}W_{\mathrm{e}}^{\mathrm{r}}+W_{\mathrm{e}}^{\mathrm{i}}=0, \tag{8.13}$$

$$W_{\mathrm{e}}^{\mathrm{r}}=\frac{1}{16\pi}|\boldsymbol{E}_0(\varepsilon t)|^2\frac{\partial}{\partial\omega_0}\left[\omega_0\varepsilon^{\mathrm{r}}(\omega_0)\right],\quad W_{\mathrm{e}}^{\mathrm{i}}=\frac{1}{8\pi}|\boldsymbol{E}_0(\varepsilon t)|^2\omega_0\varepsilon^{\mathrm{i}}(\omega_0). \tag{8.14}$$

其中上标"r"和"i"分别代表实部(厄米部分)和虚部(反厄米部分).上述方程的解是

$$|\boldsymbol{E}_0(\varepsilon t)|^2=|\boldsymbol{E}_0(0)|^2\mathrm{e}^{2\gamma t},\quad \gamma=-\frac{\omega_0\varepsilon^{\mathrm{i}}}{\partial(\omega_0\varepsilon^{\mathrm{r}})/\partial\omega_0}. \tag{8.15}$$

由此解可知，静电波的阻尼($\gamma<0$)或是不稳定($\gamma>0$)，取决于两个因素：$\partial(\omega_0\varepsilon^{\mathrm{r}})/\partial\omega_0$ 及 ε^{i}.前者与波能成正比，$\partial(\omega_0\varepsilon^{\mathrm{r}})/\partial\omega_0>0$ 的波称为正能波；反之则称为负能波.后者与波的功率损失成正比，$\varepsilon^{\mathrm{i}}>0$ 时称为正耗散；反之则称为负耗散.这样

对正能波：正耗散时波将被阻尼($\gamma<0$)，负耗散时波不稳定($\gamma>0$)；

对负能波：正耗散时波不稳定($\gamma<0$)，负耗散时波却被阻尼($\gamma>0$).

负能波的耗散行为与我们通常习惯的(正能波的)物理图像相

反，它是在等离子体动理学中才出现的新概念，我们将在下面详细讨论(见下一章反应型本征模).

8.2.3 两种时间、两种空间尺度下的波能传播方程

上节只考虑了波的时间行为，但实际上波也同时具有空间的快变和慢变尺度，故最一般的两种尺度下的波场表达式应该写成

$$\boldsymbol{E}_1(\boldsymbol{r},t)=\frac{1}{2}[\boldsymbol{E}_0(\varepsilon\boldsymbol{r},\varepsilon t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}_0\cdot\boldsymbol{r}-\mathrm{i}\omega_0 t}+\mathrm{c.c.}]. \tag{8.16}$$

同样假定有$(\omega,\boldsymbol{k})$空间的欧姆定律

$$\boldsymbol{j}_1(\omega,\boldsymbol{k})=\overset{\rightleftarrows}{\sigma}(\omega,\boldsymbol{k})\cdot\boldsymbol{E}_1(\omega,\boldsymbol{k}),$$

可以得出

$$\boldsymbol{j}_1(\varepsilon\boldsymbol{r},\varepsilon t)=\overset{\rightleftarrows}{\sigma}\left(\omega_0+\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t},\boldsymbol{k}_0-\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{r}}\right)\cdot\boldsymbol{E}_0(\varepsilon\boldsymbol{r},\varepsilon t). \tag{8.17}$$

通过类似的推导，最后可得电磁波的波能演化、传播方程(参考文献[3])

$$\frac{\partial\mathscr{W}^{\mathrm{h}}}{\partial t}+\mathscr{W}^{\mathrm{a}}+\nabla\cdot\boldsymbol{P}'=0, \tag{8.18}$$

$$\mathscr{W}^{\mathrm{h}}=\frac{1}{16\pi}\left[|\boldsymbol{B}_0(\varepsilon\boldsymbol{r},\varepsilon t)|^2+\boldsymbol{E}_0^*(\varepsilon\boldsymbol{r},\varepsilon t)\cdot\frac{\partial}{\partial\omega_0}(\omega_0\overset{\rightleftarrows}{\varepsilon}{}^{\mathrm{h}})\cdot\boldsymbol{E}_0(\varepsilon\boldsymbol{r},\varepsilon t)\right], \tag{8.19}$$

$$\mathscr{W}^{\mathrm{a}}=\frac{\omega_0}{8\pi}\boldsymbol{E}_0^*(\varepsilon\boldsymbol{r},\varepsilon t)\cdot\overset{\rightleftarrows}{\varepsilon}{}^{\mathrm{a}}\cdot\boldsymbol{E}_0(\varepsilon\boldsymbol{r},\varepsilon t), \tag{8.20}$$

$$\boldsymbol{P}'\equiv\mathscr{W}^{\mathrm{h}}\boldsymbol{v}_{\mathrm{gr}} \tag{8.21}$$

$$=\frac{1}{16\pi}\Big[2c\mathrm{Re}(\boldsymbol{E}_0^*(\varepsilon\boldsymbol{r},\varepsilon t)\times\boldsymbol{B}_0(\varepsilon\boldsymbol{r},\varepsilon t))$$
$$-\omega_0\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{k}_0}\left(\boldsymbol{E}_0^*(\varepsilon\boldsymbol{r},\varepsilon t)\cdot\overset{\rightleftarrows}{\varepsilon}{}^{\mathrm{h}}\right)\cdot\boldsymbol{E}_0(\varepsilon\boldsymbol{r},\varepsilon t)\Big]. \tag{8.22}$$

其中$\boldsymbol{v}_{\mathrm{gr}}$是电磁波的群速度，(8.22)式是它在两种尺度下的定义

式；其他项则和上一节中的相应量有相同的物理意义.

应该特别指出的是：这里的电磁波能流密度并不仅仅表现为坡印亭矢量，还出现了一项由于波的群速度随空间不同位置而不同所造成的能流不均匀项. 而群速度的不均匀又是由于等离子体的空间不均匀引起的. 在$\boldsymbol{k}$空间，这表现为等价介电张量$\overset{\rightleftarrows}{\varepsilon}{}^{\mathrm{h}}$是对$\boldsymbol{k}$依赖的. 群速度的空间依赖性往往容易被忽略，因此会造成在空间不均匀等离子体中估算电磁波能流密度时出现错误. 希望读者对此给予特别的注意.

参考文献

[1] Mahajan S M. Phys. Fluids, **B1**(1)(1989)43

[2] Liu C C, Tripathi V K. Interaction of Electromagnetic Waves with Electron Beams and Plasmas. World Scientific, Singapore, 1994

[3] Liu Chen. Waves and Instabilities in Plasmas. World Scientific Publications, 1987

第九章 无外场、空间均匀、速度空间各向同性等离子体的线性弗拉索夫方程解

9.1 静电波解的一般形式及分类

在本章中假定

$$\boldsymbol{B}_0=\boldsymbol{E}_0=0,\quad f_{\alpha 0}=f_{\alpha \mathrm{M}}(v^2),\quad \boldsymbol{B}_1=0.$$

这意味着只存在静电扰动(波).对于这种波有

$$\nabla\times\boldsymbol{E}_1=-\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{B}_1}{\partial t}=0,\quad \boldsymbol{k}\parallel\boldsymbol{E}_1,$$

也即静电波的扰动电场方向平行于其传播方向.可以令

$$\boldsymbol{E}_1=-\nabla\varphi_1.$$

这时弗拉索夫-麦克斯韦方程组可简化成

$$\frac{\partial f_{\alpha 1}}{\partial t}+\boldsymbol{v}\cdot\nabla f_{\alpha 1}=\frac{q_\alpha}{m_\alpha}\nabla\varphi_1\cdot\nabla_v f_{\alpha 0},\tag{9.1}$$

$$\nabla^2\varphi_1=-4\pi\sum_\alpha n_\alpha q_\alpha\int f_{\alpha 1}\mathrm{d}\boldsymbol{v}.\tag{9.2}$$

方程(9.1)两边同乘 $\exp[-\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)]$后作傅氏、拉氏变换:

$$L_\omega L_k\frac{\partial}{\partial t}f_{\alpha 1}\equiv\frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty}\exp[-\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)]\frac{\partial}{\partial t}f_{\alpha 1}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v},t)\mathrm{d}\boldsymbol{r}\mathrm{d}\boldsymbol{v}$$

$$=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\frac{\partial}{\partial t}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{(2\pi)^3}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}f_{\alpha 1}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v},t)\right]\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\frac{\partial}{\partial t}f_{\alpha k}(\boldsymbol{v},t)\mathrm{d}t$$

$$=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_r t-\gamma t}f_{\alpha k}(\boldsymbol{v},t)\Big|_0^{\infty}-\int\mathrm{i}\omega\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}f_{\alpha k}(\boldsymbol{v},t)\mathrm{d}t$$

$$=-f_{\alpha k}(\boldsymbol{v},0)-\mathrm{i}\omega f_{\alpha k}(\boldsymbol{v},\omega)$$

$$=-f_{\alpha k}(0)-\mathrm{i}\omega f_{\alpha\kappa},$$

其中,ω_r,γ 分别是 ω 的实部和虚部,$\kappa=(k,\omega)$;同理,

$$L_\omega L_k(\boldsymbol{v}\cdot\nabla f_{\alpha 1})=\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}f_{\alpha\kappa},$$

$$L_\omega L_k(\nabla\varphi_1)=\mathrm{i}\boldsymbol{k}\varphi_\kappa.$$

所以弗拉索夫-泊松方程在傅氏-拉氏空间变成

$$-\mathrm{i}(\omega-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v})f_{\alpha\kappa}=f_{\alpha k}(0)+\mathrm{i}\frac{q_\alpha}{m_\alpha}\boldsymbol{k}\cdot\nabla_v f_{\alpha 0}\varphi_\kappa,\tag{9.3}$$

$$k^2\varphi_\kappa=4\pi\sum_\alpha n_\alpha q_\alpha\int f_{\alpha\kappa}\mathrm{d}\boldsymbol{v}.\tag{9.4}$$

由上可得

$$f_{\alpha\kappa}=\frac{\mathrm{i}f_{\alpha k}(0)-(q_\alpha/m_\alpha)\boldsymbol{k}\cdot\nabla_v f_{\alpha 0}\varphi_\kappa}{\omega-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}}.\tag{9.5}$$

代入泊松方程后得

$$k^2\varphi_\kappa\left(1+\sum_\alpha\frac{4\pi n_\alpha q_\alpha^2}{k^2 m_\alpha}\int\frac{\boldsymbol{k}\cdot\nabla_v f_{\alpha 0}}{\omega-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}}\mathrm{d}\boldsymbol{v}\right)=4\pi\mathrm{i}\sum_\alpha n_\alpha q_\alpha\int\frac{f_{\alpha k}(0)}{\omega-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}}\mathrm{d}\boldsymbol{v}.\tag{9.6}$$

对于本征值问题:$f_{\alpha k}=0$,上式就成为齐次(色散)方程

$$D(\omega,\boldsymbol{k})\equiv 1+\sum_\alpha\frac{\omega_{p\alpha}^2}{k^2}\int\frac{\boldsymbol{k}\cdot\nabla_v f_{\alpha 0}}{\omega-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}}\mathrm{d}\boldsymbol{v}=0.\tag{9.7}$$

其存在非平凡解($\varphi_\kappa\neq 0$)的条件是:

$$\omega_j=\omega_j(\boldsymbol{k})\quad(j=1,2,\cdots),$$

这就是静电波的色散关系,它也被称为静电本征模或静电简正模.由色散方程决定不了扰动量 φ_κ 及 $f_{\alpha\kappa}$的绝对值,只能给出它们之间的相对关系.

对于初值问题:$f_{\alpha k}\neq 0$,可以用它及(9.6)式定出

$$\varphi_\kappa=\varphi_{k,\omega}=\frac{4\pi\mathrm{i}\sum_\alpha n_\alpha q_\alpha\int\frac{f_{\alpha k}(0)}{\omega-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}}\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{k^2 D(\omega,\boldsymbol{k})},\tag{9.8}$$

并从(9.5)式进一步给出 $f_{\alpha\kappa}$.

上面给出的 $D(\omega,\boldsymbol{k})$称为等离子体色散函数,也即第一章提到的等价介电张量. 在静电波情况下,它就是真正的介电张量. 因为在介质中往往引进电位移矢量 $\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E}$ 来代替电场描写介质因外电荷而产生的响应,而当不存在外电荷时(例如在上面所讨论的情况下)

$$\nabla\cdot\boldsymbol{D}=0,$$

令 $\boldsymbol{E}=-\nabla\varphi$,则有 $\varepsilon\,\nabla^2\varphi=0$. 在作傅氏变换后就得

$$k^2\varepsilon\varphi\equiv D\varphi=0,\ \Longrightarrow D=k^2\varepsilon.$$

这里的 D 和(9.7)式给出的等离子体色散函数在物理上等价,它正比于真正的介电常数. 此外,在静电波情况下,色散函数还可以进一步写成

$$D(\omega,\boldsymbol{k})=1+\sum_\alpha\chi_\alpha,\quad \chi_\alpha=-\frac{4\pi q_\alpha}{k^2}n_{\alpha\kappa}=-\frac{4\pi q_\alpha}{k^2}n_\alpha\int f_{\alpha\kappa}\mathrm{d}\boldsymbol{v}\,. \tag{9.9}$$

其中 χ_α 就是第 α 种粒子的极化率.

9.2 反应型(reactive)本征值解

为了能从(9.7)式中求得色散关系,必需求出积分. 一般情况下被积函数 $\nabla_v f_{\alpha0}/(\omega-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v})$不但是 $\boldsymbol{v}$ 的复杂函数,而且在 $\omega=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}$ 处有奇异性,故难以得到普遍的 $\omega(\boldsymbol{k})$解析表达式.

但当等离子体的所有粒子都具有同样的速度

$$f_{\alpha0}(\boldsymbol{v})=n_{b\alpha}\delta(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}_\alpha)$$

(即所谓的束等离子体)时,被积函数虽有奇异性,但仍能被解析地积出(例如在一维几何下,$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}=kv$)

$$\int\frac{\boldsymbol{k}\cdot\nabla_v f_{\alpha0}}{\omega-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}}=\int\frac{k\partial\delta(v-u_\alpha)/\partial v}{\omega-kv}\mathrm{d}v$$

$$=-k^2n_{b\alpha}\int\frac{\delta(v-u_\alpha)}{(\omega-kv)^2}\mathrm{d}v$$

$$=-\frac{k^2n_{b\alpha}}{(\omega-ku_\alpha)^2}.$$

所以最后可得

$$D(\omega,k)=1-\sum_\alpha\frac{\omega_{b\alpha}^2}{(\omega-ku_\alpha)^2}. \tag{9.10}$$

如果令等离子体中的离子不动 $u_i=0$,而电子有束流速度 u,则介电常数可写成

$$D(\omega,k)=1-\frac{\omega_{be}^2}{(\omega-ku)^2}-\frac{\omega_{bi}^2}{\omega^2}, \tag{9.11}$$

以上式子中 $\omega_{b\alpha}^2=4\pi n_{b\alpha}e^2/m_\alpha,\alpha=\mathrm{e},\mathrm{i}$, $n_{b\alpha}$则是束粒子的数密度. 由于离子质量很大,故可以进一步取 $m_i=\infty$,于是 $\omega_{bi}^2=0$,于是有

$$D(\omega,k)=1-\frac{\omega_{be}^2}{(\omega-ku)^2}. \tag{9.12}$$

这时的色散关系特别简单,由 $D(\omega,k)=0$ 可得

$$\omega_1=ku+\omega_{be},\quad \frac{\omega}{k}=u+\frac{\omega_{be}}{k},\ (\text{快波}) \tag{9.13}$$

$$\omega_2=ku-\omega_{be},\quad \frac{\omega}{k}=u-\frac{\omega_{be}}{k},\ (\text{慢波}) \tag{9.14}$$

其中 $ku>\omega_{be}$. 按第八章(8.2.2 小节)给出的扰动波能公式

$$\frac{\partial}{\partial\omega}(\omega D(\omega,k))=\frac{2\omega\omega_{be}^2}{(\omega-ku)^3},$$

可以看出

$$\omega_1:\ \frac{\partial}{\partial\omega}(\omega D(\omega,k))=2\left(1+\frac{ku}{\omega_{be}}\right)>0,$$

$$\omega_2:\ \frac{\partial}{\partial\omega}(\omega D(\omega,k))=-2\left(-1+\frac{ku}{\omega_{be}}\right)<0.$$

故快波是正能波,而慢波是负能波. 负能波的概念只有在等离子体动理学中才出现,这里对它的物理意义来作一说明.

对受扰动波场影响的电子系,其自洽的扰动分布函数为(仍取一维几何)

$$f_{ek} = -\frac{k\varphi_k}{m_e}\frac{\partial f_{e0}(v)/\partial v}{\omega - kv} = a\frac{\delta'(v-u)}{\omega - kv},\quad a = -\frac{k\varphi_k}{m_e}.$$

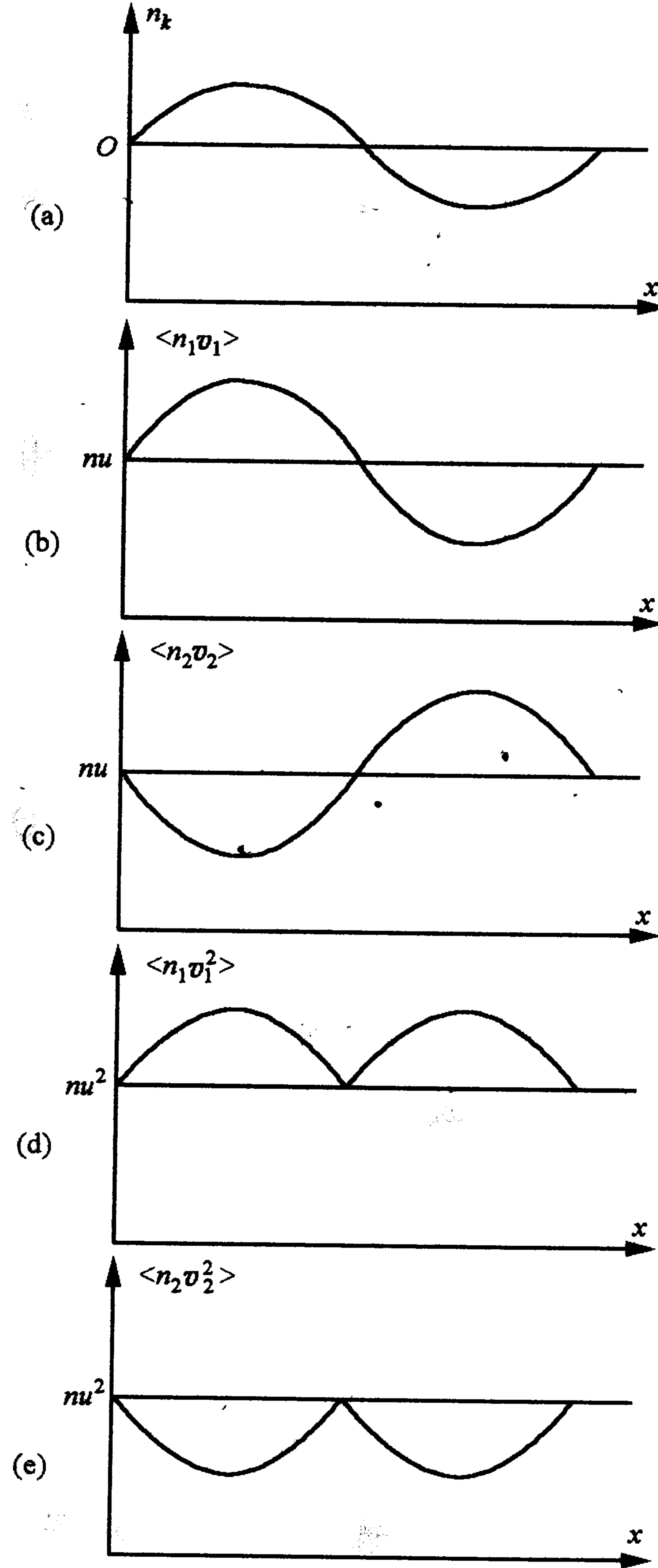


图 9.1 电子系在正能波和负能波中的粒子流与扰动能量

由此可求得如下几项.

(i) 在波场中的扰动电子密度.

$$n(\omega) = \int f_{ek}\mathrm{d}\boldsymbol{v} = -\frac{ak}{(\omega - ku)^2},$$

$$n_1(\omega_1) = n_2(\omega_2) = -\frac{ak}{\omega_{be}^2} > 0.$$

这说明正、负能波所造成的电子密度扰动都是相同的(见图 9.1(a)).

(ii) 扰动粒子流.

$$\langle n(\omega)(v-u)\rangle = \int (v-u) f_{ek}\mathrm{d}\boldsymbol{v} = -\frac{a}{\omega - ku}. \tag{9.15}$$

由此可知

$$\langle n(\omega_1)(v_1 - u)\rangle = -\frac{a}{\omega_b} > 0,$$

$$\langle n(\omega_2)(v_2 - u)\rangle = \frac{a}{\omega_b} < 0.$$

即扰动的粒子流 $\langle nv - nu\rangle$,在正、负能波中是相位相反的(见图 9.1(b)、(c)).

(iii) 电子系扰(抖)动能量.

$$\langle n(\omega)v^2\rangle = \int v^2 f_{ek}\mathrm{d}\boldsymbol{v} = \frac{aku^2}{(\omega - ku)^2} - \frac{2au}{\omega - ku},$$

$$\langle n(\omega_1)v_1^2\rangle - n(\omega_1)u^2 = -\frac{2au}{\omega_{be}} > 0,$$

$$\langle n(\omega_2)v_2^2\rangle - n(\omega_2)u^2 = \frac{2au}{\omega_{be}} < 0.$$

这样在正、负能波场中的电子扰动能量也是相反的(见图 9.1(d)、(e)). 正能波中的电子扰动能大于未扰动电子束的平均动能,而在负能波场中的电子扰动能却低于束的平均动能——这就是负能波名称的来由.

反应型本征模的介电函数虽然是实的 $D(\omega,\boldsymbol{k})$,但也可以存在阻尼或不稳定的本征模,即从 $D_r(\omega,\boldsymbol{k})=0$ 可以得到复的色散关系 $\omega=\omega_r+\mathrm{i}\gamma$. 因为从介电函数的一般表达式

$$D(\omega,\boldsymbol{k}) = 1 - \sum_\alpha \frac{\omega_{b\alpha}^2}{(\omega - ku_\alpha)^2} = 0$$

可以看出:当等离子体中有 $N(N\geqslant 2)$ 种以上粒子时,色散方程是 ω^{2N} 阶的代数方程;它们的解除了实根外,在一定的参数范围内还有成对出现的复根 $\omega_j^{\pm}=\omega_{rj}\pm\mathrm{i}\gamma_j$,它们就是一对不稳定和阻尼的反应型本征模. 但和耗散型的不稳定/阻尼模起因于波-粒子间交换能量不同,反应型不稳定模是原本稳定的正、负能波相互耦合后,能量从负能波馈入正能波使两支波都同时增大而造成的(阻尼模则是相反过程引起的). 下面就是一个反应型束-等离子体不稳定模的例子.

设在一冷的背景等离子体(n_0)中,有弱电子束($n_b \ll n_0$)以速度 $v=v_b$ 射入,假若背景离子不动($m_i=\infty$, $\omega_{pi}=0$),则这个体系的色散函数和色散方程可写为

$$D(\omega,\boldsymbol{k}) = 1 - \frac{\omega_{\mathrm{pe}}^2}{\omega^2} - \frac{\omega_{\mathrm{be}}^2}{(\omega - kv_{\mathrm{b}})^2} = 0. \tag{9.16}$$

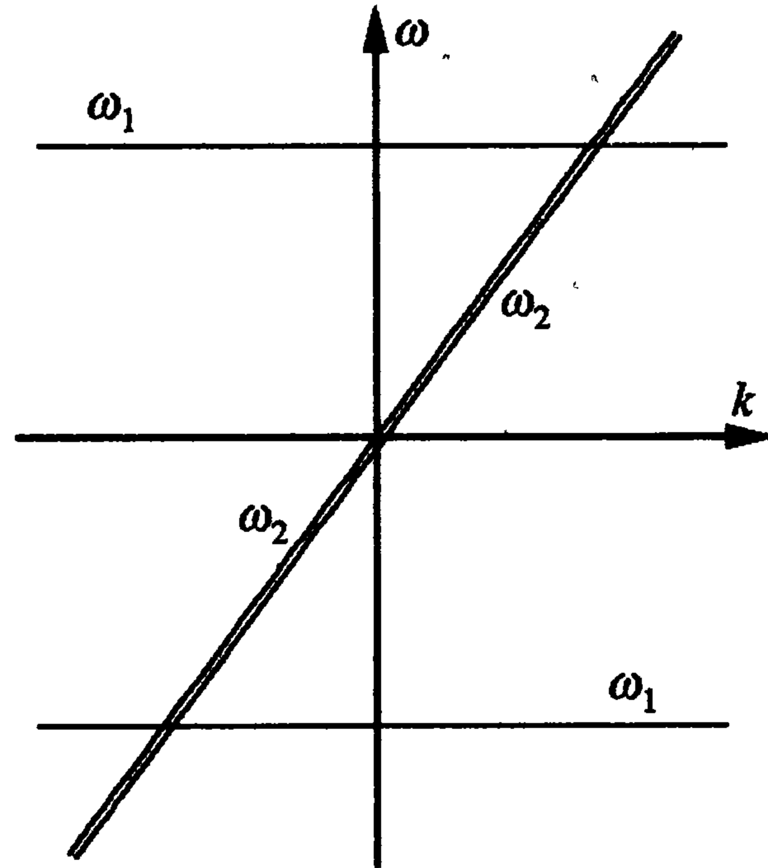


图 9.2 两支独立线性波的色散图

此方程有比较严格的解，但在这里只给出一种虽然定性但物理意义比较明晰的讨论（正规的处理请见第十二章第一节）.

在只考虑背景电子或只考虑束电子时，相应的色散方程和色散关系分别是（见图 9.2）

$$1 - \frac{\omega_{\mathrm{pe}}^2}{\omega^2} = 0, \quad \omega_1 = \pm\,\omega_{\mathrm{pe}},$$

$$1 - \frac{\omega_{\mathrm{be}}^2}{(\omega - kv_{\mathrm{b}})^2} = 0, \quad \omega_2 = kv_{\mathrm{b}} \pm \omega_{\mathrm{be}}.$$

而当两类电子同时起作用时，它们的综合效果相当于上述两支波的耦合，设耦合强度为 $\varepsilon=$常数<0（具体表达式将在下面给出），则（波）模耦合方程可等价写成以下形式

$$(\omega - \omega_1)(\omega - \omega_2) = \varepsilon.$$

这是关于 ω 的二次方程. 当 $\varepsilon=0$ 时，其解就是 ω_1 和 ω_2；而当 $\varepsilon\neq 0$ 时有解

$$\omega = \frac{1}{2}\left[\omega_1 + \omega_2 \pm \sqrt{(\omega_1 - \omega_2)^2 + 4\varepsilon}\right].$$

于是当根号内的项为负，$(\omega_1-\omega_2)^2+4\varepsilon<0$ 时，频率会含虚部 $\gamma\neq 0$，这就意味着耦合波存在不稳定性. 这种不稳定的增长率 γ 在 $\omega_1=\omega_2$ 时达到极大——这就是说，两支波模的非线性耦合在波频（及波矢）相等时最容易发生. 这些结论不仅对束-等离子体波的模耦合有效，而且对一般的模耦合过程都有效.

下面再回到束-等离子体不稳定性上来. 首先讨论 $kv_{\mathrm{b}}\gg\omega$ 或 $kv_{\mathrm{b}}\ll\omega$ 时的情况，考虑到 $\omega_{\mathrm{be}}\ll\omega_{\mathrm{pe}}(n_{\mathrm{b}}\ll n_0)$，故(9.16)式可近似成

$$1 - \frac{\omega_{\mathrm{pe}}^2}{\omega^2} - \frac{\omega_{\mathrm{be}}^2}{\omega^2} \approx 1 - \frac{\omega_{\mathrm{pe}}^2}{\omega^2} - \frac{\omega_{\mathrm{be}}^2}{\omega_{\mathrm{pe}}^2} = 0.$$

其中束粒子项可看成对 $\omega_1=\omega_{\mathrm{pe}}$波的小修正，由此可得这时的色散关系

$$\omega_1 = \pm\,\omega_{\mathrm{pe}}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{\omega_{\mathrm{be}}^2}{\omega_{\mathrm{pe}}^2}\right). \tag{9.17}$$

其次，讨论 $\omega\sim kv_{\mathrm{b}}$ 的情况，这时色散方程中的主要贡献来自束粒子，而电子项的贡献可看成耦合小量

$$1 - \frac{\omega_{\mathrm{be}}^2}{(\omega - kv_{\mathrm{b}})^2} = \frac{\omega_{\mathrm{pe}}^2}{\omega^2}.$$

进一步又可分成以下两种情况：

(i) $\omega\sim kv_{\mathrm{b}}>\omega_{\mathrm{pe}}$（即 n_0 比较小），于是

$$1 - \frac{\omega_{\mathrm{be}}^2}{(\omega - kv_{\mathrm{b}})^2} \approx 0, \;\Longrightarrow\; \omega_2 = kv_{\mathrm{b}} \pm \omega_{\mathrm{be}}. \tag{9.18}$$

这是两支稳定的高频波.

(ii) $\omega\sim kv_{\mathrm{b}}<\omega_{\mathrm{pe}}$（即 n_0 比较大），于是

$$1 - \frac{\omega_{\mathrm{be}}^2}{(\omega - kv_{\mathrm{b}})^2} \approx \frac{\omega_{\mathrm{pe}}^2}{k^2v_{\mathrm{b}}^2} > 1, \;\Longrightarrow\; \frac{\omega_{\mathrm{be}}^2}{(\omega - kv_{\mathrm{b}})^2} \approx -\frac{\omega_{\mathrm{pe}}^2}{k^2v_{\mathrm{b}}^2}.$$

结果得到一支不稳定的波

$$\omega_2' = kv_{\mathrm{b}}\left(1 \pm \mathrm{i}\,\frac{\omega_{\mathrm{be}}}{\omega_{\mathrm{pe}}}\right), \tag{9.19}$$

其增长率为

$$\frac{\gamma}{\omega_{\mathrm{r}}} = \frac{\omega_{\mathrm{be}}}{\omega_{\mathrm{pe}}} \ll 1,$$

符合线性分析的前提（但 ω 不能正好等于 kv_{b}，否则会由于束粒子和电子等离子体波的强共振而使 $\gamma\to\infty$，这就超出了线性分析的适用范围）. 以上得出的几支波的色散曲线可见图 9.3.

由色散图可以看出：在 $kv_{\mathrm{b}}>\omega_{\mathrm{pe}}$时，$\omega_1$，$\omega_2$ 两支波都是稳定的. 而在 $kv_{\mathrm{b}}\approx\omega_{\mathrm{pe}}$处即这两支波色散曲线的交点附近，由于模耦合，使 ω_2 变成了不稳定的 ω_2'，其不稳定增长所需要的能量来自 ω_1. 这可以从波能的正、负来看出：

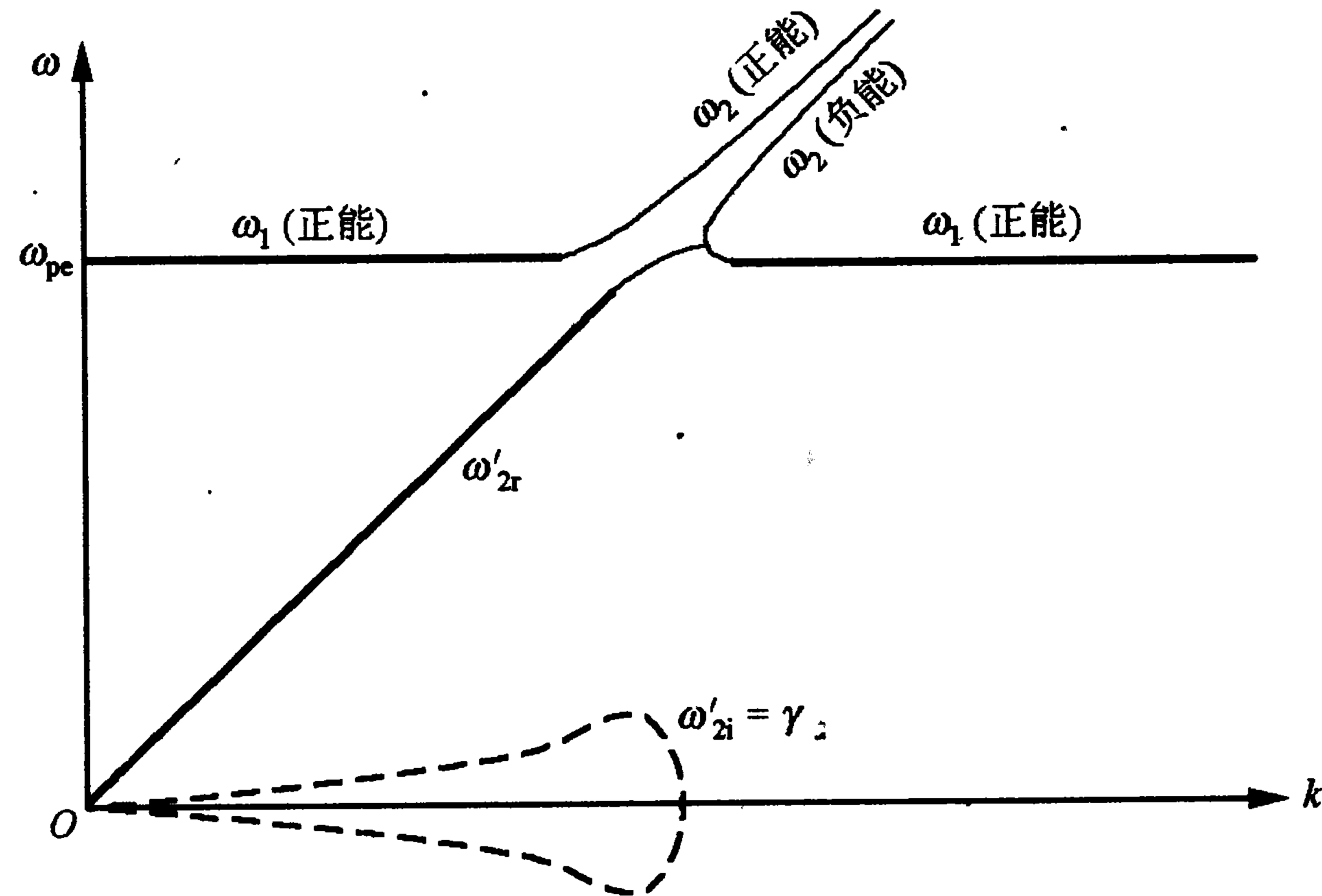


图 9.3 两支耦合的线性波的色散图

$$\frac{\partial(\omega D_r)}{\partial\omega}=\omega\frac{\partial D}{\partial\omega}=\frac{2\omega_{pe}^2}{\omega^2}+\frac{2\omega\omega_{be}^2}{(\omega-kv_b)^3},$$

$$\left.\frac{\partial(\omega D_r)}{\partial\omega}\right|_{\omega_1}\approx 2+\frac{2\omega_{be}^2}{\omega_{pe}}\sim 2>0,$$

$$\left.\frac{\partial(\omega D_r)}{\partial\omega}\right|_{\omega_2}\approx 2\left(\frac{\omega_{be}}{kv_b}\right)^2\pm\frac{2kv_b}{\omega_{be}}\sim\frac{2kv_b}{\omega_{be}}.$$

从上式可以知道，ω_1 和 $\omega_2^+=kv_b+\omega_{be}$是正能波，而 $\omega_2^-=kv_b-\omega_{be}$的另一支是负能波；正是由 ω_1 和 ω_2^- 的正、负能波耦合，而产生了不稳定的波 ω_2'. 但由于处在不稳定增长的线性阶段，故正能波的色散关系没有受到明显的影响.

最后，从群速度

$$\left.\frac{\partial\omega}{\partial k}\right|_{\omega_2'}\approx v_b\neq 0,$$

可以看出：束-等离子体不稳定性是一种可移不稳定.

9.3 耗散型(dissipative)本征值解

9.3.1 色 散 方 程

在一般情况下，等离子体中的粒子处在近热力学平衡状态，其零阶速度分布接近麦克斯韦分布，因此含 $f_{\alpha 0}$的速度空间积分不能轻易积出，相应的本征值问题称为耗散型的. 利用 $\omega=\omega_r+i\gamma$，$|\gamma/\omega_r|\ll 1$，可将色散方程中的色散(介电)函数作如下展开：

$$\begin{aligned}D(\omega,\boldsymbol{k})&=D(\omega_r+i\gamma,\boldsymbol{k})\\&=\left(1+i\gamma\frac{\partial}{\partial\omega_r}\right)D(\omega_r,\boldsymbol{k})\\&=\left(1+i\gamma\frac{\partial}{\partial\omega_r}\right)(D_r(\omega_r,\boldsymbol{k})+iD_i(\omega_r,\boldsymbol{k}))\\&=D_r(\omega_r,\boldsymbol{k})-\gamma\frac{\partial}{\partial\omega_r}D_i(\omega_r,\boldsymbol{k})\\&\quad+i\left[D_i(\omega_r,\boldsymbol{k})+\gamma\frac{\partial}{\partial\omega_r}D_r(\omega_r,\boldsymbol{k})\right]\\&=0.\end{aligned}$$

由上式的实部和虚部分别为零，可以得到以下两个方程

$$D_r(\omega_r,\boldsymbol{k})=\gamma\frac{\partial}{\partial\omega_r}D_i(\omega_r,\boldsymbol{k})\approx 0,\ \Longrightarrow\ \omega_r=\omega_r(\boldsymbol{k}),\tag{9.20}$$

$$D_i(\omega_r,\boldsymbol{k})=-\gamma\frac{\partial}{\partial\omega_r}D_r(\omega_r,\boldsymbol{k}),\ \Longrightarrow\ \gamma=\frac{D_i(\omega_r,\boldsymbol{k})}{\partial D_r(\omega_r,\boldsymbol{k})/\partial\omega_r}.\tag{9.21}$$

这时 γ 正比于 $D_i\neq 0$，而 D_i 又是积分

$$\int du\,\frac{k\partial f_{\alpha 0}/\partial u}{\omega-ku}$$

中的奇异部分. 只有当 $\partial f_{\alpha 0}/\partial u$ 不太大的情况下 D_i 才比较小，才有 $\gamma\ll\omega_r$. 故 $f_{\alpha 0}$必定离平衡态不远，所以在许多情况下往往可以把它近似取作麦克斯韦分布 $f_{\alpha M}$. 这是耗散型本征模不同于反应型

本征值问题的关键之处.

现在来求 D_r 和 D_i 的表达式，从定义出发

$$D(\omega_r,k) = 1 - \sum_\alpha \frac{\omega_{p\alpha}^2}{k^2}\int \frac{\partial f_{\alpha 0}/\partial u}{u - \omega_r/k - i\omega_i/k}du, \quad ku = \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{u}. \tag{9.22}$$

其中被积函数在 $u=\omega_r/k$ 处有奇点，利用 Plemelj 公式（在下一小节中将给予证明）有

$$\lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{x\mp i\epsilon} = \frac{\mathscr{P}}{x} \pm i\pi\delta(x). \tag{9.23}$$

式中取上面的符号表示积分回路从上半平面逼近奇点（即 $x=0$ 点），而取下面的符号则代表回路从下半面逼近奇点. 这样(9.22)式中的积分就可以分出实、虚部

$$\int \frac{\partial f_{\alpha 0}/\partial u}{u - \omega_r/k - i\omega_i/k}du = \mathscr{P}\int \frac{\partial f_{\alpha 0}/\partial u}{u - \omega_r/k}du + i\pi\frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial u}\bigg|_{u=\omega_r/k}.$$

所以，最后有

$$D_r(\omega_r,\boldsymbol{k}) = 1 - \sum_\alpha \frac{\omega_{p\alpha}^2}{k^2}\mathscr{P}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f_{\alpha 0}/\partial u}{u - \omega_r/k - i\omega_i/k}du, \tag{9.24}$$

$$D_i(\omega_r,\boldsymbol{k}) = -\pi\sum_\alpha \frac{\omega_{p\alpha}^2}{k^2}\frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial u}\bigg|_{\omega_r/k}. \tag{9.25}$$

由上式可见：D_i，因而 γ 与 $\partial f_{\alpha 0}/\partial u$ 在共振点 $u=\omega_r/k$ 处的正、负号密切相关

$$\frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial u} < 0, \Rightarrow D_i > 0, \Rightarrow \gamma < 0, \text{阻尼}, \tag{9.26}$$

$$\frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial u} > 0, \Rightarrow D_i < 0, \Rightarrow \gamma > 0, \text{不稳定}. \tag{9.27}$$

上式中的阻尼（不稳定）又称朗道阻尼（朗道逆阻尼），它是由速度 u 和波的相速度 ω_r/k 刚好相等的那部分（共振）粒子和波交换能量而引起的. 在整个粒子系中，共振粒子所占比例虽然非常小，但它和波可以有较长时间的相互作用，因此造成了可以有观察效应

的结果. 其余的粒子则称为非共振粒子，它们每个和波的相互作用虽然都不强，但数量庞大. 它们从波场中得到了可观的抖动能量，减少了波场（通过共振相互作用）可以交给共振粒子系的自由能，所以也对 γ 的大小有贡献（但对符号无影响）. 这贡献反应在 γ 表达式的分母 $\partial D_r/\partial\omega_r$ 上.

这种本征值问题，由于其介电函数有虚部，从而导致 $\gamma\neq 0$，使波能在和粒子系的相互作用中传给了粒子系而损耗，因此而得名. 而反应型的本征值问题中，介电函数总是实数，$\gamma\neq 0$ 是由于在正、负能波之间交换能量而致，这时二支波的总和并没有损耗.

静电波的色散方程还可以写成

$$D(\omega,\boldsymbol{k}) = 1 + \sum_\alpha \chi_\alpha = 0, \quad \chi_\alpha = -\frac{4\pi q_\alpha}{k^2}n_{\alpha k} = -\frac{4\pi q_\alpha}{k^2}n_\alpha\int d\boldsymbol{v} f_{\alpha k}. \tag{9.28}$$

其中 χ 是极化率，由于它和平衡分布 $f_{\alpha 0}$ 有关，故无法给出一般的表达式. 但当平衡分布为麦克斯韦分布时，可以把极化率用特殊函数表示出来：

$$\chi_\alpha = \frac{1}{k^2\lambda_{D\alpha}^2}(1 + \xi_\alpha Z(\xi_\alpha)). \tag{9.29}$$

其中 Z 是等离子体色散函数

$$Z(\xi_\alpha) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \frac{e^{-x^2}}{x - \xi_\alpha}. \tag{9.30}$$

其中 $x=u/v_t$ 是用热速度归一的粒子速度，而 $u=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}/|\boldsymbol{k}|$ 是平行于传播方向的粒子速度. $\xi=\omega/(kv_t)$ 是以粒子热速度归一的静电波相速度. $Z(\xi)$ 的值有数表可查，而在 $\xi\ll 1$ 和 $\xi\gg 1$ 的极限下分别有幂级数式的微扰展开式和渐近表达式（见后）. 当

$$k^2\lambda_{D\alpha}^2 \ll 1, \Rightarrow \chi_\alpha \gg 1, \quad D(\omega,\boldsymbol{k}) \approx \sum_\alpha \chi_\alpha = 0, \Rightarrow \sum_\alpha n_{\alpha k}q_\alpha = 0.$$

这在物理上相当于准中性条件. 即在静电波的波长（相对德拜长度）很长时，因为其相速度变得足够慢，无论是电子或离子的运动

都完全可以同步跟上静电波场的时间变化,不会产生电荷分离,从而保持了整个等离子体系的电中性.

9.3.2 Plemelj 公式及朗道阻尼的物理图像

1. Plemelj 公式及其推广

上一小节中遇到的奇异积分,可写成

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial f_{a0}/\partial u}{u-\omega/k}\mathrm{d}u=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{F(x)}{x-\mathrm{i}\gamma}\mathrm{d}x,$$

$$x=u-\omega_r/k,\quad \omega=\omega_r+\mathrm{i}\gamma,\quad \gamma>0.$$

其中积分沿实轴从$-\infty$直到∞. 在$x=\mathrm{i}\gamma$处,被积函数有奇点(发散). 在耗散型本征模问题中,$\gamma\sim 0$,故当取$\gamma\to 0$的极限时奇点将从上半面趋向原点,这时为了避开奇点$x=0$,积分路径应在$x=0$点处从下半平面绕半个小圆(见图 9.4). 设小圆半径为ε,则上面的积分可以分成如下三段:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{F(x)}{x}\mathrm{d}x=\left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon}+\int_{\cup}+\int_{\varepsilon}^{\infty}\right)\frac{F(x)}{x}\mathrm{d}x$$

$$\equiv\left(\mathscr{P}\int_{-\infty}^{\infty}+\int_{\cup}\right)\frac{F(x)}{x}. \tag{9.31}$$

图 9.4 推导 Plemelj 公式时所用的积分路径

其中$\mathscr{P}\int$代表积分的主值部分,它的被积函数没有发散的问题,故总是有限的;而最后一项可作如下处理:

$$\int_{\cup}\frac{F(x)}{x}\mathrm{d}x=\int_{-\pi}^{0}\frac{F(\varepsilon e^{\mathrm{i}\varphi})}{\varepsilon e^{\mathrm{i}\varphi}}\mathrm{d}(\varepsilon e^{\mathrm{i}\varphi})$$

$$=\mathrm{i}\int_{-\pi}^{0}F(\varepsilon e^{\mathrm{i}\varphi})\mathrm{d}\varphi.$$

当$\gamma\to 0$时,$\varepsilon\to 0$,故

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\frac{F(x)}{x}\mathrm{d}x=\lim_{\varepsilon\to 0}\mathrm{i}\int F(x)|_{x=0}\,\mathrm{d}\varphi=\mathrm{i}\pi F|_{x=0}.$$

所以,最后有

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{F(x)}{x}\mathrm{d}x=\mathscr{P}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{F(x)}{x}\mathrm{d}x+\mathrm{i}\pi F(x)|_{x=0}. \tag{9.32}$$

这相当于将其中的被积函数写成(这就是所谓的 Plemelj 公式)

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{x-\mathrm{i}\varepsilon}=\frac{\mathscr{P}}{x}+\mathrm{i}\pi\delta(x). \tag{9.33}$$

上式是时间扰动量$A(t)$作双边拉氏变换时,变换后的扰动量$A(\omega)$是定义在上半平面($\mathrm{Im}\omega=\gamma>0$)的解析函数,因而奇点也在上半平面,并从上半平面趋于零点的情况(见图 9.5(a),(b));如果一开始解析函数$A(\omega)$是定义在下半平面的,奇点也在下半平面($\gamma<0$)、然后从下半平面趋向零点(见图 9.6(a),(b)),则相应的 Plemelj 公式应为

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{x+\mathrm{i}\varepsilon}=\frac{\mathscr{P}}{x}-\mathrm{i}\pi\delta(x). \tag{9.34}$$

在上式的推导中,积分路径在零点附近是通过上半平面的小圆绕过奇点的.

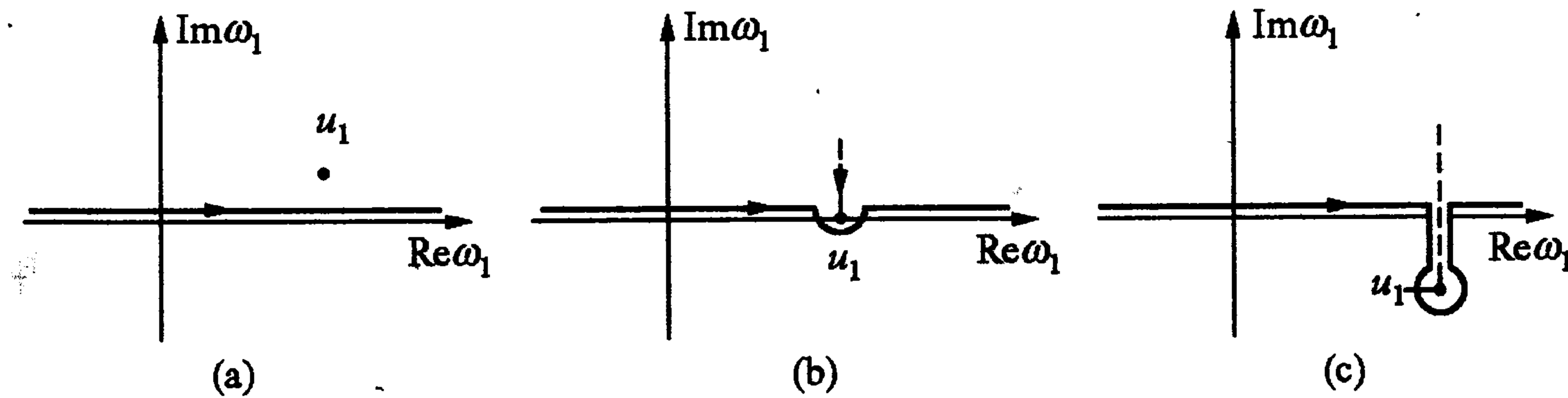


图 9.5 定义在ω上半平面的解析函数所用的积分路径

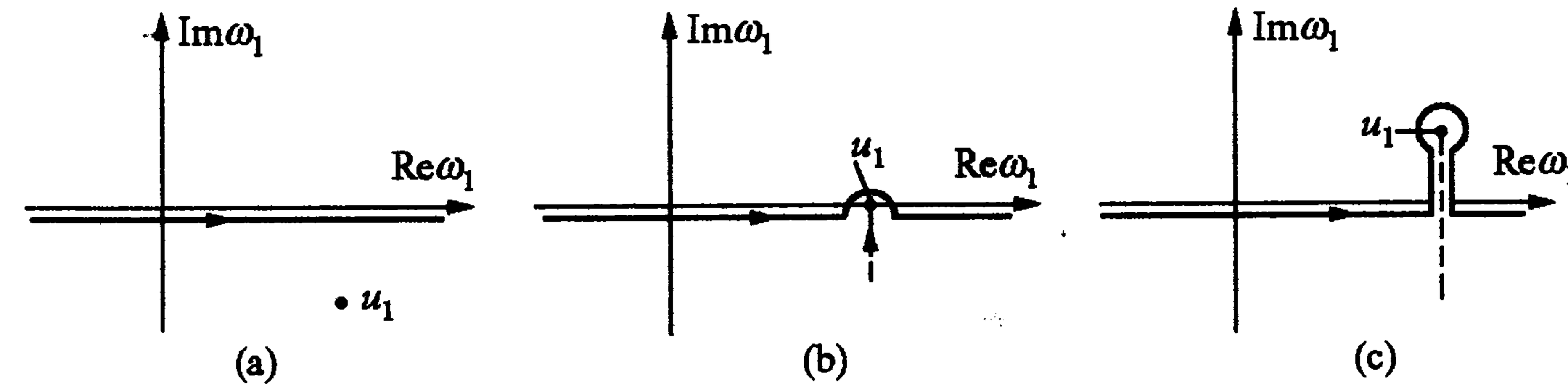


图 9.6 定义在ω下半平面的解析函数所用的积分路径

以上是奇点的虚部$\varepsilon\to 0$的情况. 如果$\varepsilon=\gamma$是一个有限大的量,则对于定义在上半平面的解析函数,当$\gamma>0$时,奇点在上半平

面，积分路径上没有奇点，积分将取主值；而当 $\gamma<0$ 时，积分路径为了避开奇点要从下半平面绕奇点一个整小圆(图 9.5(c))，这样积分的虚部将比 Plemelj 公式中的虚部大一倍. 于是有

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{F(x)}{x-\mathrm{i}\gamma}\mathrm{d}x=\mathscr{P}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{F(x)}{x-\mathrm{i}\gamma}\mathrm{d}x,\quad \gamma>0,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{F(x)}{x-\mathrm{i}\gamma}\mathrm{d}x=\mathscr{P}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{F(x)}{x}\mathrm{d}x+\mathrm{i}2\pi F(x)|_{x=0},\quad \gamma<0.$$

如果一开始双边拉氏变换后的 $A(\omega)$ 是一个定义在下半平面的解析函数，则情况会反过来(图 9.6(c))

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{F(x)}{x-\mathrm{i}\gamma}\mathrm{d}x=\mathscr{P}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{F(x)}{x-\mathrm{i}\gamma}\mathrm{d}x,\quad \gamma<0,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{F(x)}{x-\mathrm{i}\gamma}\mathrm{d}x=\mathscr{P}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{F(x)}{x}\mathrm{d}x-\mathrm{i}2\pi F(x)|_{x=0},\quad \gamma>0.$$

这两类公式和 Plemelj 公式一起构成了奇异积分完整的表达式.

利用上面的公式，可以进一步给出静电波介电常数的具体表达式，按前面给出的定义

$$D(\omega_1,\boldsymbol{k}_1)=1+\frac{\omega_p^2}{k_1^2}\boldsymbol{k}_1\cdot\int\frac{\partial f(\boldsymbol{v})}{\partial\boldsymbol{v}}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\omega_1-\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{v}},$$

令 $\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{v}_1=k_1u$ ($u=v\cos\theta$，θ 是 $\boldsymbol{k}_1$ 与 $\boldsymbol{v}$ 间夹角)和 $u_1=\omega_1/k_1$，再利用

$$\mathrm{d}\boldsymbol{v}=\mathrm{d}u\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_\perp,\quad f(\boldsymbol{v})=F(u)f_\perp(\boldsymbol{v}_\perp),\quad \int f_\perp(\boldsymbol{v}_\perp)\mathrm{d}\boldsymbol{v}_\perp=1,$$

则有

$$D(\omega_1,\boldsymbol{k}_1)=1-\frac{\omega_p^2}{k_1^2}\int\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\mathrm{d}u}{u-u_1}.\tag{9.35}$$

这是一个定义在 ω_1 上半平面的解析函数. 而

$$D(-\omega_1,-\boldsymbol{k}_1)=1-\frac{\omega_p^2}{k_1^2}\int\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\mathrm{d}u}{u-u_1},\tag{9.36}$$

则是定义在 ω_1 下半平面的解析函数. 两者的表达式虽然一样，但它们的虚部(奇点的留数)并不相同.

按上面的讨论，对定义在 ω_1 上半平面的 $D(\omega_1,\boldsymbol{k}_1)$ 有

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\mathrm{d}u}{u-u_1}=\mathscr{P}\int\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\mathrm{d}u}{u-u_1}\equiv E(u_1),\quad \mathrm{Im}\omega_1>0,$$

$$\int\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\mathrm{d}u}{u-u_1}=\mathscr{P}\int\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\mathrm{d}u}{u-u_1}+\mathrm{i}\pi\frac{\partial F}{\partial u}\Big|_{u=u_1}$$

$$=E(u_1)+\mathrm{i}\pi\frac{\partial F}{\partial u}\Big|_{u=u_1},\quad \mathrm{Im}\omega_1=0^+,$$

$$\int\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\mathrm{d}u}{u-u_1}=\mathscr{P}\int\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\mathrm{d}u}{u-u_1}+\mathrm{i}2\pi\frac{\partial F}{\partial u}\Big|_{u=u_1}$$

$$=E(u_1)+\mathrm{i}2\pi\frac{\partial F}{\partial u}\Big|_{u=u_1},\quad \mathrm{Im}\omega_1<0.$$

所以对于最初定义在上半平面的色散函数 $D(\omega_1,\boldsymbol{k}_1)$，可写成

$$D(\omega_1,\boldsymbol{k}_1)=\begin{cases}1-\dfrac{\omega_p^2}{k_1^2}E(u_1), & \mathrm{Im}\omega_1>0,\\[2mm] 1-\dfrac{\omega_p^2}{k_1^2}\left(E(u_1)+\mathrm{i}\pi\dfrac{\partial F}{\partial u}\Big|_{u_1}\right), & \mathrm{Im}\omega_1=0,\\[2mm] 1-\dfrac{\omega_p^2}{k_1^2}\left(E(u_1)+\mathrm{i}2\pi\dfrac{\partial F}{\partial u}\Big|_{u_1}\right); & \mathrm{Im}\omega_1<0.\end{cases}$$

而对于最初定义在下半平面的色散函数 $D(-\omega_1,-\boldsymbol{k}_1)$，则可写成

$$D(-\omega_1,-\boldsymbol{k}_1)=\begin{cases}1-\dfrac{\omega_p^2}{k_1^2}\left(E(u_1)-\mathrm{i}2\pi\dfrac{\partial F}{\partial u}\Big|_{u_1}\right), & \mathrm{Im}\omega_1>0,\\[2mm] 1-\dfrac{\omega_p^2}{k_1^2}\left(E(u_1)-\mathrm{i}\pi\dfrac{\partial F}{\partial u}\Big|_{u_1}\right), & \mathrm{Im}\omega_1=0,\\[2mm] 1-\dfrac{\omega_p^2}{k_1^2}E(u_1), & \mathrm{Im}\omega_1<0.\end{cases}$$

由此可以看出当 $\mathrm{Im}\omega_1>0$ 或 $\mathrm{Im}\omega_1<0$ 时，都有 $D(\omega_1,\boldsymbol{k}_1)\neq D(-\omega_1,-\boldsymbol{k}_1)^*$；只有当 $\mathrm{Im}\omega_1=0$ 时才有

$$D(\omega_1,\boldsymbol{k}_1)=D(-\omega_1,-\boldsymbol{k}_1)^*,\quad \mathrm{Im}\omega_1=0.$$

2. 朗道阻尼及其产生条件——碰撞

在色散函数虚部 D_i 中的 $\partial F/\partial u|_{u_1}$ 表示等离子体波和等离子体中速度与波相速度相近的带电粒子有共振型的相互作用，从而交换能量. 其物理图像如下：在随波一起运动的坐标系中，静电波的电场和势能都是静止的，由于那些共振粒子的速度和静电波的传播速度相近，所以它们有足够长的时间和静电波场相互作用——开始速度略小于波速的粒子会处在势阱的左面(图9.7)，

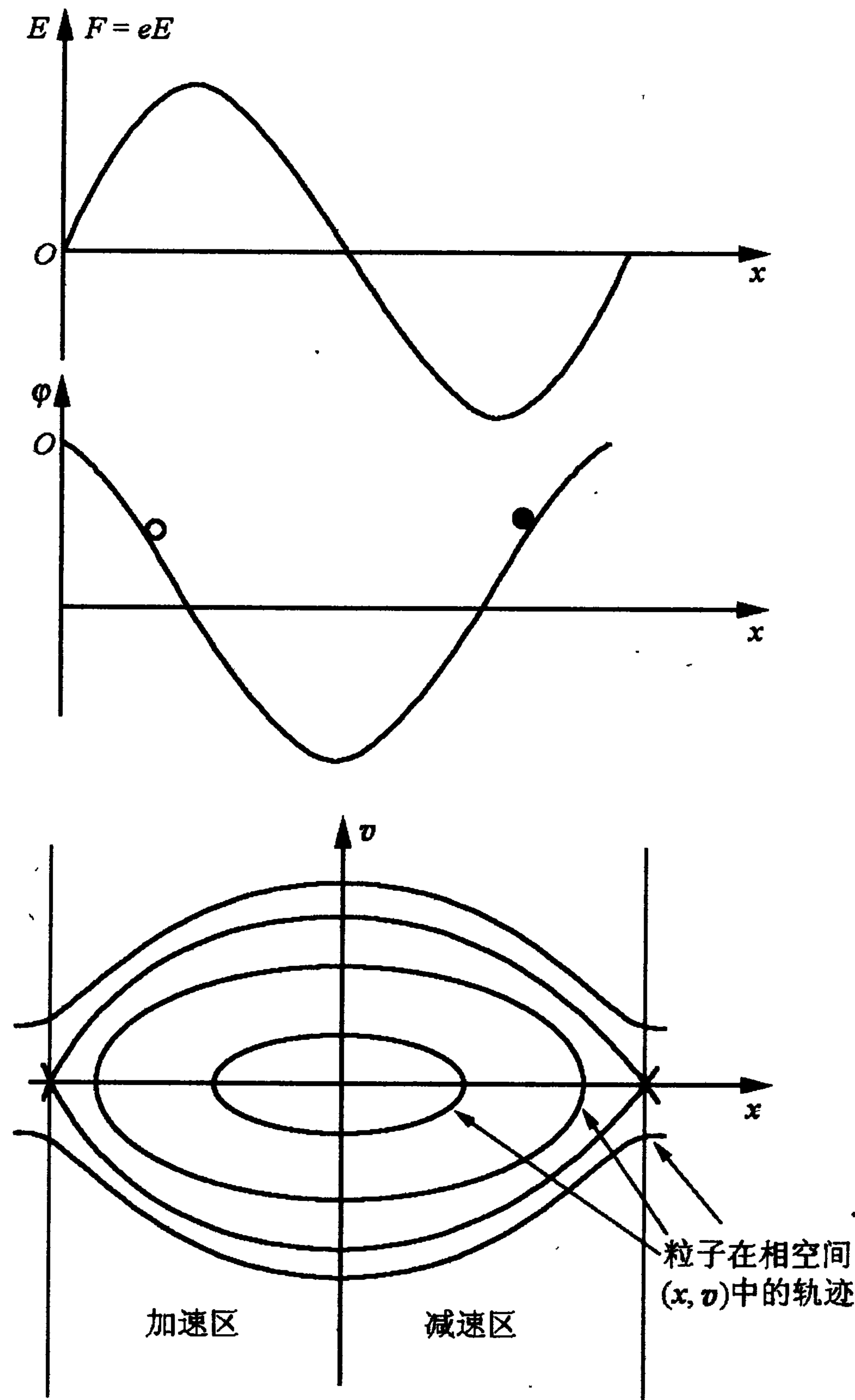


图 9.7 共振粒子在静电波场中的加速和减速

这时在静电力的作用下它会被向前加速从而遂渐赶上波场，在图上的位置也移向势阱中心；然后其速度将会超过波场，位置也移到了势阱的右面，而这时所受到的静电力变成了减速力，粒子的速度不断减少，当降至波相速之下后它开始向势阱中心后退，最后又回到势阱的左面. 而一开始速度略大于波场相速度的带电粒子则从势阱右壁滑向中心、冲上左壁然后又回到右壁. 无论是哪种情况，粒子在被加速时都会从波场中吸取能量，而在被减速时交还能量；只要没有外来的影响(例如别的粒子的突然碰撞)打断这种循环，波就会和这些共振粒子长时间地交换能量.

这时，如果 $\partial F/\partial u|_{u_1}<0$(见图 9.8(a))，就表示共振粒子中速度比波相速度慢的粒子多于快粒子，从而在整体上粒子系要从波场中吸取能量——于是波就会阻尼，这通常称为朗道阻尼. 反之，当 $\partial F/\partial u|_{u_1}>0$(见图 9.8(b))，就表示共振粒子中速度比波相速度慢的粒子少于快粒子，从而在整体上粒子系交给波场能量——于是波就会不断增长，从而导致波的不稳定，这又称朗道逆阻尼.

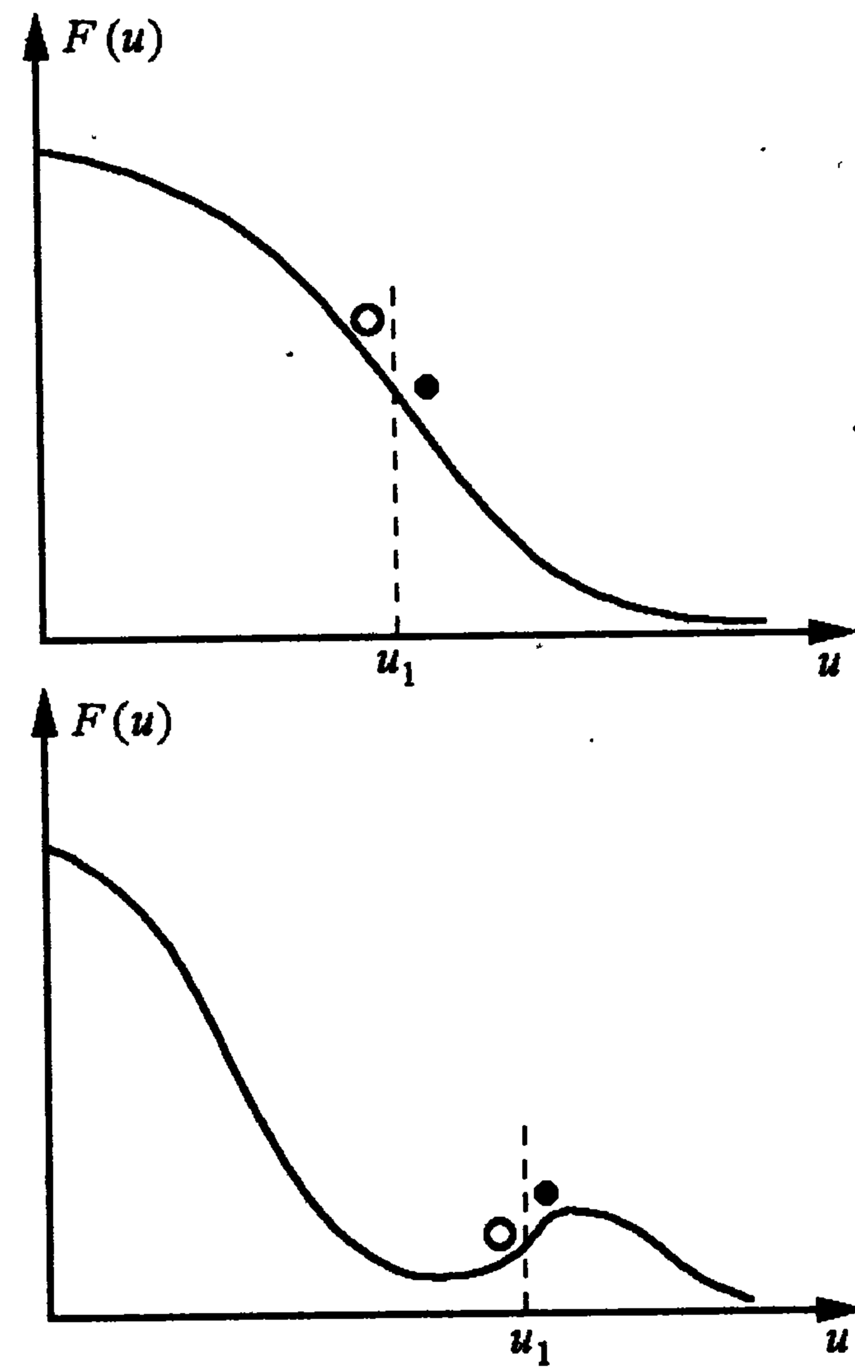


图 9.8 静电波的朗道阻尼(a)与逆阻尼(不稳定)(b)

但是在无碰撞的情况下，在经过了足够长的时间后上述的图像会反过来，即经受朗道阻尼的体系中慢粒子群会被加速成为快粒子群，而原来的快粒子群则同时变成了慢粒子群，结果在波相速度附近的粒子速度分布函数的斜率反了过来，从而共振粒子系开始把能量反馈给波场. 对于一开始经受波不稳定的体系来说，也有类似情况. 因此，对一个宏观的测量而言，原则上不会有看得到的等离

子体波的朗道阻尼或不稳定性. 但实际上等离子体体系中总存在粒子间的碰撞，当碰撞的平均频率为 $\nu_c \leqslant \gamma \ll \omega_r$ 时，一开始经受朗道阻尼的体系，在共振粒子群刚从波场获取能量后(这大约要花费 γ^{-1} 的时间)就受到了碰撞，在碰撞后它们中的一个或一些由于速度大大偏离了原先(和波速度相近)的速度而成为非共振粒子，这些被碰出来的粒子从波场中得来的能量也就被带走，从而不能返回给波场了；而那些刚被碰进来的新共振粒子则要重新从波场中吸取能量，于是朗道阻尼过程就不断地延续下去，成为一种宏观上的可测量现象. 对于一开始就经受波不稳定发展的体系，也是碰撞使它得以延续成可观测的物理现象.

9.3.3 f_0 为麦克斯韦分布时的静电波本征模

由两流体方程可以得到无磁场(或 $\boldsymbol{k}$ 平行于磁场)时的静电波有两支(见图 9.9)：

高频的电子静电波，其色散关系为

$$\omega = \omega_{pe}(1 + 3k^2\lambda_{De}^2)^{1/2}, \quad \frac{\omega}{k} \gg v_{te} = \sqrt{\frac{T_e}{m_e}}.$$

低频的离子声波，其色散关系为

$$\omega = \frac{k^2 C_s^2}{1 + k^2\lambda_{De}^2}, \quad \sqrt{\frac{T_i}{m_i}} < \frac{\omega}{k} < \sqrt{\frac{T_e}{m_e}}.$$

本节要讨论的是：当考虑了波和粒子的共振相互作用后，上述两支波会有什么变化？这时电子和离子的热平衡分布函数 f_{eM}，f_{iM} 及两支波的相速度 ω_{pe}/k，C_s 分别画在图 9.10 中. 从图中可以看出：对于电子静电波，其相速度 $\omega/k \geqslant \omega_{pe}/k \gg v_{te}$，故离子分布函数对它的影响可以忽略($\partial F_{iM}/\partial u|_{\omega_{pe}/k} \approx 0$)，只需要考虑电子分布函数对波的耗散. 对于离子声波，两种粒子分布函数的耗散都需要计入，只是离子的朗道阻尼较大一些.

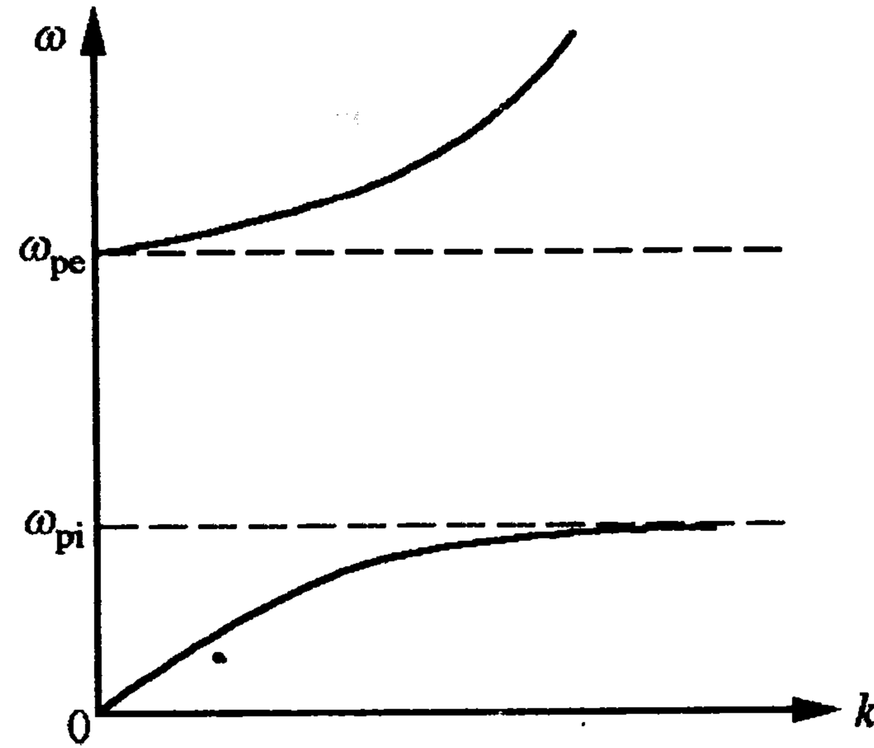


图 9.9 流体描述下的静电波色散图

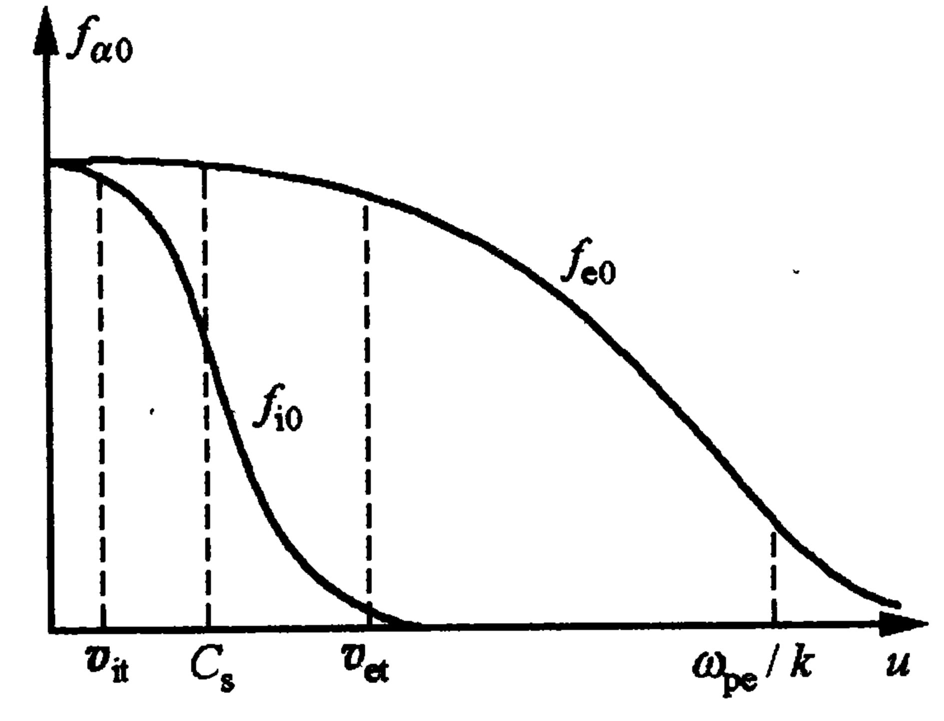


图 9.10 电子和离子的分布函数示意图

1. 阻尼的电子静电波($\omega \gg ku_e$)

利用

$$\frac{1}{\omega/k - u} \approx \frac{k}{\omega}\left(1 + \frac{ku}{\omega} + \frac{k^2u^2}{\omega^2} + \frac{k^3u^3}{\omega^3}\right),$$

及

$$f_{e0} = f_{eM}(u^2) = \left(\frac{m_e}{2\pi T_e}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{m_e u^2}{2T_e}\right),$$

$$v_{te}^2 = \frac{T_e}{m_e} = \omega_{pe}^2\lambda_{De}^2,$$

$$\lambda_{De}^2 = \frac{T_e}{4\pi n_e e^2}, \quad C_s^2 = \frac{T_e}{m_i} = \omega_{pi}^2\lambda_{De}^2,$$

主值积分可直接算出

$$\mathscr{P}\int_{-\infty}^{\infty} du \frac{\partial f_{eM}/\partial u}{u - \omega_r/k} \approx \frac{k^2}{\omega_r^2} + 3\frac{\omega_{pe}^2\lambda_{De}^2 k^4}{\omega_r^4}.$$

于是有色散方程

$$D_r = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{k^2}\left(\frac{k^2}{\omega_r^2} + 3\frac{\omega_{pe}^2\lambda_{De}^2 k^4}{\omega_r^4}\right) = 0. \tag{9.37}$$

由此得色散关系

$$\omega_r^2 = \frac{1}{2}\omega_{pe}^2\left(1 \pm \sqrt{1 + 12k^2\lambda_{De}^2}\right)$$

$$\approx \frac{1}{2}\omega_{pe}^2[1 \pm (1 + 6k^2\lambda_{De}^2)]$$

$$\approx \omega_{pe}^2(1+3k^2\lambda_{De}^2).$$

其中用到了 $k^2\lambda_{De}^2 \ll 1$，这也是 $|\gamma| \ll \omega_r \sim \omega_{pe}$ 的条件. 而介电函数的虚部按前面给出的公式可直接算出，

$$D_i = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{\omega_r}{k^3\lambda_{De}^3}\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{\omega_r^2}{k^2\omega_{pe}^2\lambda_{De}^2}\right).$$

在取了近似 $D_r = 1-\omega_{pe}^2/\omega_r^2$ 后，电子静电波的阻尼率为

$$\gamma = -\frac{D_i}{\partial D_r/\partial\omega_r} = -\sqrt{\frac{\pi}{8}}\frac{\omega_{pe}}{k^3\lambda_{De}^3}\exp\left[-\left(\frac{1}{2k^2\lambda_{De}^2}+\frac{3}{2}\right)\right]. \tag{9.38}$$

从上式可见，只要 $k\lambda_{De} \ll 1$，总能满足 $|\gamma| \ll \omega_r$.

2. 阻尼的离子声波（$\omega \gg ku_i, \omega \ll ku_e$）

对离子系，其主值积分为

$$\mathscr{P}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial f_{i0}/\partial u}{\omega_r/k-u}du \approx \int\frac{\partial f_{i0}}{\partial u}\left(\frac{k}{\omega_r}+\frac{k^2u}{\omega_r^2}\right)du = -\frac{k^2}{\omega_r^2}.$$

而对电子系，其主值积分为

$$\mathscr{P}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial f_{e0}/\partial u}{\omega_r/k-u}du \approx -\mathscr{P}\int\frac{\partial f_{e0}}{\partial u}\frac{1}{u}du = -2\int\frac{\partial f_{e0}}{\partial u^2}du = \frac{m_e}{T_e}.$$

代入色散方程

$$D_r(\omega_r,k) = 1-\frac{\omega_{pi}^2}{\omega_r^2}+\frac{1}{k^2\lambda_{De}^2} = 0$$

得（和流体描述相同的）离子声波色散关系

$$\omega_r^2 = \frac{k^2C_s^2}{1+k^2\lambda_{De}^2}. \tag{9.39}$$

用类似的方法可以得出离子声波的朗道阻尼率

$$\gamma = -\sqrt{\frac{\pi}{8}}\frac{|\omega_r|}{(1+k^2\lambda_{De}^2)^{3/2}}\left\{\left(\frac{T_e}{T_i}\right)^{3/2}\exp\left[-\frac{T_e/T_i}{2(1+k^2\lambda_{De}^2)}\right] + \sqrt{\frac{m_e}{m_i}}\right\}, \tag{9.40}$$

其中方括号中的第一项来自离子，而第二项则来自电子. 为了满足 $|\gamma| \ll \omega_r$，要求 $T_e \gg T_i$，及 $k^2\lambda_{De}^2 \geqslant 1$，而这正是实验上能观测到离子声波所必须满足的条件. 这些条件用流体描述是无法解释的，但通过动理学描述却可自然地得到——因为只有阻尼率足够低的离子声波才能在实验室中被测量出来. 在这样的条件下共振离子对朗道阻尼的作用要大于共振电子的贡献.

3. 静电波能，非共振粒子对阻尼率的贡献

按定义，静电波的波能为

$$W_e^r = \frac{|E|^2}{16\pi}\frac{\partial}{\partial\omega_r}(\omega_r D_r) = \frac{|E|^2}{16\pi}\omega_r\frac{\partial D_r}{\partial\omega_r}.$$

具体对电子静电波，其波能为

$$W_{es}^r = \frac{|E_0(\varepsilon t)|^2}{16\pi}\left(1+\frac{\omega_{pe}^2}{\omega_r^2}+\frac{9\omega_{pe}^4\lambda_{De}^2k^2}{\omega_r^4}\right)$$
$$= \frac{|E_0(\varepsilon t)|^2}{16\pi}\left(1+\frac{1}{1+3k^2\lambda_{De}^2}+\frac{9k^2\lambda_{De}^2}{1+6k^2\lambda_{De}^2+9k^4\lambda_{De}^4}\right).$$

考虑到对电子静电波来说，应满足 $k^2\lambda_{De}^2 \ll 1$，故有

$$W_{es}^r \approx \frac{|E_0(\varepsilon t)|^2}{16\pi}(1+1). \tag{9.41}$$

其中第一项表示波场的纯场能，第二项则是非共振电子在波场中的振荡动能，它们的量值大体相当. 类似地，对离子声波有波能

$$W_{ia}^r = \frac{|E_0(\varepsilon t)|^2}{16\pi}\left[1+\frac{1}{k^2\lambda_{De}^2}+\left(1+\frac{1}{k^2\lambda_{De}^2}\right)\right]. \tag{9.42}$$

其中各项依次是纯波场能、非共振电子的动能以及非共振离子的动能. 从这些表达式可以有两个结论：首先，耗散型的本征模均为正能波. 其次，非共振粒子对总波能有不可忽略的贡献，因此它们会对耗散型静电波的朗道阻尼率 γ 的大小有影响，虽然 γ 的正、负是由共振粒子（也即波相速度处粒子速度分布函数的斜率）决定的. 如果没有计入非共振粒子对总波能的影响，则相应的阻尼率会高估 2～3 倍.

9.4 初值问题的弹道(ballistic)模及其物理意义

9.4.1 扰动波场的瞬态和长时间行为

在初始扰动的粒子分布函数 $f_{\alpha k}(0)\neq 0$ 时，由一维非线性的泊松方程(9.6)可得

$$\varphi_k \equiv \varphi(\omega,\boldsymbol{k}) = \frac{4\pi\mathrm{i}}{k^2}\sum_{\alpha} n_\alpha q_\alpha \int \frac{f_{\alpha k}(0)}{(\omega - ku)D(\omega,\boldsymbol{k})}\mathrm{d}u.$$

按拉氏变换的定义，这是一个在 $\mathrm{Im}\omega=\gamma>0^+$ 上半平面的解析函数，相应的扰动电势的时间行为可通过对上式作逆拉氏变换而得到(参考文献[1])，

$$\varphi(t,\boldsymbol{k}) = \int_{C_\omega} \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi}\varphi_k \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$$
$$= \frac{4\pi\mathrm{i}}{k^2}\sum_{\alpha} n_\alpha q_\alpha \int \mathrm{d}u f_{\alpha k}(0)\int_{C_\omega}\frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi}\frac{\exp(-\mathrm{i}\omega t)}{(\omega - ku)D(\omega,k)}.$$

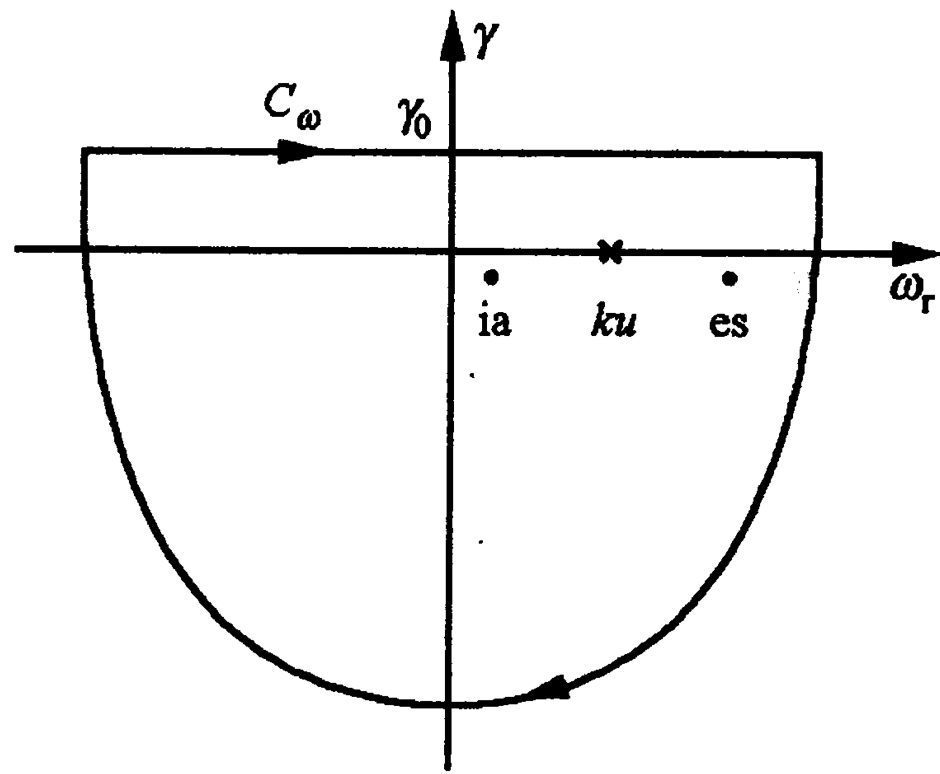


图 9.11 弹道模的积分回路

上式中沿 C_ω 的路径积分见图 9.11，一般是通过在这路径上再补上一个绕上半平面或下半平面无穷远的大半圆而构成闭合回路，再引用柯西定理来得出这个积分值的. 但是由于现在被积函数中含有因子 $\exp(-\mathrm{i}\omega t)=\exp(-\mathrm{i}\omega_r+\gamma t)$，而在 $t>0$ 时，它在沿上半平面无穷远的大圆上是取无穷大值的，因此为了形成有意义的回路，无穷大的半圆必须取到下半平面，与 C_ω 一起构成一个顺时针的回路 C. 由于这时在大半圆上的被积函数为零，故

$$\int_{C_\omega}\frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi}\frac{\exp(-\mathrm{i}\omega t)}{(\omega - ku)D(\omega,k)} = \oint_{C}\frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi}\frac{\exp(-\mathrm{i}\omega t)}{(\omega - ku)D(\omega,k)}$$

$$= -\oint_{C'}\frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi}\frac{\exp(-\mathrm{i}\omega t)}{(\omega - ku)D(\omega,k)}.$$

其中最后一步是把回路的环绕方向从顺时针(C)改成逆时针方向(C')，因为柯西定理要求回路是逆时针方向的. 按柯西定理，回路的积分值等于回路所围奇点的留数值. 在上面的被积函数中有两类奇点：在实轴上的弹道模 $\omega=ku$；以及在实轴附近的线性本征模 $D(\omega,k)=0$(并且有 $|\gamma_j|\ll\omega_{rj}$). 以前面讨论过的静电波为例，$j=2$；一支是电子静电波，而另一支是离子声波. 所以可以把色散函数写成 $D=(\omega-\omega_{es})(\omega-\omega_{ia})$，最后有

$$\int_{C_\omega}\frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi}\frac{\exp(-\mathrm{i}\omega t)}{(\omega - ku)D(\omega,k)}$$
$$= \frac{-\mathrm{i}}{4\pi\mathrm{i}}\oint_{C'}\frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi}\frac{\exp(-\mathrm{i}\omega t)}{(\omega - ku)(\omega-\omega_{es})(\omega-\omega_{ia})}$$
$$= -\mathrm{i}\left[\frac{\exp(-\mathrm{i}kut)}{D(ku,k)} + \frac{\exp(-\mathrm{i}\omega_{es}t)}{(\omega_{es}-ku)(\omega_{es}-\omega_{ia})} + \frac{\exp(-\mathrm{i}\omega_{ia}t)}{(\omega_{ia}-ku)(\omega_{ia}-\omega_{es})}\right]$$
$$= -\mathrm{i}\left[\frac{\exp(-\mathrm{i}kut)}{D(ku,k)} - \sum_{j=1}^{N}\frac{\exp(-\mathrm{i}\omega_j t)}{(\omega_j - ku)\partial D/\partial\omega_j|_{\omega_j}}\right].$$

其中第一项代表弹道模——即初始扰动被每一个等离子体的粒子携带，并以该粒子在静电波传播方向上的速度投影值在此波的方向上传播，不同的粒子可以有不同的速度. 而第二项则表示初始扰动以等离子体中本征波的方式在传播. 当考虑扰动电势在 $t\to\infty$ 的长时间渐近行为时，在多个本征模中只需考虑增长率最大的那一个(也即增长得最快的不稳定模或寿命最长的阻尼模)，设为 (ω_m,γ_m). 这样最后有

$$\varphi(t\to\infty,k) = \frac{4\pi}{k^2}\sum_{\alpha} n_\alpha q_\alpha\int \mathrm{d}u f_{\alpha k}(0)\left[\frac{\exp(-\mathrm{i}kut)}{D(ku,k)} - \frac{\exp(-\mathrm{i}\omega_m t)}{(\omega_m - ku)\partial D/\partial\omega_m|_{\omega_m}}\right]. \quad (9.43)$$

从上式可以看出，当本征模是不稳定的波时，在足够长的时间之后，实验上能观测到的扰动电势是由此本征模携带的；而在本征模是阻尼波时，长时间之后 $\varphi(k)$ 可能由此阻尼波，也可能由弹道模携带. 至于是哪个模在起作用要看弹道模随时间衰减的快慢而定，而这又取决于初始的扰动分布函数 $f_{\alpha k}(0)$ 的具体形式.

例 1 当初始扰动形如

$$f_{\alpha k}(0)=A_0\exp\left[-\frac{(u-u_0)^2}{(\Delta u)^2}\right],\quad |u_0|\gg|\Delta u|,\ |u_0|\gg\frac{\omega_r}{k}$$

时(见图 9.12)，由于 $|u_0|\gg\omega_r/k$，故本征波和扰动的粒子们(共振)的相互作用很弱，可以令 $D=1+\sum\chi_\alpha\sim1$. 这样弹道模的行为由下面的积分决定

$$\int \mathrm{d}u f_{\alpha k}\frac{\exp(-\mathrm{i}kut)}{D(ku,k)}=A_0\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}u\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kut}\mathrm{e}^{-\frac{(u-u_0)^2}{(\Delta u)^2}}$$

$$=A_0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}ku_0t}2\int_0^{\infty}\cos[k(u-u_0)t]\mathrm{e}^{-\frac{(u-u_0)^2}{(\Delta u)^2}}$$

$$=\sqrt{\pi}A_0\Delta u\mathrm{e}^{-\mathrm{i}ku_0t}\mathrm{e}^{-(k\Delta ut)^2/4}$$

$$\propto\exp(-a^2t^2)\quad(a=k\Delta u).$$

这样，当 $t\to\infty$ 时，弹道模以极快速度衰减，于是 $\varphi(t,k)$ 的长时间行为是由本征模 (ω_m,γ_m) 来决定的.

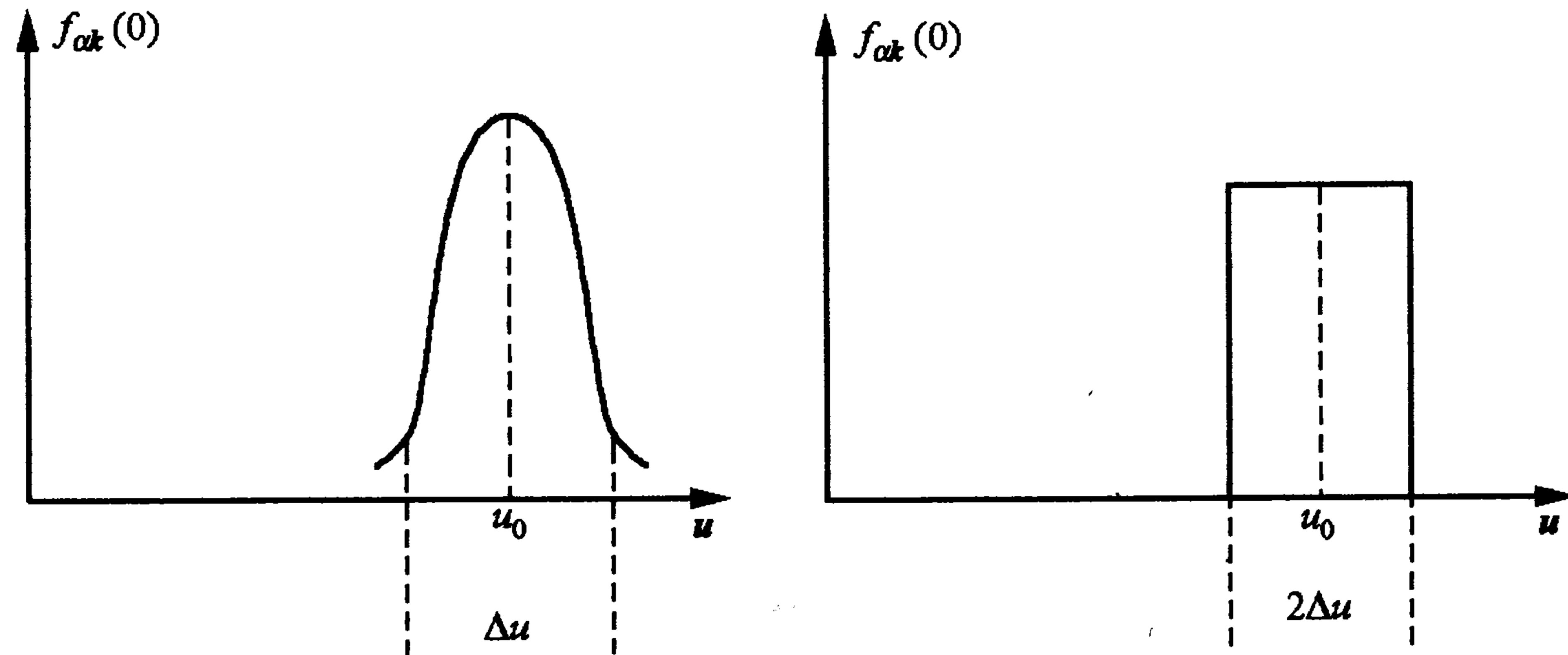


图 9.12 高斯型的初始扰动粒子分布函数

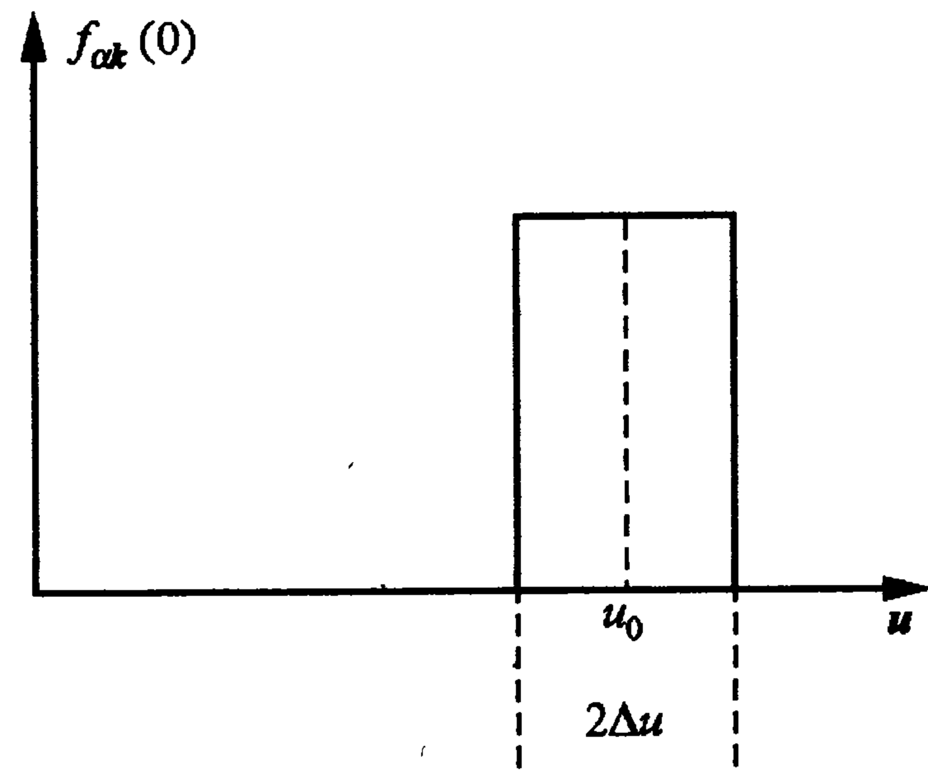


图 9.13 矩形的初始扰动粒子分布函数

例 2 当初始扰动形如

$$f_{\alpha k}(0)=A_0\begin{cases}1, & \text{当 } |u-u_0|\leqslant\Delta u,\\ 0, & \text{其他 } u\end{cases}$$

时(见图 9.13)，有

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}uf_{\alpha k}(0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kut}=A_0\int 2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}ku_0t}\int_{-\Delta u}^{\Delta u}\mathrm{d}(u-u_0)\cos[k(u-u_0)t]$$

$$=A_0\frac{4}{kt}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}ku_0t}\sin(k\Delta u)$$

$$\propto\frac{1}{t}.$$

这时弹道模是随时间缓慢衰减的，和指数衰减的阻尼本征模相比会延续更长的时间，所以扰动电势(电场)的长时间行为是由弹道模决定的.

一般初始的扰动粒子分布 $f_{\alpha k}(0)$ 是速度 u 的光滑函数，比较接近例 1 的情况，所以物理上往往很难通过测量扰动电势(电场)来看出弹道模. 但 9.4.4 小节中将给出一个弹道模实验验证的例子.

9.4.2 扰动粒子分布函数的瞬态和长时间行为

利用线性弗拉索夫方程在 $(\omega,\boldsymbol{k})$ 空间的解

$$f_{\alpha k}=\frac{\mathrm{i}f_{\alpha k}(0)-(q_\alpha/m_\alpha)\boldsymbol{k}\cdot\nabla_v f_{\alpha 0}\varphi_k}{\omega-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}},$$

对它作拉氏逆变换，得

$$f_{\alpha 1}(t,k)=\mathrm{i}f_{\alpha,k}(0)\int_{C_\omega}\frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi}\frac{\exp(-\mathrm{i}\omega t)}{\omega-ku}$$

$$-\frac{q_\alpha}{m_\alpha}k\frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial u}\int_{C_\omega}\frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi}\frac{\varphi(\omega,k)}{\omega-ku}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}.$$

再利用拉氏变换中的对应关系及卷积定理

$$f_1(\omega)\equiv\varphi(\omega,k),\ \Longleftrightarrow\ \varphi(t,k)\equiv F_1,$$

$$f_2(\omega)\equiv(\omega-ku)^{-1},\ \Longleftrightarrow\ -\mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kut}\equiv F_2,$$

$$f_1(\omega)f_2(\omega) \Longleftrightarrow \int_0^t F_1(t')F_2(t')\mathrm{d}t',$$

有

$$f_{\alpha 1}(t,k) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kut}\left[f_{\alpha k}(0) + \mathrm{i}\frac{q_\alpha}{m_\alpha}k\frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial u}\int_0^t \mathrm{d}t'\varphi(t',k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kut'}\right]. \quad (9.44)$$

上式的结果也可以从运动方程直接积分而得到. 由其形式可以看出：$f_{\alpha 1}(t,k)$是随时间振荡的，而且振荡频率和粒子速度有关. 不同速度的粒子在同一时刻其相位不同，但在这里并不叠加，因为粒子分布函数的扰动本身是速度依赖的（这和电势的扰动不同）. 这样，初始集中在 u_0 附近的粒子分布函数的扰动，在足够长的时间后就会均匀地扩张到整个速度空间中去（见图 9.14）. 这和由于碰撞而导致的使局部扰动从参量空间的一个小部分扩散到整个参数空间的过程十分相似——在物理学中被称为“相混（phase mixing）过程”. 但碰撞引起的是一种不可逆的耗散过程——在此过程中熵不断增大；而相混是一种可逆过程——其中熵保持不变.

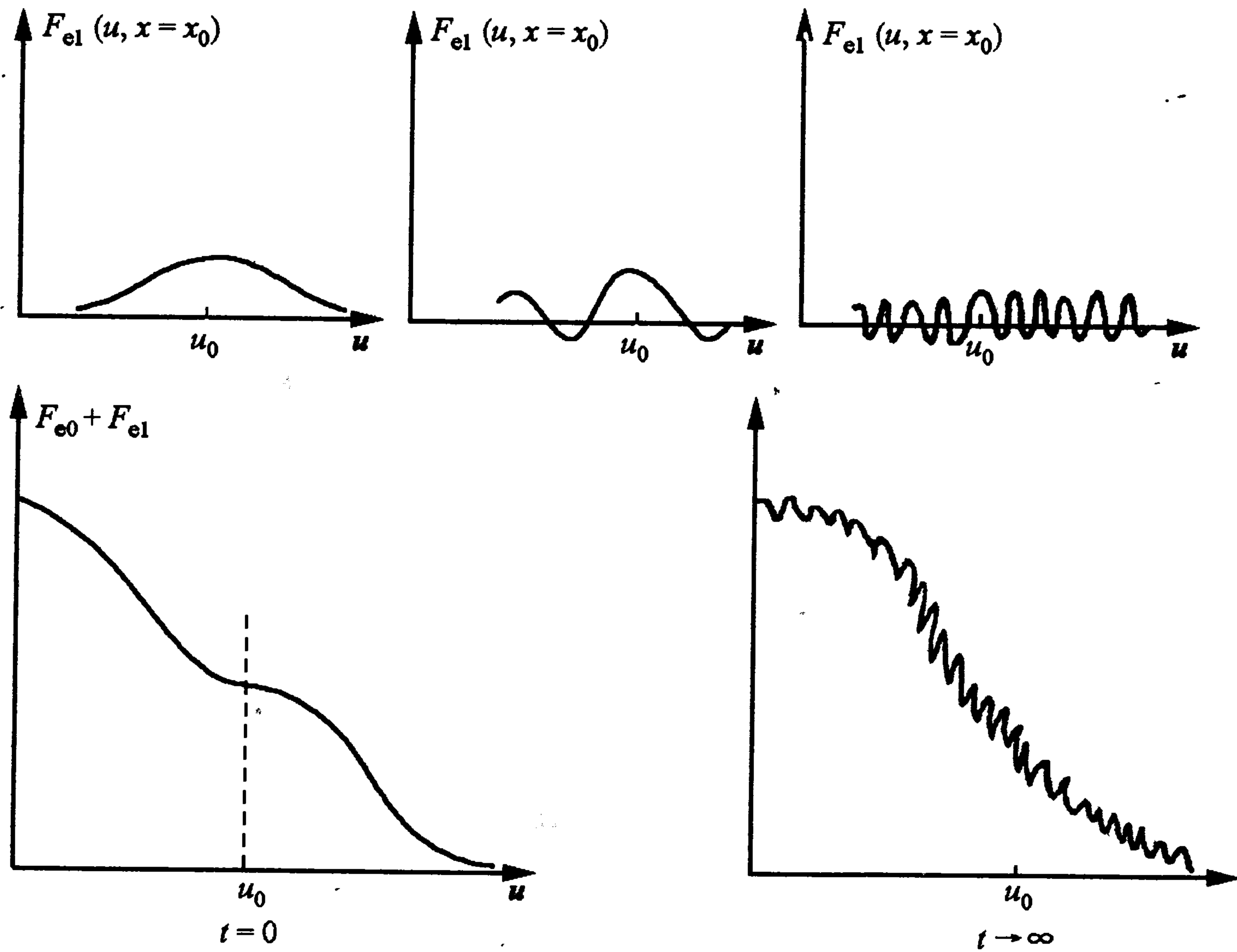


图 9.14 扰动粒子速度分布函数的时间行为

在耗散过程中，初始的扰动信息经过多次碰撞后就被“忘掉”了，也即被“马尔可夫”化了；而在相混过程中初始的扰动信息一直被完整地保留着，并没有消失，我们仍可以设法将其寻找回来（见下面的讨论）.

9.4.3 等离子体回声

1. 粒子密度对外加电场的线性响应

假定在 τ_1 时刻，于 $z=0$ 点放置一个高频源电场 $E_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t}$，$\omega_0 \geqslant \omega_{\mathrm{pe}}$（见图 9.15），则等离子体中的电子对此电场的响应 f_1 可从下面的线性弗拉索夫方程求出

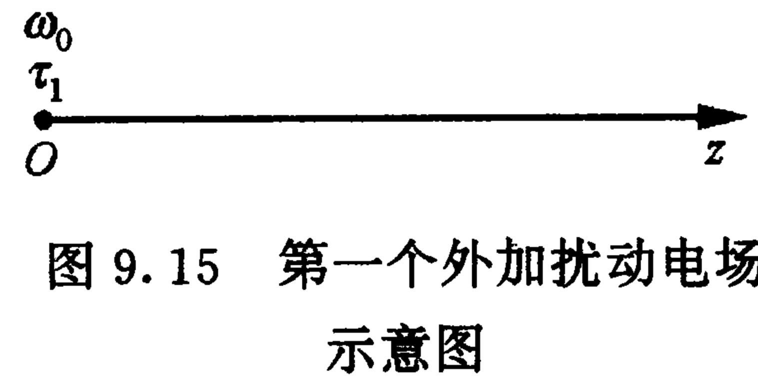


图 9.15 第一个外加扰动电场示意图

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + v\frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{e}{m}\frac{E_0}{v}\delta(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0(t-\tau_1)}\frac{\partial f_0}{\partial v} = 0. \quad (9.45)$$

由于 $\omega_0 \gg \omega_{\mathrm{pe}}$，电子本征模来不及响应，故电子扰动主要由外加的高频扰动电场决定，上面的方程可以和自洽场的泊松方程解耦合. 此方程的解是

$$f_1(z,v,t) = \sigma(z)\frac{e}{m}\frac{E_0}{v}\frac{\partial f_0}{\partial v}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0(t_1 - z/v)}, \quad t_1 = t - \tau_1, \quad (9.46)$$

$$\sigma(z) = \begin{cases} 1, & z > 0, \\ 0, & z \leqslant 0. \end{cases}$$

由此可见 f_1是一个弹道模，其波矢为 $k=\omega_0/v$. 它由 $z=0$ 向 $z\to\infty$ 传播，而在 $t>\tau_1$ 时和 $z>0$ 处的电子（由于此外加高频电场而产生）的密度扰动为

$$n_1(z,t) = \int \mathrm{d}v f_1(z,v,t) \propto \int \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0(-z/v)}\mathrm{d}v. \quad (9.47)$$

由于速度不同的粒子其携带扰动传播的快慢也不同——也即同一时刻 f_1随 v 快速地变化着相位，故只要传播的距离足够长，在上述积分中各种不同相位的扰动会在同一时刻充分叠加而相消. 结果外场 $E_0\exp(\mathrm{i}\omega t)$在远离原点处造成的电子密度扰动 $n_1(z,t)$将

因“相混”而为零．但如果传播的距离不够远(这和平衡分布 f_0 的形式有关)，则扰动电子密度将会因“相混”不够充分而仍保留实验上可以探测得到的有限值(见 9.4.4 小节)．

现在来讨论当相混足够充分，使线性的电子密度扰动 $n_1 \sim 0$ 时的情况．这时虽然通过 $n_1(z,t)$ 的测量观测不到外加扰动引发的弹道模，但其信息量并没有损失，系统的熵也没有变化，它们可以通过非线性效应(相干效应)而被重现(见图 9.17)．

2. 粒子密度对两个外加电场的非线性响应

ω_0 τ_1 O ω_2 τ_2 d z

图 9.16 第二个外加扰动电场示意图

在上面实验的基础上，假定在 τ_2 时刻($\tau_2 > \tau_1$)，于 $z = d > 0$ 点再放置一个高频源电场 $E_2 e^{-i\omega_2 t}\delta(z-d)$ ($\omega_2 > \omega_0$)(图 9.16)，则等离子体中的电子对这两个外加电场的响应 f_2 可完全套用前面线性弗拉索夫方程解的表达式，只是需要把原式中的 f_0 换成 $f_0 + f_1$ 并将扰动相角作相应的改动：

$$
\begin{aligned}
f_2(z,v,t) =& \sigma(z-d)\frac{e}{m}\frac{E_2}{v}\frac{\partial}{\partial v}(f_0 + f_1) \\
& \times \exp\left[-i\omega_2\left(t_2 - \frac{z-d}{v}\right)\right] \quad (\text{这里 } t_2 = t - \tau_2) \\
=& \sigma(z-d)\frac{e}{m}\frac{E_2}{v}\frac{\partial f_0}{\partial v}\exp\left[-i\omega_2\left(t_2 - \frac{z-d}{v}\right)\right] \\
& + \sigma(z)\sigma(z-d)\frac{e^2}{m^2}\frac{E_0 E_2}{v}\left[\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{v}\frac{\partial f_0}{\partial v}\right) + \frac{1}{v}\frac{\partial f_0}{\partial v}\frac{i\omega_0 z}{v^2}\right] \\
& \times \exp\left\{i\left[\omega_0\left(t_1 - \frac{z}{v}\right) - \omega_2\left(t_2 - \frac{z-d}{v}\right)\right]\right\}.
\end{aligned}
$$

在用上式求两个电场共同造成的电子密度扰动时，对于 $n_2(z,t) = \int f_2 \mathrm{d}v$，第一项由于相混而为零，但第二项的指数部分有可能在某个时刻 t^* 和某个位置 z^* 为零，即满足相干条件

$$
\omega_0 t_1^* - \omega_2 t_2^* = \omega_0(t^* - \tau_1) - \omega_2(t^* - \tau_2) = 0,
$$

$$
\Rightarrow t^* = \frac{\omega_2\tau_2 - \omega_0\tau_1}{\omega_2 - \omega_0}, \tag{9.48}
$$

$$
-\frac{\omega_0 z^*}{v} + \frac{\omega_2(z^* - d)}{v} = 0, \Rightarrow z^* = \frac{\omega_2}{\omega_2 - \omega_0}d. \tag{9.49}
$$

由于这对(t^*,z^*)的取值和粒子速度无关，所以第二项的相角在这时也和粒子的速度无关(不论粒子速度如何，这项的相角均为零)．于是“相混”不会发生，从而电子密度的扰动在某个特定的时刻和位置 $t^* > \tau_2$，$z^* > d$ 出现非零值

$$
n_2(z^*,t^*) = \int \frac{e^2}{m^2}\frac{E_0 E_2}{v}\left[\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{v}\frac{\partial f_0}{\partial v}\right) + \frac{1}{v}\frac{\partial f_0}{\partial v}\frac{i\omega_0 z^*}{v^2}\right] \neq 0.
$$

而在这个特定的时刻和位置以外的地方，第二项的相角仍是速度 v 依赖的；于是在对速度空间积分时，“相混”仍然存在，n_2 仍然为零．这种现象就称为“等离子体回声(echoes)”．图9.17显示的是

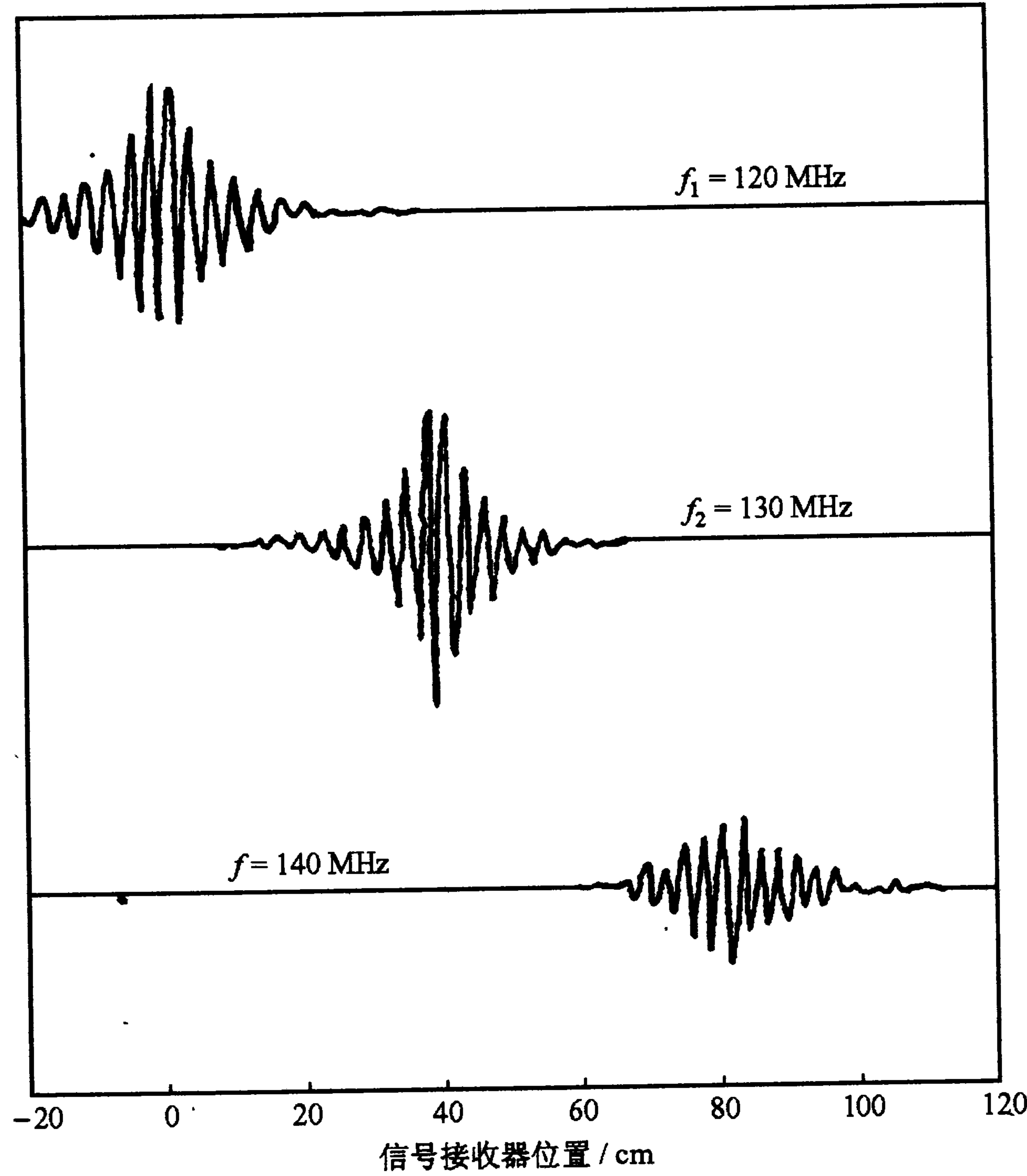


图 9.17 等离子体回声的实验结果

回声现象的实验，其中第一行显示的是只有第一个高频源时在等离子体空间测到的电子扰动信号；而第二行显示的是只有第二个高频源时在等离子体空间测到的电子扰动信号；第三行则是当两个高频源都存在时测到的"回声"信号(详见文献[2],[3]).

9.4.4 tokamak 上单频功率信号的弹道模实验

在中国科学技术大学近代物理系等离子体专业的 KT-5C tokamak 装置上，1994～1995 年间曾进行过以下的实验(见图 9.18,9.19)：在大环外侧赤道面处用探针 A 发射单频(50 kHz)信号，然后在 B 处(位于顶部，在角向和 A 相差 90°，在环向和 A 相差 67.5°，与 A 正好在同一根磁力线上)放置另一探针接收扰动信号.

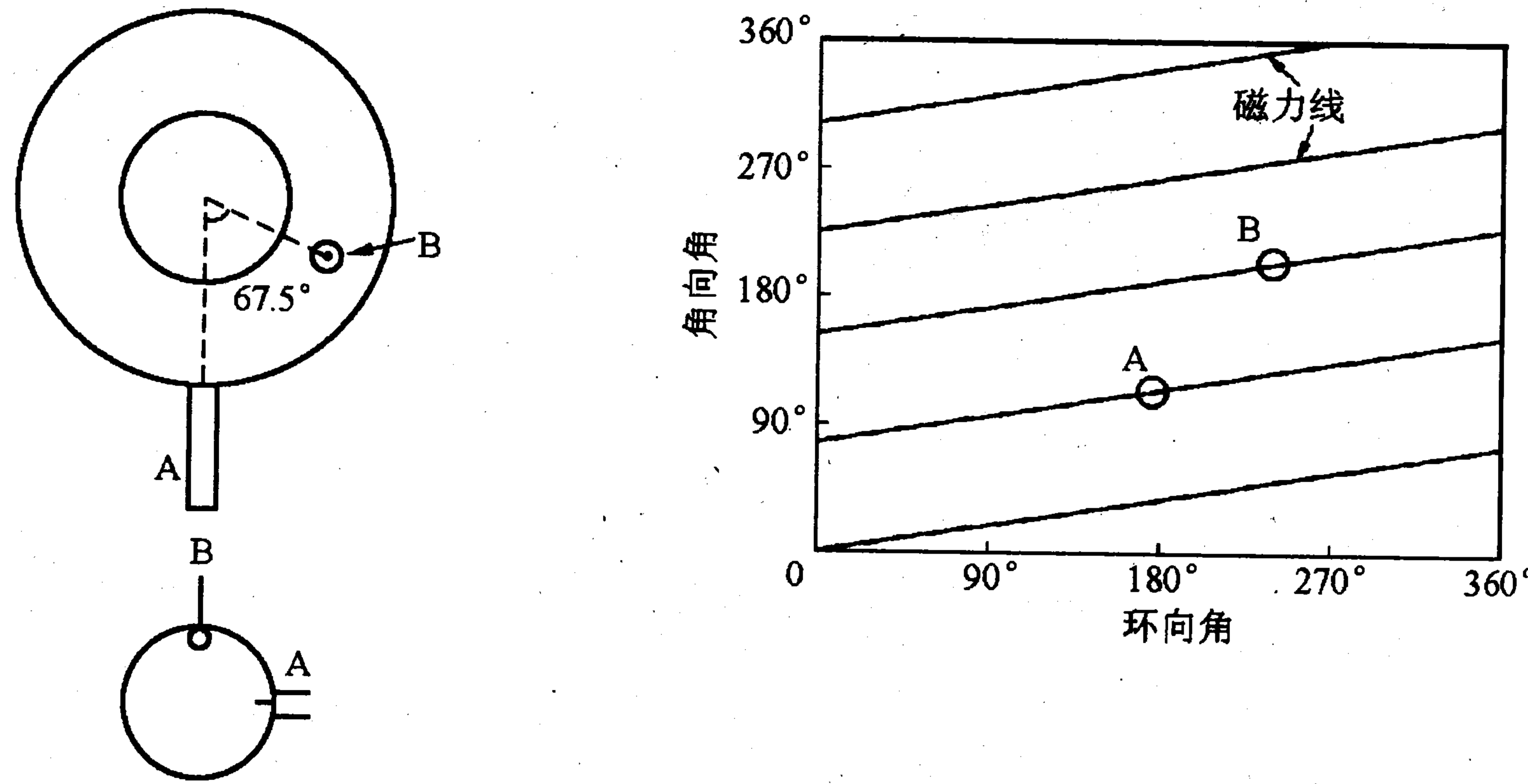


图 9.18 KT-5C 大环上探针位置示意图

图 9.19 探针在磁力线上的位置示意图

结果发现：(1) A 发出的信号沿磁力线传播；(2) 信号只在单向(从 A 到 B)传播；(3) 信号由电子(饱和电流)携带(离子饱和电流中无此频率的信号). 对这些实验结果可以用弹道模来作完美的解释. 按照前一节对单频信号在等离子体中传播的描述，外加信号 $E_0\exp(\mathrm{i}\omega_0 t)$ 引起的扰动粒子分布函数 $f_{\alpha 1}$，$\alpha=\mathrm{e},\mathrm{i}$ 满足下面的线性弗拉索夫方程(图 9.20)

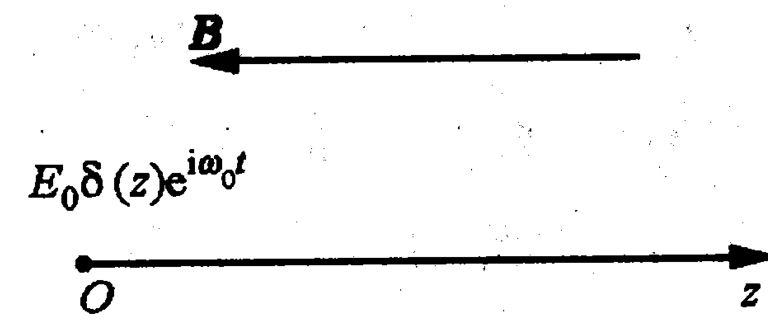


图 9.20 沿磁场传播的扰动电信号坐标图

$$\frac{\partial f_{\alpha 1}}{\partial t}+v\frac{\partial f_{\alpha 1}}{\partial z}+\frac{q_\alpha}{m_\alpha}E_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t}\delta(z)\frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial v}=0.$$

这个方程的解是(参考(9.46)式)

$$f_{\alpha 1}(z,v,t)=-\sigma(z)\frac{q_\alpha}{m_\alpha}\frac{E_0}{v}\frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial v}\exp\left(\mathrm{i}\omega_0 t-\mathrm{i}\frac{\omega_0 z}{v}\right),$$

$$\sigma(z)=\begin{cases}1, & z>0,\\ 0, & z=0,\\ -1, & z<0.\end{cases}$$

这时 $f_{\alpha 1}$ 是一个弹道模，其相速度正是粒子的速度. 此模引起的电子、离子密度扰动为($t>0,z=z_0>0$)：

$$\widetilde{n}_\mathrm{e}(z,t)=n_{\mathrm{e}0}\int_0^\infty f_{\mathrm{e}1}\mathrm{d}v=n_{\mathrm{e}0}\frac{eE_0}{m_\mathrm{e}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t}\int_0^\infty\frac{1}{v}\frac{\partial f_{\mathrm{e}0}}{\partial v}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0 z/v}\mathrm{d}v,$$

$$\widetilde{n}_\mathrm{i}(z,t)=n_{\mathrm{i}0}\int_0^\infty f_{\mathrm{i}1}\mathrm{d}v=-n_{\mathrm{i}0}\frac{eE_0}{m_\mathrm{i}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t}\int_0^\infty\frac{1}{v}\frac{\partial f_{\mathrm{i}0}}{\partial v}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0 z/v}\mathrm{d}v.$$

上面两个表达式的形式虽然一样，但由于电子和离子的热力学平衡速度分布函数不一样，结果两者的"相混"程度会有明显的差别. 取

$$f_{\mathrm{e}0}=\frac{1}{\sqrt{\pi}\,v_{\mathrm{te}}}\exp\left(-\frac{(v-u_0)^2}{v_{\mathrm{te}}^2}\right),\quad f_{\mathrm{i}0}=\frac{1}{\sqrt{\pi}\,v_{\mathrm{ti}}}\exp\left(-\frac{v^2}{v_{\mathrm{ti}}^2}\right),$$

其中电子系的平均环向转动速度 u_0 可以从平衡的等离子体电流 $I_\mathrm{p}=en_{\mathrm{e}0}u_0S$ 得出(S 是等离子体环的小截面积)，按实验测得的数据，可知 $u_0=1.11\times10^6$ m/s. 这个速度相当大，可和电子的热速度相比($T_\mathrm{e}=T_\mathrm{i}=10$ eV，$v_{\mathrm{te}}=1.87\times10^6$ m/s；$v_{\mathrm{ti}}=4.38\times10^4$ m/s)，从下面的计算可以看到，这是使外加单频信号在电子系的转动方向上传播时，"相混"比较弱的根本原因.

取实验中的参数：小半径 $r=9\,\mathrm{cm}$，两探针间沿磁力线的距离 $z_0=3\,\mathrm{m}$，以及 $\omega_0=2\pi\times10^5$，通过数值积分可分别得出由外加单频电场引起的粒子速度分布的扰动在电子系平均转动方向及其相反方向上传播了距离 z_0 后，造成的电子、离子的密度扰动大小.

$$\tilde{n}_e(z_0,t)=-\frac{n_0eE_0}{T_e\sqrt{\pi}}[0.31\cos(\omega_0 t)+0.29\sin(\omega_0 t)],\tag{9.50}$$

$$\tilde{n}_i(z_0,t)=\frac{n_0eE_0}{T_i\sqrt{\pi}}[-2.1\times10^{-4}\cos(\omega_0 t)+4.6\times10^{-5}\sin(\omega_0 t)],\tag{9.51}$$

$$\tilde{n}_e(-z_0,t)=\frac{n_0eE_0}{T_e\sqrt{\pi}}[3.97\times10^{-2}\cos(\omega_0 t)+3.79\times10^{-2}\sin(\omega_0 t)],\tag{9.52}$$

$$\tilde{n}_i(-z_0,t)=\tilde{n}_i(z_0,t).\tag{9.53}$$

从上面的表达式可以明显地得出以下结论：

(i) 在顺着其环向转动方向上传播了 z_0 距离后，电子密度扰动仍保留相当可观的幅度，因此不难被探针测量到.

(ii) 在相同的方向上，离子的密度扰动就小得可以忽略. 这说明相混进行得非常充分，从离子饱和流不能测量到扰动信号.

(iii) 在反向(逆电子环向转动方向)传播时，即使是电子密度扰动也小到不能和本地噪声相区别的程度，也即这时的相混也进行得相当充分. 这就解释了实验上发现的电子扰动传播单向性行为.

从物理上来看，以上结果可以这样来理解：在正(电子环向转动)方向上，电子系的平均速度接近其热速度，从麦克斯韦分布的特征可知，在热速度附近的电子数占了总电子数的绝大部分，由于有很大部分的电子几乎是肩并肩地“齐步”向前跑，所以即使“跑出”很长一段距离仍可保持电子系的初始队形，也即保有其初始携带的扰动信息，于是相混不能充分进行. 而具有反(环向转动方)向速度的电子数只占总电子数的一小部分，而且它们的速度在相当宽的范围内取值，因此这群电子在“跑出”不远后队形就混乱不堪了，所携带的初始扰动信息损失殆尽，从物理上看就是发生了比较充分的“相混”. 对于离子来说，由于其质量很重，基本上没有平均的环向转动，其速度分布是一个标准的麦克斯韦分布，因此无论在正向或反向，它们都以分布得相当宽的各种速度在运动，相混极容易产生，加上它们的速度远比电子慢，在经过相同距离后相位混杂得比(麦克斯韦分布的)电子群要大得多，因此相应的密度扰动也要小得多. 此外，由同一实验中通过其他方法测得的扰动信号色散关系，可以求出此信号传播的相速度为

$$v_{\mathrm{ph}}=\frac{\omega}{k}=1.2\times10^6\,\mathrm{m/s}\sim u_0.$$

这表明，扰动基本上是由电子按其平均速度传播的，这是对我们以上解释(即扰动是一种电子弹道模)的又一个强有力的旁证.

在磁化等离子体特别是在 tokamak 这样的复杂磁场位形中的等离子体中，也能清楚地辨识并证实弹道模，这是对等离子体动理学理论正确性的又一关键性的实验证实(详见文献[4]).

9.5 电磁波模

9.5.1 速度空间各向同性情况下的电磁波本征模

这时有 $\boldsymbol{E}_0=\boldsymbol{B}_0=0$；$f_{\alpha0}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{r})=f_{\alpha0}(v^2)$；$\boldsymbol{E}_1,\boldsymbol{B}_1\neq0$. 于是相应的线性弗拉索夫问题可写作

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\boldsymbol{v}\cdot\nabla\right)f_{\alpha1}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v},t)=-\frac{q_\alpha}{m_\alpha}\left(\boldsymbol{E}_1+\frac{\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}_1}{c}\right)\cdot\nabla_v f_{\alpha0},\tag{9.54}$$

$$\nabla^2\boldsymbol{E}_1-\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{E}_1)=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{E}_1}{\partial t^2}+\frac{4\pi}{c^2}\frac{\partial\boldsymbol{j}_{\alpha1}}{\partial t}.\tag{9.55}$$

作傅氏、拉氏变换后，从线性弗拉索夫方程得

$$f_{\alpha k} = -\frac{q_\alpha}{m_\alpha}\left(\boldsymbol{E}_k + \frac{\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}_k}{c}\right)\cdot\frac{\nabla_v f_{\alpha 0}}{-\mathrm{i}(\omega - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v})}$$

$$= -\mathrm{i}\frac{q_\alpha}{m_\alpha}\frac{\boldsymbol{E}_k\cdot\nabla_v f_{\alpha 0}}{\omega - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}}.$$

其中用到了$(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}_k)\cdot f_{\alpha 0}(v^2)\propto(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}_k)\cdot\boldsymbol{v}\equiv 0$. 从波动方程得

$$k^2\boldsymbol{E}_k - \boldsymbol{k}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{E}_k) = \frac{\omega^2}{k^2}\boldsymbol{E}_k + \mathrm{i}\frac{4\pi\omega}{c^2}\boldsymbol{j}_k. \tag{9.56}$$

其中$\boldsymbol{j}_k = \sum n_{\alpha 0}q_\alpha\int\boldsymbol{v}\, f_{\alpha k}\mathrm{d}\,\boldsymbol{v}$，代入 $f_{\alpha k}$后，得

$$\boldsymbol{j}_k = \sum_\alpha\left(-\mathrm{i}\frac{n_{\alpha 0}q_\alpha^2}{m_\alpha}\right)\int\mathrm{d}\boldsymbol{v}\frac{\boldsymbol{v}\,\boldsymbol{E}_k\cdot\nabla_v f_{\alpha 0}(v^2)}{\omega - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}}.$$

上面的波动方程是一个矢量方程，有三个分量. 首先来看平行波的传播方向上的分量，在波动方程的两端同时点乘 $\boldsymbol{k}/k$，利用 $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}=ku$，$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{E}_k=kE_\parallel$，得

$$0 = \frac{\omega^2}{c^2}E_\parallel + \frac{\omega^2}{c^2}\sum_\alpha\frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega}\int\frac{uE_{k\parallel}\partial f_{\alpha 0}(v^2)/\partial u}{\omega - ku}\mathrm{d}u\mathrm{d}\boldsymbol{v}_\perp,$$

其中用到了

$$\int\frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial v_{\perp i}}\mathrm{d}v_{\perp i} = 0,\quad i = 1,2.$$

再利用

$$F_{\alpha 0}(u^2) = \int f_{\alpha 0}(v^2)\mathrm{d}v_{\perp 1}\mathrm{d}v_{\perp 2},\qquad \frac{ku}{\omega}\frac{1}{\omega - ku} = \frac{1}{\omega - ku} - \frac{1}{\omega},$$

$$\int\frac{\partial F_{\alpha 0}(u^2)/\partial u}{\omega}\mathrm{d}u = \frac{1}{\omega}F_{\alpha 0}(u^2)\Big|_{-\infty}^{\infty} = 0.$$

最后得平行波矢方向上的色散方程

$$D_\parallel(\omega, k_\parallel) = 1 + \sum_\alpha\frac{\omega_{p\alpha}^2}{k^2}\int\frac{\partial F_{\alpha 0}(u^2)/\partial u}{\omega/k - u}\mathrm{d}u = 0, \tag{9.57}$$

其解就是前面讨论过的耗散型静电波.

为了讨论波动方程在垂直于磁场方向上的两个分量，用 $\boldsymbol{k}/k$ 同时叉乘波动方程两边后，得

$$k^2\boldsymbol{E}_{k\perp} = \frac{\omega^2}{c^2}\boldsymbol{E}_{k\perp} + \mathrm{i}\frac{4\pi\omega}{c^2}\frac{\boldsymbol{k}}{k}\times\boldsymbol{j}_k.$$

其中最后一项可以进一步写作

$$\mathrm{i}\frac{4\pi\omega}{c^2}\frac{\boldsymbol{k}}{k}\times\boldsymbol{j}_k = \frac{\omega^2}{c^2}\sum_\alpha\frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega}\int\frac{\boldsymbol{v}_{\alpha\perp}}{\omega - ku}\left(E_{k\parallel}\frac{\partial}{\partial u} + E_{k\perp}\cdot\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{v}_\perp}\right)$$

$$\times f_{\alpha 0}(v^2)\mathrm{d}u\mathrm{d}\boldsymbol{v}_\perp.$$

其中正比于 $E_\parallel$的项为

$$\int\frac{\boldsymbol{v}_\perp}{\omega - ku}\frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial u}\mathrm{d}u\mathrm{d}\boldsymbol{v}_\perp = \int\frac{\mathrm{d}u}{\omega - ku}\frac{\partial}{\partial u}\int\boldsymbol{v}_\perp f_{\alpha 0}(v^2)\mathrm{d}\boldsymbol{v}_\perp = 0,$$

上式中已用到 $f_{\alpha 0}$是速度空间各向同性的性质. 而正比于 $E_{\perp i}$的项则为

$$\int\mathrm{d}u\int\frac{v_{\perp i}}{\omega - ku}\frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial v_{\perp i}}\mathrm{d}\boldsymbol{v}_\perp = \int\frac{\mathrm{d}u}{\omega - ku}\left(-\int f_{\alpha 0}(v^2)\mathrm{d}\,\boldsymbol{v}_\perp\right)$$

$$= -\int\frac{F_{\alpha 0}(u^2)}{\omega - ku}\mathrm{d}u.$$

将上面的两个结果代入垂直方向的波动方程，得

$$D_\perp(\omega, k) = 1 - \frac{k^2c^2}{\omega^2} - \sum_\alpha\frac{\omega_{p\alpha}}{\omega}\int\frac{F_{\alpha 0}(u^2)}{\omega - ku}\mathrm{d}u = 0. \tag{9.58}$$

其解就是电磁波的色散关系

$$\omega^2 = k^2c^2 + \sum_\alpha\omega_{p\alpha}^2\omega\int\frac{F_{\alpha 0}(u^2)}{\omega - ku}\mathrm{d}u. \tag{9.59}$$

从上式可以看到，这时电磁波的相速接近光速 $\omega/k\approx c$，它和电子、离子的热速度相差很远，不会发生共振，故

$$\int\frac{F_{\alpha 0}(u^2)}{\omega - ku}\mathrm{d}u \sim \int\frac{F_{\alpha 0}(u^2)}{\omega}\mathrm{d}u = \frac{1}{\omega}\int F_{\alpha 0}\mathrm{d}u = \frac{1}{\omega}.$$

最后可得等离子体中的电磁波色散关系

$$\omega^2 = \sum_\alpha\omega_{p\alpha}^2 + k^2c^2 \approx \omega_{pe}^2 + k^2c^2, \tag{9.60}$$

这也就是流体描述下的等离子体电磁波色散关系. 对电磁波来说，因为它以光速传播，和等离子体中的粒子无共振相互作用，所以没有朗道阻尼，结果就和流体描述的结果一样了.

9.5.2 速度空间各向异性时的电磁波本征模——Weibel 不稳定性

1. 动理学的计算结果

取图 9.21 的坐标系及极化方向. 然后取速度空间各向异性的初始分布函数,例如在电磁波传播(称为平行)方向和垂直(传播)方向上有不同温度的平衡分布函数 $f_{\alpha 0}(v_{\parallel}^2, v_{\perp}^2)$. 这时线性弗拉索夫方程的解可写作

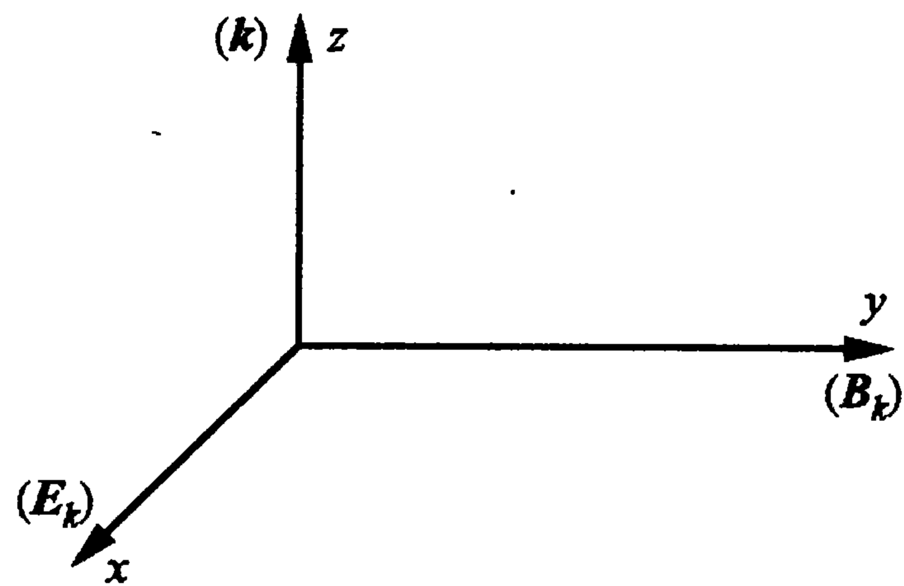


图 9.21 电磁波的坐标图

$$
\begin{aligned}
f_{\alpha k} &= -\mathrm{i}\frac{q_\alpha}{m_\alpha}\frac{1}{\omega - kv_z}\left(\boldsymbol{E}_k + \frac{1}{c}\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}_k\right)\cdot\nabla_v f_{\alpha 0}(v_{\parallel}^2, v_{\perp}^2) \\
&= -\mathrm{i}\frac{q_\alpha}{m_\alpha}\frac{1}{\omega - kv_z}\left(E_{kx}\frac{\partial}{\partial v_x} + \frac{1}{c}v_x B_{ky}\frac{\partial}{\partial v_y} - \frac{1}{c}v_z B_{ky}\frac{\partial}{\partial v_x}\right)f_{\alpha 0} \\
&= -\mathrm{i}\frac{q_\alpha}{m_\alpha}\frac{E_{kx}}{\omega - kv_z}\left[\frac{\omega - kv_z}{\omega}\frac{\partial}{\partial v_x} + \frac{kv_x}{\omega}\frac{\partial}{\partial v_z}\right]f_{\alpha 0}.
\end{aligned}
$$

其中用到了 $B_{ky}=kcE_{kx}/\omega$. 由上式可以得出扰动电流

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{j}_k &= \sum_\alpha n_{\alpha 0}q_\alpha\int \boldsymbol{v} f_{\alpha k}\mathrm{d}\boldsymbol{v} \\
&= -\mathrm{i}\sum_\alpha \frac{n_{\alpha 0}q_\alpha^2}{m_\alpha}\left[\frac{1}{\omega}\int \boldsymbol{v}\frac{\partial}{\partial v_x}f_{\alpha 0}\mathrm{d}\boldsymbol{v} + \frac{1}{\omega}\int\frac{kv_x\boldsymbol{v}}{\omega - kv_z}\frac{\partial}{\partial v_z}f_{\alpha 0}\mathrm{d}\boldsymbol{v}\right]E_{kx}.
\end{aligned}
$$

对于本节一开始所取的那种平衡分布函数,上面式中的 j_{ky}, j_{kz} 分量为零,只存在 j_{kx} 分量

$$
j_{kx} = -\mathrm{i}\sum_\alpha \frac{n_{\alpha 0}q_\alpha^2}{\omega m_\alpha}\left[\int\frac{kv_x^2}{\omega - kv_z}\frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial v_z}\mathrm{d}\boldsymbol{v} - 1\right]E_{kx}, \tag{9.61}
$$

然后代入波动方程($\boldsymbol{e}_x$),得

$$
k^2E_{kx} = \frac{\omega^2}{c^2}E_{kx} + \frac{1}{c^2}\sum_\alpha\omega_{p\alpha}^2\left[\int\frac{kv_x^2}{\omega - kv_z}\frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial v_z}\mathrm{d}\boldsymbol{v} - 1\right]E_{kx}.
$$

即

$$
D_{xx}(\omega, k) = \omega^2 - c^2k^2 + \sum_\alpha\omega_{p\alpha}^2\left[\int\frac{kv_x^2}{\omega - kv_z}\frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial v_z}\mathrm{d}\boldsymbol{v} - 1\right] = 0. \tag{9.62}
$$

下面,假定粒子在 $\boldsymbol{e}_z$ 方向上无热运动,或只有微弱的热运动,$T_{e\parallel}\ll T_{e\perp}$;于是有 $|\omega|\gg kv_z$,即可以忽略波—粒子的共振相互作用,结果有

$$
\begin{aligned}
\int\frac{kv_x^2}{\omega - kv_z}\frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial v_z}\mathrm{d}\boldsymbol{v} &= \frac{k}{\omega}\int\frac{v_x^2}{1 - kv_z/\omega}\frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial v_z}\mathrm{d}\boldsymbol{v} \\
&= \frac{k}{\omega}\int v_x^2\mathrm{d}\boldsymbol{v}_\perp\int\left(1 + \frac{kv_z}{\omega}\right)\frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial v_z}\mathrm{d}v_z \\
&= -\frac{k^2}{\omega^2}\int v_x^2 f_{\alpha 0}\mathrm{d}\boldsymbol{v} \\
&= -\frac{k^2}{\omega^2}\langle v_{\alpha x}^2\rangle.
\end{aligned}
$$

其中$\langle\cdots\rangle$表示对速度分布函数的平均,当 $f_{\alpha 0}=f_{\alpha M}$时,$\langle v_x^2\rangle = 2T_{\alpha\perp}/m_e$. 代入色散方程,并略去离子的贡献后得

$$
D_{xx}(\omega, k) \approx \omega^2 - c^2k^2 + \omega_{pe}^2\left[-\frac{k^2}{\omega^2}\langle v_{ex}^2\rangle - 1\right] = 0.
$$

结果可以得出一个关于 ω^2 的二次方程

$$
\omega^4 - (c^2k^2 + \omega_{pe}^2)\omega^2 - k^2\omega_{pe}^2\langle v_{ex}^2\rangle = 0. \tag{9.63}
$$

ω^2 的解中存在一个负根,也即两个 ω 纯虚根,

$$
\gamma = \left\{\frac{1}{2}(\omega_{pe}^2 + c^2k^2)\left[\left(1 + \frac{4\omega_{pe}^2k^2\langle v_{ex}^2\rangle}{(\omega_{pe}^2 + c^2k^2)^2}\right)^{1/2} - 1\right]\right\}^{1/2}. \tag{9.64}
$$

特别是当 $k\sim 0$ 时 $\gamma\sim 0$,而当 $ck\gg\omega_{pe}$时,有

$$
\gamma_{\max} \approx \frac{\omega_{pe}\sqrt{\langle v_{ex}^2\rangle}}{c} = 常数. \tag{9.65}
$$

这种电磁不稳定性是由于等离子体的速度分布函数在沿传播方向

和垂直传播方向上的不同(各向异性)而引起的,其增长率正比于垂直速度平方的均方根. 它又称为 Weibel 不稳定性,是无磁场时等离子体中唯一的一种电磁波不稳定性.

2. Weibel 不稳定性的物理机制

Weibel 不稳定性产生的物理图像可以通过图 9.22(a)—(h)的演变过程来看出:

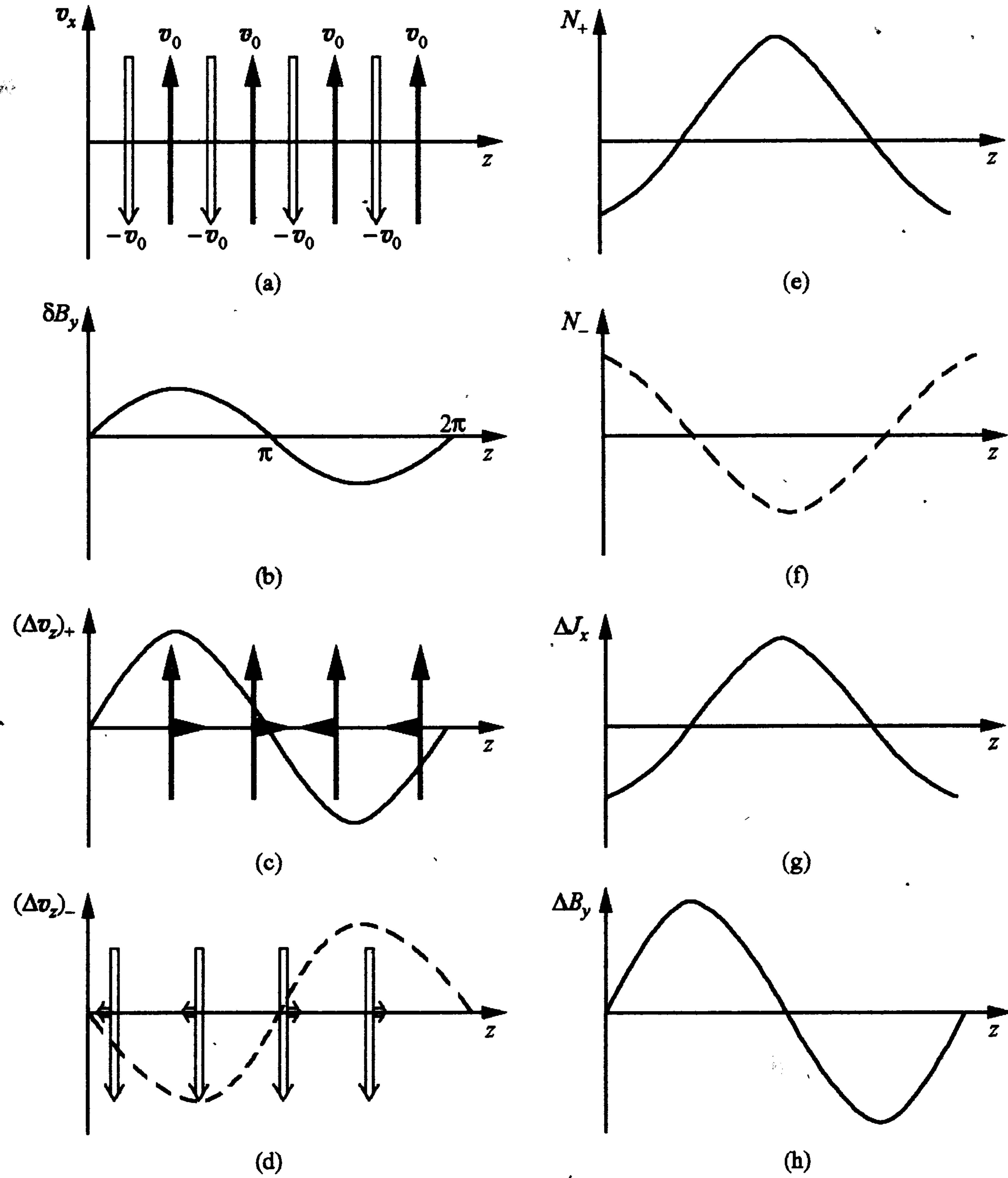


图 9.22 Weibel 不稳定性的产生

(i) 一开始,等离子体由一些在 z 方向上均匀分布、并沿 x 方向以 $v_x=\pm v_0$ 运动的电子电流片组成(片在 y 方向和 z 方上无限伸展). 即(见图 9.22(a))

$$f_0(\boldsymbol{v}) = \frac{N_0}{2}\delta(v_y)\delta(v_z)[\delta(v_x - v_0) + \delta(v_x + v_0)],$$

这时的总电流为零,$J_{x0}=qv_0(N_+-N_-)=0$.

(ii) 假若开始有磁场扰动发生(见图 9.22(b))

$$\delta B_y(z,t = 0) = \delta B_0 \sin kz.$$

(iii) 按运动方程

$$\frac{dv_z}{dt} = \frac{qv_x}{mc}\delta B_y,$$

正负电流片在时间 Δt 内,会在 z 方向产生扰动速度(见图 9.22(c),(d);初始的 $v_{z0}=0$)

$$(\Delta v_z)_\pm = \pm\left(\frac{qv_0}{mc}\right)\Delta t\delta B_y \propto \pm \sin kz,$$

这使得正、负电流片以相反的方向在 z 方向移动.

(iv) 由于正向电流片向 $kz=n\pi$ 处(n 为奇数)集中,并从 $kz=2n\pi$ 处散开;而反向电流片则有相反的移动倾向. 于是电流片的密度在 z 方向就呈现出疏密相间的分布,只是正、反向电流片的疏密位置正好相反(见图 9.22(e),(f)). 进而,从连续性方程

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \nabla\cdot(N\boldsymbol{v}) = 0,$$

可以得在正负电流片中电子数密度的扰动

$$(\Delta N)_\pm = -\Delta t\frac{N_0}{2}\frac{\partial}{\partial z}(\Delta v_z)_\pm = \mp(\Delta t)^2\frac{N_0}{2}\frac{qv_0k}{mc}\delta B_0\cos kz. \tag{9.66}$$

(v) 由此可得相应的扰动电流(见图 9.22(g))

$$\Delta J_x = qv_0[\Delta N_+ - \Delta N_-] = -\frac{N_0q^2v_0^2k}{mc}(\Delta t)^2\delta B_0\cos kz. \tag{9.67}$$

(vi) 按法拉第定律，这个电流扰动又反过来产生一个新的扰动磁场(见图 9.22(h))

$$-\frac{\partial \Delta B_y}{\partial z}=\frac{4\pi}{c}\Delta J_x,\quad \Delta B_y=\left(\frac{\omega_{pe}\Delta t v_0}{c}\right)^2\delta B_y.$$

可以看出，ΔB_y 和 δB_y 是同相位的，其增长率约为前面动理学推导的 γ_{max}. 故初始的磁场小扰动就会愈来愈大，发生不稳定性.

上面描述的这种空间局部电流密度的加强，还会使这里的等离子体被强烈地箍缩，形成高密度的细丝——这就是所谓的丝状不稳定性. 丝状不稳定模是许多非磁化等离子体中都存在的重要不稳定性. 但 Weibel 不稳定性只是产生丝化不稳定性的一种可能机制.

参考文献

[1] Liu Chen. Waves and Instabilities in Plasmas. World Scientific Publications, 1987

[2] Krall N A, Trivelpiece A W. Principles of Plasma Physics. McGraw-Hill Book Company, 1973. 548—549

[3] Ichimaru S. Statistical Plasma Physics, Vol. I: Basic Principles. Addison-Wesley Publishing Company, 1991. 143

[4] 翟侃等. 中国科学(A), **27**(1997)89

第十章 均匀外磁场、空间均匀情况下的本征值问题

在均匀外磁场、空间均匀情况下，由于磁场 $\boldsymbol{B}_0\neq 0$，线性弗拉索夫方程变成

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\boldsymbol{v}\cdot\nabla+\frac{q_\alpha}{m_\alpha c}\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}_0\cdot\nabla_v\right)f_{\alpha 1}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v};t)$$
$$=-\frac{q_\alpha}{m_\alpha}\left(\boldsymbol{E}_1+\frac{1}{c}\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}_1\right)\cdot\nabla_v f_{\alpha 0}.\qquad(10.1)$$

和无磁场时的情况不同，这里出现了速度空间的导数 $\nabla_v=\partial/\partial\boldsymbol{v}$，在对上面的方程作了时间和空间的拉氏、傅氏变换后，它仍然是一个关于扰动速度分布函数 $f_{\alpha 1}$的(对速度的)微分方程，无法简单地得出其解. 为了避开解微分方程的困难，发展了几种不同的方法，如沿未扰动带电粒子的轨道积分法，沿未扰动导心的轨道积分法(又称回旋动理学方程积分法)等. 本章将介绍这两种解线性弗拉索夫方程的通用方法.

10.1 电磁波色散关系(沿未扰动粒子轨道积分法)

10.1.1 粒子的轨道方程及其坐标系

上面的弗拉索夫方程是写在 6 维相空间($\boldsymbol{r},\boldsymbol{v}$)中的，这时 $\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 都是相互独立的不随时间而变的实验室坐标. 但还可以引入一

个随粒子一起运动的坐标系 $\boldsymbol{r}(t),\boldsymbol{v}(t)$，它和实验室坐标可以有以下关系：

$$\boldsymbol{r}(t=0)=\boldsymbol{r},\quad \boldsymbol{v}(t=0)=\boldsymbol{v}.$$

而在 $t\neq 0$ 时，$\boldsymbol{r}(t),\boldsymbol{v}(t)$ 构成了粒子的轨道，满足牛顿方程

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}(t)}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{v}(t),\quad \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}(t)}{\mathrm{d}t}=\frac{\boldsymbol{F}(t)}{m}.$$

如果在牛顿方程中的力只取成粒子受到的平衡力 $\boldsymbol{F}_{\alpha 0}$，则粒子的这类轨道就称为未扰动轨道. 在新的坐标系里，扰动的速度分布函数可以表示成 $f_{\alpha 1}(\boldsymbol{r}(t),\boldsymbol{v}(t);t)$，对它的全微商为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f_{\alpha 1}(\boldsymbol{r}(t),\boldsymbol{v}(t);t)$$

$$=\left(\frac{\partial}{\partial t}+\boldsymbol{v}(t)\cdot\nabla+\frac{\boldsymbol{F}_{\alpha 0}}{m_\alpha}\cdot\nabla_v\right)f_{\alpha 1}(\boldsymbol{r}(t),\boldsymbol{v}(t);t).$$

这样，弗拉索夫方程的左面在新的坐标系中就变成了一个全微商，解方程的问题就简化成将方程(10.1)左面对时间求积分，从而避免了求解速度空间微分方程的困难. 弗拉索夫方程在实验室坐标系 $(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v})$ 和在随粒子一起运动的轨道坐标系 $(\boldsymbol{r}(t),\boldsymbol{v}(t))$ 中的两种表达方式与流体方程的欧拉形式和拉格朗日形式有类似之处.

10.1.2　弗拉索夫方程的积分与色散张量的推导[1]

1. 弗拉索夫方程的积分

均匀磁场中的线性弗拉索夫方程(10.1)，在随未扰动粒子轨道运动的坐标系中可以改写成

$$\frac{\mathrm{d}f_{\alpha 1}(\boldsymbol{r}(t),\boldsymbol{v}(t);t)}{\mathrm{d}t}=-\frac{q_\alpha}{m_\alpha}\Big[\boldsymbol{E}_1(\boldsymbol{r}(t),t)+\frac{1}{c}\boldsymbol{v}(t)\times\boldsymbol{B}_1(\boldsymbol{r}(t),t)\Big]\cdot\nabla_v f_{\alpha 0}(\boldsymbol{v}(t)).$$

直接积分，得

$$f_{\alpha 1}(\boldsymbol{r}(t),\boldsymbol{v}(t);t)=-\frac{q_\alpha}{m_\alpha}\int_{-\infty}^{t}\mathrm{d}t'\Big[\boldsymbol{E}_1(\boldsymbol{r}(t'),t')+\frac{1}{c}\boldsymbol{v}(t')\times\boldsymbol{B}_1(\boldsymbol{r}(t'),t')\Big]\cdot\nabla_{v(t')}f_{\alpha 0}(\boldsymbol{v}(t'))+f_{\alpha 1}(\boldsymbol{r}(-\infty),\boldsymbol{v}(-\infty);t=-\infty).$$

其中 $f_{\alpha 0}$ 并不直接依赖于时间，它只是通过 $\boldsymbol{v}(t)$ 而和时间有关. 上式的最后一项代表扰动的初值(这里假定初始时刻在 $t=-\infty$). 对于本征值问题，这一项为零. 对方程两边同作拉氏、傅氏变换后，得

$$f_{\alpha k}=-\frac{q_\alpha}{m_\alpha}\int_{-\infty}^{0}\mathrm{d}\tau\Big[\boldsymbol{E}_k+\frac{1}{c}\boldsymbol{v}(\tau)\times\boldsymbol{B}_k\Big]\cdot\nabla_{v(\tau)}f_{\alpha 0}(\boldsymbol{v}(\tau))\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\Delta\boldsymbol{X}(\tau)-\omega\tau)},\tag{10.2}$$

其中 $\Delta\boldsymbol{X}(\tau)=\boldsymbol{r}(t')-\boldsymbol{r}(t),\tau=t'-t$. 由此可以求出扰动电流

$$\boldsymbol{j}_k=\sum_\alpha n_{\alpha 0}q_\alpha\int\boldsymbol{v}f_{\alpha k}\mathrm{d}\boldsymbol{v}.$$

考虑到 $\boldsymbol{B}_k=c\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E}_k/\omega$，故 $f_{\alpha k}$ 和 $\boldsymbol{j}_k$ 都正比于扰动电场(的傅氏分量)，

$$\boldsymbol{j}(\omega,\boldsymbol{k})=\overleftrightarrow{\sigma}(\omega,\boldsymbol{k})\cdot\boldsymbol{E}_1(\omega,\boldsymbol{k})\equiv\overleftrightarrow{\sigma}(\omega,\boldsymbol{k})\cdot\boldsymbol{E}_k.$$

这就是高频电场下的(傅氏空间)欧姆定律. 从上式得出电导张量 $\overleftrightarrow{\sigma}$ 后，就可以代入波动方程，而得到色散方程

$$D(\omega,\boldsymbol{k})=\det|\overleftrightarrow{D}|=\det\Big|\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}-k^2\overleftrightarrow{I}+\frac{\omega^2}{c^2}\overleftrightarrow{\varepsilon}\Big|=0.$$

其中 $\overleftrightarrow{\varepsilon}=\overleftrightarrow{I}+\mathrm{i}(4\pi/\omega)\overleftrightarrow{\sigma}$ 是等价介电张量.

注意：当无外磁场时，粒子作匀速直线运动，这时“未扰动轨道”由 $\boldsymbol{v}(t)=\boldsymbol{v}=$ 常矢量及 $\boldsymbol{r}(t)=\boldsymbol{r}(0)+\boldsymbol{v}t$ 描述. 结果 $\Delta\boldsymbol{X}(\tau)=\boldsymbol{v}\tau$；$\boldsymbol{k}\cdot\Delta\boldsymbol{X}(\tau)=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}\,\tau$. 将它代入积分，就回到了无外场本征值问题时的结果

$$f_{\alpha k} = \mathrm{i}\,\frac{q_\alpha}{m_\alpha}\frac{1}{\omega - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}}\left[\boldsymbol{E}_k + \frac{1}{c}\boldsymbol{v}(\tau)\times\boldsymbol{B}_k\right]\cdot\nabla_v f_{\alpha 0}.$$

下面来完成(10.2)式的积分.首先给出均匀磁场中的带电粒子拉莫尔运动轨道

$$v_z(t) = v_\parallel = \text{const.},\quad z(t) = v_\parallel t + z_0,$$

$$v_x(t) = v_\perp\cos(\phi - \omega_c t),$$

$$x(t) = x_0 - \frac{v_\perp}{\omega_c}\sin(\phi - \omega_c t) + \frac{v_\perp}{\omega_c}\sin\phi,$$

$$v_y(t) = v_\perp\sin(\phi - \omega_c t),$$

$$y(t) = y_0 + \frac{v_\perp}{\omega_c}\cos(\phi - \omega_c t) - \frac{v_\perp}{\omega_c}\cos\phi.$$

其中 $v_\parallel$ 和 $v_\perp$ 都是常数,x_0, y_0, z_0, ϕ 是 $t=0$ 时刻粒子的坐标和相位.下面为了表述简单,有时省略了粒子轨道速度 $v_i(t)$ $(i=x,y,z)$ 中的时间依赖符号 (t).在(10.2)式的时间积分中,被积函数由两部分组成:非指数部分和指数部分.首先利用法拉第定律

$$\frac{\omega}{c}\boldsymbol{B}_k = \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E}_k,$$

$$\boldsymbol{B}_k = -\frac{c}{\omega}k_\parallel E_{ky}\boldsymbol{e}_x + \frac{c}{\omega}(k_\parallel E_{kx} - k_\perp E_{kz})\boldsymbol{e}_y + \frac{c}{\omega}k_\perp E_{ky}\boldsymbol{e}_z$$

来简化非指数部分,得

$$\left(\boldsymbol{E}_k + \frac{1}{c}\boldsymbol{v}(\tau)\times\boldsymbol{B}_k\right)_x = \left(1 - \frac{k_\parallel}{\omega}v_z\right)E_{kx} + \frac{k_\perp}{\omega}v_y E_{ky} + \frac{k_\perp}{\omega}v_z E_{kz},$$

$$\left(\boldsymbol{E}_k + \frac{1}{c}\boldsymbol{v}(\tau)\times\boldsymbol{B}_k\right)_y = \left(1 - \frac{k_\parallel}{\omega}v_z - \frac{k_\perp}{\omega}v_x\right)E_{ky},$$

$$\left(\boldsymbol{E}_k + \frac{1}{c}\boldsymbol{v}(\tau)\times\boldsymbol{B}_k\right)_z = \frac{k_\parallel}{\omega}v_x E_{kx} + \frac{k_\parallel}{\omega}v_y E_{ky} + \left(1 - \frac{k_\perp}{\omega}v_x\right)E_{kz}.$$

而

$$\nabla_v f_{\alpha 0} = 2(\boldsymbol{v} - v_\parallel\boldsymbol{e}_z)\frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial v_\perp^2} + 2v_\parallel\frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial v_\parallel^2}\boldsymbol{e}_z.$$

所以最后可将非指数部分写成

$$\left[\boldsymbol{E}_k + \frac{1}{c}\boldsymbol{v}(\tau)\times\boldsymbol{B}_k\right]\cdot\nabla_{v(\tau)}f_{\alpha 0}(\boldsymbol{v}(\tau))$$

$$= 2v_x(\tau)\left[E_{kx}\frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial v_\perp^2} + \frac{v_\parallel}{\omega}(k_\parallel E_{kx} - k_\perp E_{kz})\left(\frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial v_\parallel^2} - \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial v_\perp^2}\right)\right]$$

$$+ 2v_y(\tau)\left[E_{ky}\frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial v_\perp^2} + \frac{k_\parallel v_\parallel}{\omega}E_{ky}\left(\frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial v_\parallel^2} - \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial v_\perp^2}\right)\right]$$

$$+ 2v_\parallel E_{kz}\frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial v_\parallel^2}$$

$$\equiv 2v_x(\tau)X + 2v_y(\tau)Y + 2v_\parallel Z.$$

其中 $X, Y, Z, v_\parallel$ 都是和时间(也即积分)无关的量,可以提出积分号,留在积分号中的只有 $v_x(\tau), v_y(\tau)$ 以及被积函数的指数部分.

再看指数部分,按前面给出的拉莫尔运动轨道公式

$$\boldsymbol{k}\cdot\Delta\boldsymbol{X}(\tau) = k_\perp\left(-\frac{v_\perp}{\omega_c}\sin(\phi - \omega_c\tau) + \frac{v_\perp}{\omega_c}\sin\phi\right) + k_\parallel v_\parallel\tau,$$

利用

$$\exp\left[\mathrm{i}\frac{k_\perp v_\perp}{\omega_c}\sin(\phi - \omega_c\tau)\right] = \sum_{l=-\infty}^{\infty}\mathrm{J}_l\left(\frac{k_\perp v_\perp}{\omega_c}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}l(\phi-\omega_c\tau)},$$

故指数部分最后可写成

$$\exp[\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\Delta\boldsymbol{X}(\tau) - \mathrm{i}\omega\tau]$$

$$= \sum_{l=-\infty}^{\infty}\mathrm{J}_l\left(\frac{k_\perp v_\perp}{\omega_c}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}l(\phi-\omega_c\tau)}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{J}_n\left(\frac{k_\perp v_\perp}{\omega_c}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\phi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_\parallel v_\parallel\tau - \mathrm{i}\omega\tau}$$

$$= \sum_{n,l=-\infty}^{\infty}\mathrm{J}_n\mathrm{J}_l\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-l)\phi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_\parallel v_\parallel + l\omega_c - \omega)\tau}.$$

考虑到非指数部分中

$$2v_x(\tau) = 2v_\perp\cos(\phi - \omega_c\tau) = v_\perp\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\phi-\omega_c\tau)} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\phi-\omega_c\tau)}\right),$$

$$2v_y(\tau) = 2v_\perp\sin(\phi - \omega_c\tau) = -\mathrm{i}v_\perp\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\phi-\omega_c\tau)} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\phi-\omega_c\tau)}\right),$$

则上式中的 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\phi-\omega_c\tau)}$ 和指数部分相乘后成为

$$\sum_{n,l=-\infty}^{\infty}\mathrm{J}_n\mathrm{J}_l\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-l+1)\phi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_\parallel v_\parallel + l\omega_c - \omega - \omega_c)\tau}$$

$$= \sum_{n,l=-\infty}^{\infty}\mathrm{J}_n\mathrm{J}_{l+1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-l)\phi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_\parallel v_\parallel + l\omega_c - \omega)\tau}.$$

其中已将$(l-1)\to l$. 而非指数部分中的 $e^{-i(\phi-\omega_c\tau)}$和指数部分相乘后成为(将$(l+1)\to l$)

$$\sum_{n,l=-\infty}^{\infty} J_n J_{l-1} e^{i(n-l)\phi} e^{i(k_\parallel v_\parallel + l\omega_c - \omega)\tau}.$$

这样一来,被积函数最后都是 $\exp[i(k_\parallel v_\parallel + l\omega_c - \omega)\tau]$,积分后得

$$\int_{-\infty}^{0} d\tau e^{i(k_\parallel v_\parallel + l\omega_c - \omega)\tau} = \frac{-i}{k_\parallel v_\parallel + l\omega_c - \omega}.$$

这样积分完成后,得

$$f_{\alpha k} = -\frac{q_\alpha}{m_\alpha}\sum_{n,l} J_n\left(\frac{k_\perp v_\perp}{\omega_c}\right) e^{i(n-l)\phi} \times \left[\frac{2Zv_\parallel J_l + Xv_\perp (J_{l+1}+J_{l-1}) - iYv_\perp (J_{l+1}-J_{l-1})}{i(\omega - l\omega_c - k_\parallel v_\parallel)}\right]$$

$$= -\frac{q_\alpha}{m_\alpha}\sum_{n,l} J_n\left(\frac{k_\perp v_\perp}{\omega_c}\right) e^{i(n-l)\phi} \frac{2Zv_\parallel J_l + 2Xl(\omega_c/k_\perp)J_l + 2iYv_\perp J_l'}{i(\omega - l\omega_c - k_\parallel v_\parallel)}.$$

其中利用了贝塞尔函数的递推关系

$$J_{n+1}(x) + J_{n-1}(x) = \frac{2nJ_n(x)}{x}, \quad J_{n-1} - J_{n+1} = 2\frac{dJ_n(x)}{dx} \equiv 2J_n'.$$

最后,为了进一步计算介电张量,可以把扰动分布函数改写成

$$f_{\alpha k} = \hat{f}_{\alpha x}E_{kx} + \hat{f}_{\alpha y}E_{ky} + \hat{f}_{\alpha z}E_{kz}. \tag{10.3}$$

其中

$$\hat{f}_{\alpha x} = \frac{q_\alpha}{m_\alpha}\sum_{n,l} J_n\left(\frac{k_\perp v_\perp}{\omega_c}\right) e^{i(n-l)\phi} \frac{\hat{\chi}_\alpha v_\perp (J_{l+1}+J_{l-1})}{i(\omega - l\omega_c - k_\parallel v_\parallel)},$$

$$\hat{f}_{\alpha y} = \frac{q_\alpha}{m_\alpha}\sum_{n,l} J_n\left(\frac{k_\perp v_\perp}{\omega_c}\right) e^{i(n-l)\phi} \frac{\hat{\chi}_\alpha v_\perp (J_{l-1}-J_{l+1})}{\omega - l\omega_c - k_\parallel v_\parallel},$$

$$\hat{f}_{\alpha z} = \frac{q_\alpha}{m_\alpha}\sum_{n,l} J_n\left(\frac{k_\perp v_\perp}{\omega_c}\right) e^{i(n-l)\phi} \frac{2\hat{Z}_\alpha v_\parallel J_l + \kappa_\alpha v_\perp (J_{l-1}+J_{l+1})}{i(\omega - l\omega_c - k_\parallel v_\parallel)};$$

而

$$\hat{\chi}_\alpha = (X)_{E_{kx}} = (Y)_{E_{ky}} = \left(1 - \frac{k_\parallel v_\parallel}{\omega}\right)\frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial v_\perp^2} + \frac{k_\parallel v_\parallel}{\omega}\frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial v_\parallel^2},$$

$$\hat{Z}_\alpha = (Z)_{E_{kz}} = \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial v_\parallel^2}, \quad \kappa_\alpha = (X)_{E_{kz}} = -\frac{k_\perp v_\parallel}{\omega}\left(\frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial v_\parallel^2} - \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial v_\perp^2}\right).$$

2. 色散张量的推导

把上式代入扰动电流的表达式,按前面的讨论可知有

$$j_k = \sum_\alpha n_{\alpha 0} q_\alpha \int \boldsymbol{v} f_{\alpha k} d\boldsymbol{v} = \overleftrightarrow{\sigma} \cdot \boldsymbol{E}_k.$$

也即电导张量的分量为

$$\sigma_{ij} = \sum_\alpha n_{\alpha 0} q_\alpha \int v_i \hat{f}_{\alpha j} d\boldsymbol{v} \quad (i,j = x,y,z). \tag{10.4}$$

由此可以进一步得出介电张量、色散张量的各分量及色散方程

$$\varepsilon_{ij} = \delta_{ij} + i\frac{4\pi}{\omega}\sigma_{ij}, \quad D_{ij} = k_i k_j - k^2\delta_{ij} + \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_{ij}, \quad \det|\overleftrightarrow{D}| = 0. \tag{10.5}$$

色散张量 $\overleftrightarrow{D}$一共有 9 个分量,下面给出其中两个分量的推导过程,其他分量将在最后一起(不加推导地)列出. 因为按定义

$$D_{xx} = \frac{\omega^2}{c^2}\left(1 - \frac{k_\parallel^2 c^2}{\omega^2} + i\frac{4\pi}{\omega}\sigma_{xx}\right),$$

故需要求的是

$$i\frac{4\pi}{\omega}\sigma_{xx} = i\sum_\alpha \frac{4\pi n_{\alpha 0} q_\alpha^2}{\omega m_\alpha}\sum_{n,l}\int v_\perp dv_\perp dv_\parallel \times \frac{\chi_\alpha v_\perp J_n(J_{l+1}+J_{l-1})}{i(\omega - l\omega_c - k_\parallel v_\parallel)}\int d\phi v_x e^{i(n-l)\phi}$$

$$= \sum_\alpha \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega}\sum_{n,l}\int v_\perp dv_\perp dv_\parallel \times \frac{2\chi_\alpha l\omega_c J_n J_l/k_\perp}{\omega - l\omega_c - k_\parallel v_\parallel} v_\perp \int_0^{2\pi} d\phi \cos\phi e^{i(n-l)\phi}.$$

从其中最后一个积分可以得出 δ 符号

$$\int d\phi \cos\phi e^{i(n-l)\phi} = \frac{1}{2}\int d\phi (e^{i\phi} + e^{-i\phi}) e^{i(n-l)\phi} = \frac{1}{2}2\pi(\delta_{n,l-1} + \delta_{n,l+1}).$$

这样上式的求和就可写成

$$\sum_{n,l} \frac{l v_\perp \omega_c J_n J_l/k_\perp}{\omega - l\omega_c - k_\parallel v_\parallel}\pi(\delta_{n,l-1} + \delta_{n,l+1})$$

$$= \sum_l \frac{\pi l v_\perp \omega_c J_l/k_\perp}{\omega - l\omega_c - k_\parallel v_\parallel}(J_{l-1} + J_{l+1})$$

$$\left(由\ J_{n+1} + J_{n-1} = \frac{2nJ_n}{x}\right) = \sum_l \frac{2\pi l^2 J_l^2}{\omega - l\omega_c - k_\parallel v_\parallel} \frac{\omega_c^2}{k_\perp^2}.$$

故最后得到

$$i\frac{4\pi}{\omega}\sigma_{xx} = \frac{2\pi}{\omega}\sum_\alpha \omega_{p\alpha}^2 \sum_l \int v_\perp dv_\perp dv_\parallel l^2 J_l^2 \frac{2\hat{\chi}_\alpha(\omega_c/k_\perp)^2}{\omega - l\omega_c - k_\parallel v_\parallel}$$

$$= -\frac{2\pi}{\omega}\sum_\alpha \left(\frac{\omega_p^2}{\omega_c}\right)_\alpha \sum_l \left[\!\left[\omega_{\alpha c}\left(\frac{l\omega_{\alpha c}J_l}{k_\perp}\right)^2 \hat{\chi}_\alpha \right]\!\right].$$

其中

$$[\![\cdots]\!] = \int_{-\infty}^{\infty} dv_\parallel \int_0^\infty \frac{2v_\perp [\cdots]}{k_\parallel v_\parallel + l\omega_c - \omega} dv_\perp. \tag{10.6}$$

同样可求得 σ_{zz}：

$$i\frac{4\pi}{\omega}\sigma_{zz} = i\sum_\alpha \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega}\sum_{n,l}\int v_\perp dv_\perp dv_\parallel J_n$$

$$\frac{2\hat{Z}_\alpha v_\parallel J_l + \kappa_\alpha v_\perp (J_{l-1} + J_{l+1})}{i(\omega - l\omega_c - k_\parallel v_\parallel)} \int_0^{2\pi} v_\parallel e^{i(n-l)\phi} d\phi$$

$$= \frac{2\pi}{\omega}\sum_\alpha \left(\frac{\omega_p^2}{\omega_c}\right)_\alpha \sum_l [\![v_\parallel^2 \omega_{\alpha c} J_l^2 \Lambda_\alpha]\!],$$

其中

$$\Lambda_\alpha = \hat{Z}_\alpha + \frac{l\omega_{\alpha c}}{k_\perp v_\parallel}\kappa_\alpha = \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial v_\parallel^2} - \frac{l\omega_{\alpha c}}{\omega}\left(\frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial v_\parallel^2} - \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial v_\perp^2}\right). \tag{10.7}$$

由此可得到

$$D_{xx} = \frac{\omega^2}{c^2}\left(1 - \frac{k_\parallel^2 c^2}{\omega^2} - \frac{2\pi}{\omega}\sum_\alpha \left(\frac{\omega_p^2}{\omega_c}\right)_\alpha \sum_l \left[\!\left[\omega_{\alpha c}\left(\frac{l\omega_{\alpha c}J_l}{k_\perp}\right)^2 \hat{\chi}_\alpha \right]\!\right]\right), \tag{10.8}$$

$$D_{zz} = \frac{\omega^2}{c^2}\left(1 - \frac{k_\perp^2 c^2}{\omega^2} - \frac{2\pi}{\omega}\sum_\alpha \left(\frac{\omega_p^2}{\omega_c}\right)_\alpha \sum_l [\![v_\parallel^2 \omega_{\alpha c} J_l^2 \Lambda_\alpha]\!]\right). \tag{10.9}$$

其他的分量为

$$D_{xy} = \frac{\omega^2}{c^2}\left(-i\frac{2\pi}{\omega}\sum_\alpha \sum_l \left(\frac{\omega_p^2}{\omega_c}\right)_\alpha \left[\!\left[\frac{l\omega_{\alpha c}^2 v_\perp}{k_\perp} J_l J_l' \hat{\chi}_\alpha \right]\!\right]\right), \tag{10.10}$$

$$D_{xz} = \frac{\omega^2}{c^2}\left(\frac{k_\parallel k_\perp c^2}{\omega^2} - \frac{2\pi}{\omega}\sum_\alpha \sum_l \left(\frac{\omega_p^2}{\omega_c}\right)_\alpha \left[\!\left[\frac{l\omega_{\alpha c}^2 v_\parallel J_l^2}{k_\perp}\Lambda_\alpha \right]\!\right]\right), \tag{10.11}$$

$$D_{yx} = -D_{xy}, \tag{10.12}$$

$$D_{yy} = \frac{\omega^2}{c^2}\left(1 - \frac{(k_\parallel^2 + k_\perp^2)c^2}{\omega^2} - \frac{2\pi}{\omega}\sum_\alpha \sum_l \left(\frac{\omega_p^2}{\omega_c}\right)_\alpha [\![v_\perp^2 \omega_{\alpha c}(J_l')^2 \hat{\chi}_\alpha]\!]\right), \tag{10.13}$$

$$D_{yz} = \frac{\omega^2}{c^2}\left(i\frac{2\pi}{\omega}\sum_\alpha \sum_l \left(\frac{\omega_p^2}{\omega_c}\right)_\alpha [\![v_\parallel v_\perp \omega_{\alpha c} J_l J_l' \Lambda_\alpha]\!]\right), \tag{10.14}$$

$$D_{zx} = \frac{\omega^2}{c^2}\left(\frac{k_\parallel k_\perp c^2}{\omega^2} - \frac{2\pi}{\omega}\sum_\alpha \sum_l \left(\frac{\omega_p^2}{\omega_c}\right)_\alpha \left[\!\left[\frac{l\omega_{\alpha c}^2 v_\parallel J_l^2}{k_\perp}\hat{\chi}_\alpha \right]\!\right]\right), \tag{10.15}$$

$$D_{zy} = \frac{\omega^2}{c^2}\left(-i\frac{2\pi}{\omega}\sum_\alpha \sum_l \left(\frac{\omega_p^2}{\omega_c}\right)_\alpha [\![v_\parallel v_\perp \omega_{\alpha c} J_l J_l' \hat{\chi}_\alpha]\!]\right). \tag{10.16}$$

而色散方程为

$$\begin{vmatrix} D_{xx} & D_{xy} & D_{xz} \\ D_{yx} & D_{yy} & D_{yz} \\ D_{zx} & D_{zy} & D_{zz} \end{vmatrix} = 0.$$

这个方程当然是极其复杂的,很难从中得出一般性的色散关系.下面我们将对于一些简单的情况(如平行于或垂直于磁场传播的波)给出动理学波的色散关系.现在先粗略地讨论一下磁化等离子体中动理学波的两个鲜明的特点：朗道阻尼的推广——回旋共振阻尼以及有限拉莫尔半径效应.

(i) 在积分 $[\![\cdots]\!]$ 中出现因子

$$\frac{1}{\omega - l\omega_c - k_\parallel v_\parallel}.$$

这表示,除了 $\omega = k_\parallel v_\alpha (l=0)$ 时的波—粒子共振相互作用(即朗道阻尼或不稳定性)外,还有 $\omega - l\omega_c = k_\parallel v_\parallel$ 时的"回旋共振阻尼"(也即经过了多普勒频移修正后的朗道阻尼或不稳定性).这样,粒子

可以和从低频到高频的许多波发生共振，而不是(如非磁化等离子体中的那样)只和单一频率的波共振并交换能量.

(ii) 在 D_{ij}中出现了贝塞尔函数的无穷求和，而在贝塞尔函数的宗量

$$\frac{k_\perp v_\perp}{\omega_c} = k_\perp r_c$$

中，r_c 代表拉莫尔半径，当 $k_\perp r_c$ 为有限值时，这些贝塞尔函数的影响不可忽略. 它们会使波的色散关系产生重大改变，如从纯静电波或纯电磁波变成混有静电和电磁特性的复杂的所谓"动理学波"等. 一般将它们统称为"有限拉莫尔半径效应".

10.1.3 均匀、磁化等离子体色散方程的各种表达式

本节将给出几种常见诸于文献及参考书的磁化等离子体本征模的色散张量表达式，以供读者备查. 取如图 10.1 的坐标系后，色散方程是

$$\begin{vmatrix} \varepsilon_{xx} - N^2\cos^2\theta & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} + N^2\sin\theta\cos\theta \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} - N^2 & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} + N^2\sin\theta\cos\theta & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} - N^2\sin^2\theta \end{vmatrix} = 0.$$

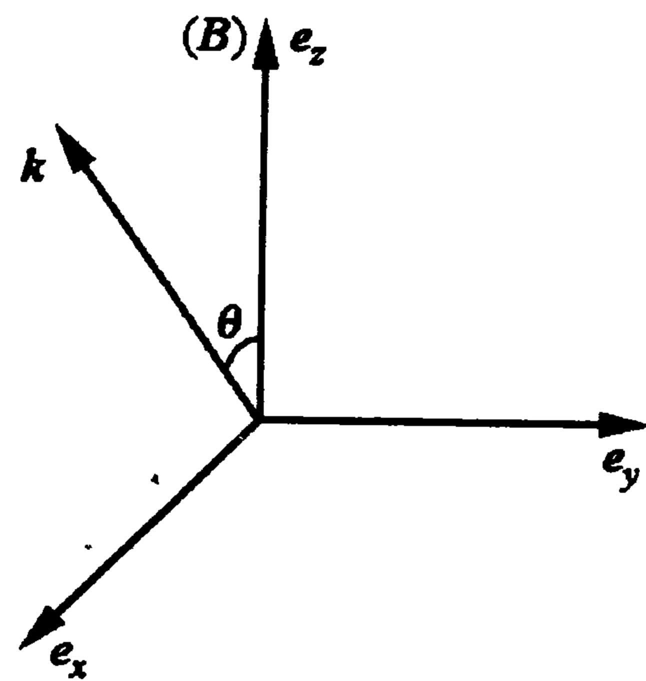


图 10.1 磁场、波矢的坐标图

这里，$N=ck/\omega$ 是等离子体的折射率.

1. 冷等离子体(流体)描述

从双流体描述，可得这时的等价介电张量为

$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & \mathrm{i}\varepsilon_2 & 0 \\ -\mathrm{i}\varepsilon_2 & \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{bmatrix},$$

$$\varepsilon_1 = 1 - \sum_\alpha \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega^2 - \omega_{c\alpha}^2}, \quad \varepsilon_2 = -\sum_\alpha \frac{\omega_{p\alpha}^2\omega_{c\alpha}}{\omega(\omega^2 - \omega_{c\alpha}^2)},$$

$$\varepsilon_3 = 1 - \sum_\alpha \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega^2}.$$

2. 高温等离子体(动理学)描述

这里给出的是 T. H. Stix 在其经典专著 *Waves in Plasmas* 中(参见文献[2])给出的等价介电张量的动理学表达式. 它和上节中给出的表达式完全等价，但是被广为引用.

$$\varepsilon_{ij} = \delta_{ij} + \sum_\alpha \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega^2}\left\{\sum_{l=-\infty}^{\infty}\int \mathrm{d}\boldsymbol{v}\left(\frac{\omega - k_\parallel v_\parallel}{v_\perp}\frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial v_\perp} + k_\parallel \frac{f_{\alpha 0}}{\partial v_\parallel}\right)\right.$$
$$\left.\times \frac{\Pi_{ij}^{(l)}}{\omega - l\omega_c - k_\parallel v_\parallel} - \left(1 + \int \mathrm{d}\boldsymbol{v}\frac{v_\parallel^2}{v_\perp}\frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial v_\perp}\right)b_i b_j\right\}.$$

其中 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{B}/B$，对于我们这里所取的坐标，$b_z=1, b_x=b_y=0$，而 $f_{\alpha 0}$ 是平衡的粒子速度分布函数，有归一条件 $\int f_{\alpha 0}\mathrm{d}\boldsymbol{v} = 1$. 上式中的

$$\Pi_{ij}^{(l)} = \begin{bmatrix} \frac{l^2\omega_{c\alpha}^2}{k_\perp^2}\mathrm{J}_l^2 & \mathrm{i}v_\perp \frac{l\omega_{c\alpha}}{k_\perp}\mathrm{J}_l\mathrm{J}_l' & v_\parallel \frac{l\omega_{c\alpha}}{k_\perp}\mathrm{J}_l^2 \\ -\mathrm{i}v_\perp \frac{l\omega_{c\alpha}}{k_\perp}\mathrm{J}_l\mathrm{J}_l' & v_\perp^2(\mathrm{J}_l')^2 & -\mathrm{i}v_\parallel v_\perp \mathrm{J}_l\mathrm{J}_l' \\ v_\parallel \frac{l\omega_{c\alpha}}{k_\perp}\mathrm{J}_l^2 & \mathrm{i}v_\parallel v_\perp \mathrm{J}_l\mathrm{J}_l' & v_\parallel^2\mathrm{J}_l^2 \end{bmatrix},$$

其中

$$\mathrm{J}_l = \mathrm{J}_l\left(\frac{k_\perp v_\perp}{\omega_{c\alpha}}\right) = \mathrm{J}_l(k_\perp r_{c\alpha}), \quad \mathrm{J}_l' = \frac{\partial \mathrm{J}_l}{\partial x}.$$

3. 热平衡高温等离子体情况

如果进一步取平衡速度分布函数为热平衡的麦克斯韦分布

$$f_{a0}=f_{aM}=\left(\frac{m_a}{2\pi T_a}\right)^{3/2}\exp\left(-\frac{m_a v^2}{2T_a}\right),$$

将它代入上面的介电张量表达式后，得

$$\varepsilon_{ij}(\omega,\boldsymbol{k})=\delta_{ij}+\sum_a\frac{\omega_{pa}^2}{\omega^2}\Big[\sum_{l=-\infty}^{\infty}\zeta_0 Z(\zeta_l)\Pi_{ij}^{(a)}+2\zeta_0^2 b_i b_j\Big]. \qquad (10.17)$$

其中

$$\Pi_{ij}^{(a)}=\begin{bmatrix}\frac{l^2}{a_a}A_l(a_a) & \mathrm{i}lA_l'(a_a) & \sqrt{\frac{2}{a_a}}l\zeta_l A_l(a_a)\\ -\mathrm{i}lA_l'(a_a) & \frac{l^2}{a_a}A_l(a_a)-2a_aA_l'(a_a) & -\mathrm{i}\sqrt{2a_a}\zeta_1A_l'(a_a)\\ \sqrt{\frac{2}{a_a}}l\zeta_lA_l(a_a) & \mathrm{i}\sqrt{2a_a}\zeta_1A_l'(a_a) & 2\zeta_l^2A_l(a_a)\end{bmatrix},$$

而

$$\zeta_1=\frac{\omega-l\omega_{ca}}{\sqrt{2}k_\parallel v_a},\quad v_a=\sqrt{\frac{T_a}{m_a}},\quad A_l(x)=\mathrm{e}^{-x}\mathrm{I}_l(x),$$

$$\sqrt{a_a}=\frac{k_\perp v_a}{\omega_{ca}}=k_\perp r_{ca}.$$

其中 $\mathrm{I}_l(x)$ 是虚宗量的贝塞尔函数，它的(小宗量)微扰展开和(大宗量)渐近展开分别为

$$当\ x\ll1,\quad \mathrm{I}_l(x)=\frac{(x/2)^l}{\Gamma(l+1)}+\frac{(x/2)^{l+2}}{1!\ \Gamma(l+2)}+\frac{(x/2)^{l+4}}{2!\ \Gamma(l+3)}+\cdots,$$

$$当\ x\gg1,\quad \mathrm{I}_l(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi x}}\mathrm{e}^x\Big[1-\frac{l-1}{8x}+\frac{(l-1)(l-9)}{2!\ (8x)^2}-\cdots\Big].$$

而等离子体的色散函数 $Z(\zeta_l)$，在第九章中已经给出，为了查看方便，这里将它的定义式、微扰展开和渐近展开再列在下面

$$Z(\zeta)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{t-\zeta}\mathrm{d}t=2\mathrm{i}\mathrm{e}^{-\zeta^2}\int_{-\infty}^{\mathrm{i}\zeta}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t,$$

$$当\ \zeta\to0,\quad Z(\zeta)=\mathrm{i}\pi^{1/2}\mathrm{e}^{-\zeta^2}-2\zeta\Big[1-\frac{2}{3}\zeta^2+\frac{4}{15}\zeta^4-\frac{8}{105}\zeta^6+\cdots\Big],$$

$$当\ \zeta\to\infty,\quad Z(\zeta)=\mathrm{i}\sigma\pi^{1/2}\mathrm{e}^{-\zeta^2}-\frac{1}{\zeta}\Big[1+\frac{1}{2\zeta^2}+\frac{3}{4\zeta^4}+\frac{15}{8\zeta^6}+\cdots\Big],$$

其中

$$\sigma=\begin{cases}0, & \mathrm{Im}\zeta>1/\mathrm{Re}\zeta,\\ 1, & |\mathrm{Im}\zeta|<1/\mathrm{Re}\zeta,\\ 2, & -\mathrm{Im}\zeta>1/\mathrm{Re}\zeta.\end{cases}$$

10.2 静电波色散关系(沿未扰动导心轨道积分法)[3]

在前面对线性弗拉索夫方程沿粒子的未扰动轨道积分后，出现过因子 $\mathrm{e}^{(n-l)\phi}$. 它表示一个粒子沿未扰动轨道运动了 t 时间后，粒子因拉莫尔回转在速度空间中所转过的相角(扣除了已经转完的整数圈)，在求电导张量时，由于对粒子速度空间的 $\int\mathrm{d}\phi$ 作积分，这项成了 δ 符号，因此相角不出现在电导张量和色散函数的最终表达式中. 这说明在磁场中带电粒子的快速回旋转动对其本征模的色散关系并没有影响. 这就启发我们可以先对带电粒子的未扰动轨道作回旋角的平均——得出的是粒子的导心轨道，然后对线性弗拉索夫方程作沿“未扰动导心轨道”的积分. 由于在磁场中粒子的导心轨道远比回旋轨道简单，所以沿导心轨道的积分要更容易一些. 尤其是当磁场、等离子体的密度、温度、流场是空间非均匀的时候(本章讨论的只是它们都是均匀的特别简单的情况)，由于带电粒子在作回旋运动的同时还有各种的(导心)漂移，其未扰动轨道本身就相当复杂，沿这样的轨道积分有可能得不到严格的解析表达式. 这时用沿未扰动的导心轨道积分的方法就可能成功. 因此这里以求均匀磁场中静电本征模的色散方程为例，介绍这种方法. 在这基础上将它推广到非均匀情况并无原则困难.

10.2.1 从回旋轨道(也即实验室)坐标系到导心系的变换

取图 10.2 的坐标系，

$$\boldsymbol{e}_{\parallel}=\frac{\boldsymbol{B}_0}{B_0},\quad \boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{e}_{\parallel}\times\boldsymbol{e}_1,\quad B_0=\text{常数}.$$

图 10.2 磁场、速度的坐标图一

设粒子的未扰动轨道用(6 维实验室坐标系中的)$\boldsymbol{r},\boldsymbol{v}$ 表示，则导心的位置和速度可表示成

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{r}+\frac{\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{e}_{\parallel}}{\omega_c},\Longrightarrow\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v});$$

$$\boldsymbol{V}=(\varepsilon,\mu,\phi,\sigma),\Longrightarrow\boldsymbol{V}=\boldsymbol{V}(\boldsymbol{v}). \tag{10.18}$$

其中 $\omega_c=qB_0/(mc)$是回旋频率，而

$$\varepsilon=\frac{1}{2}v^2=\frac{1}{2}(v_{\parallel}^2+v_{\perp}^2),\quad \mu=\frac{v_{\perp}^2}{2B_0},\quad \sigma=\operatorname{sgn}(v_{\parallel}),$$

$$\phi=\arctan\frac{v_{\perp 2}}{v_{\perp 1}}. \tag{10.19}$$

为了在导心系中进行运算，需要将实验室坐标系中写出的零阶与一阶弗拉索夫方程

$$\mathscr{L}_0 f_{\alpha 0}=0,\quad \mathscr{L}_0\equiv\left(\frac{\partial}{\partial t}+\boldsymbol{v}\cdot\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{r}}+\frac{q_\alpha}{m_\alpha}\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}_0\cdot\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{v}}\right),$$

$$\mathscr{L}_0 f_{\alpha 1}=\mathscr{L}_0 f_{\alpha 0},\quad \mathscr{L}_1\equiv-\frac{q_\alpha}{m_\alpha}\left(\boldsymbol{E}_1+\frac{\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}_1}{c}\right)\cdot\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{v}},$$

变换到导心系中去. 为此不但要作$(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v})\longrightarrow(\boldsymbol{X},\boldsymbol{V})$的变换，还要作它们导数间的变换. 按隐函数的求导公式

$$\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{r}}=\frac{\partial\boldsymbol{X}}{\partial\boldsymbol{r}}\cdot\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{X}}+\frac{\partial\boldsymbol{V}}{\partial\boldsymbol{r}}\cdot\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{V}},\quad \frac{\partial}{\partial\boldsymbol{v}}=\frac{\partial\boldsymbol{V}}{\partial\boldsymbol{v}}\cdot\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{V}}+\frac{\partial\boldsymbol{X}}{\partial\boldsymbol{v}}\cdot\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{X}} \tag{10.20}$$

有

$$\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{r}}=1\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{X}}=\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{X}};$$

及 $\partial/\partial\boldsymbol{v}$ 的 $\boldsymbol{e}_{\parallel}$分量

$$\frac{\partial}{\partial v_{\parallel}}=\frac{\partial\boldsymbol{V}}{\partial v_{\parallel}}\cdot\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{V}}+\frac{\partial\boldsymbol{X}}{\partial v_{\parallel}}\cdot\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{X}},$$

$$\frac{\partial\boldsymbol{V}}{\partial v_{\parallel}}\cdot\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{V}}=\frac{\partial\varepsilon}{\partial v_{\parallel}}\frac{\partial}{\partial\varepsilon}+\frac{\partial\mu}{\partial v_{\parallel}}\frac{\partial}{\partial\mu}+\frac{\partial\phi}{\partial v_{\parallel}}\frac{\partial}{\partial\phi}=v_{\parallel}\frac{\partial}{\partial\varepsilon},$$

$$\frac{\partial\boldsymbol{X}}{\partial v_{\parallel}}\cdot\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{X}}=0;$$

$\partial/\partial\boldsymbol{v}$ 的 $\boldsymbol{e}_1$分量

$$\frac{\partial}{\partial v_{\perp 1}}=\frac{\partial\boldsymbol{V}}{\partial v_{\perp 1}}\cdot\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{V}}+\frac{\partial\boldsymbol{X}}{\partial v_{\perp 1}}\cdot\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{X}},$$

$$\frac{\partial\boldsymbol{V}}{\partial v_{\perp 1}}\cdot\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{V}}=\frac{\partial\varepsilon}{\partial v_{\perp 1}}\frac{\partial}{\partial\varepsilon}+\frac{\partial\mu}{\partial v_{\perp 1}}\frac{\partial}{\partial\mu}+\frac{\partial\phi}{\partial v_{\perp 1}}\frac{\partial}{\partial\phi}$$

$$=v_{\perp 1}\frac{\partial}{\partial\varepsilon}+\frac{v_{\perp 1}}{B_0}\frac{\partial}{\partial\mu}-\frac{\sin\phi}{v_{\perp}}\frac{\partial}{\partial\phi},$$

$$\frac{\partial\boldsymbol{X}}{\partial v_{\perp 1}}\cdot\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{X}}=\frac{\partial X_{\parallel}}{\partial v_{\perp 1}}\frac{\partial}{\partial X_{\parallel}}+\frac{\partial X_1}{\partial v_{\perp 1}}\frac{\partial}{\partial X_1}+\frac{\partial X_2}{\partial v_{\perp 1}}\frac{\partial}{\partial X_2}=-\frac{1}{\omega_c}\frac{\partial}{\partial X_2};$$

$\partial/\partial\boldsymbol{v}$ 的 $\boldsymbol{e}_2$分量

$$\frac{\partial}{\partial v_{\perp 2}}=\frac{\partial\boldsymbol{V}}{\partial v_{\perp 2}}\cdot\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{V}}+\frac{\partial\boldsymbol{X}}{\partial v_{\perp 2}}\cdot\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{X}},$$

$$\frac{\partial\boldsymbol{V}}{\partial v_{\perp 2}}\cdot\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{V}}=v_{\perp 2}\frac{\partial}{\partial\varepsilon}+\frac{v_{\perp 2}}{B_0}\frac{\partial}{\partial\mu}+\frac{\cos\phi}{v_{\perp}}\frac{\partial}{\partial\phi},$$

$$\frac{\partial\boldsymbol{X}}{\partial v_{\perp 1}}\cdot\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{X}}=\frac{1}{\omega_c}\frac{\partial}{\partial X_1}.$$

上面的那些表达式还可以进一步简化. 取如图 10.3 的新坐标系$(\boldsymbol{e}_{\parallel},\boldsymbol{e}_{\perp},\boldsymbol{e}_{\phi})$，它和老坐标系的变换关系是

$$\boldsymbol{e}_{\perp}=\boldsymbol{v}_{\perp}/v_{\perp}=\cos\phi\boldsymbol{e}_1+\sin\phi\boldsymbol{e}_2,$$

$$\boldsymbol{e}_{\phi}=\boldsymbol{e}_{\parallel}\times\boldsymbol{e}_{\perp}=\cos\phi\boldsymbol{e}_2-\sin\phi\boldsymbol{e}_1.$$

进而有

$$(\overleftrightarrow{I}\times\boldsymbol{e}_{\parallel})\cdot\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{X}}=[(\boldsymbol{e}_{\parallel}\boldsymbol{e}_{\parallel}+\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_2)\times\boldsymbol{e}_{\parallel}]\cdot\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{X}}$$

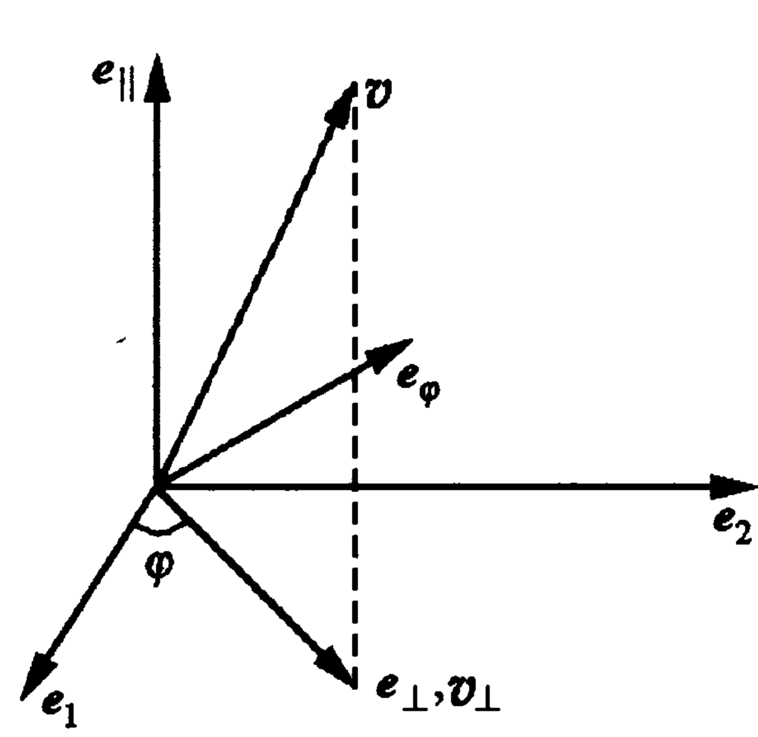


图 10.3 磁场、波矢的坐标图二

$$= -\frac{\partial}{\partial X_2}\boldsymbol{e}_1 + \frac{\partial}{\partial X_1}\boldsymbol{e}_2.$$

结果最后可得

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{v}} = \boldsymbol{v}\frac{\partial}{\partial \varepsilon} + \frac{\boldsymbol{v}_\perp}{B_0}\frac{\partial}{\partial \mu} + \frac{\boldsymbol{e}_\phi}{v_\perp}\frac{\partial}{\partial \phi} + \frac{(\overleftrightarrow{I} \times \boldsymbol{e}_\parallel)}{\omega_c} \cdot \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{X}}. \quad (10.21)$$

由此可把实验室坐标系中的零阶弗拉索夫算子 $\mathscr{L}_0$ 改写成导心系中的

$$\mathscr{L}_g = \frac{\partial}{\partial t} + \left(v_\parallel \frac{\partial}{\partial X_\parallel} + \boldsymbol{v}_\perp \cdot \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{X}_\perp}\right) + \boldsymbol{v} \times (\omega_c \boldsymbol{e}_\parallel) \cdot \left(\boldsymbol{e}_\phi \frac{1}{v_\perp}\frac{\partial}{\partial \phi} + \overleftrightarrow{I} \times \frac{\boldsymbol{e}_\parallel}{\omega_c} \cdot \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{X}}\right)$$
$$= \frac{\partial}{\partial t} + v_\parallel \frac{\partial}{\partial X_\parallel} - \omega_c \frac{\partial}{\partial \phi}.$$

10.2.2 零阶(平衡)导心速度分布函数的推导

这样零阶的弗拉索夫方程的平衡解就可以从下面的方程得出,

$$\mathscr{L}_0 f_{\alpha 0}(\boldsymbol{v}) \equiv \mathscr{L}_g f_{\alpha 0}^g(\boldsymbol{V}) = -\omega_c \frac{\partial}{\partial \phi} f_{\alpha 0}^g(\boldsymbol{V}) = 0, \quad (10.22)$$

其中考虑到了 $\partial/\partial t = 0$ 及等离子体是空间均匀的(因而和坐标 $\boldsymbol{r}$ 或 $\boldsymbol{X}$ 无关). 上面的方程表明平衡速度分布和速度空间变量 ϕ 无关,故满足此方程的解是

$$f_{\alpha 0}^g = f_{\alpha 0}^g(\varepsilon, \mu, \sigma), \quad 或 \quad f_{\alpha 0}^g = f_{\alpha 0}^g(v_\parallel, v_\perp). \quad (10.23)$$

最后,还应将速度空间的积分元变到导心系中

$$\int d\boldsymbol{v} = \int dv_\parallel dv_{\perp 1} dv_{\perp 2} = \sum_\sigma \int \frac{B_0 d\mu d\varepsilon d\phi}{|v_\parallel|}. \quad (10.24)$$

10.2.3 线性导心速度分布函数的求积和变回实验室坐标系

对静电波,导心系中的一阶线性弗拉索夫方程可以写成(下面略去了粒子种类的下标 α)

$$\mathscr{L}_g f_1^g = -\frac{q}{m}\boldsymbol{E}_1^g \cdot \frac{\partial f_0^g}{\partial \boldsymbol{V}}.$$

进一步令

$$\boldsymbol{E}_1^g = -\frac{\partial \phi_g(\boldsymbol{X})}{\partial \boldsymbol{X}},$$

就有

$$\mathscr{L}_g f_1^g = \frac{q}{m}\frac{\partial \phi_g(\boldsymbol{X})}{\partial \boldsymbol{X}} \cdot \left[v_\parallel \boldsymbol{e}_\parallel \frac{\partial}{\partial \varepsilon} + \boldsymbol{v}_\perp \left(\frac{\partial}{\partial \varepsilon} + \frac{1}{B_0}\frac{\partial}{\partial \mu}\right)\right] f_0^g$$
$$= \left[\frac{q}{m}\frac{\partial \phi_g}{\partial X_\parallel} v_\parallel \frac{\partial}{\partial \varepsilon} + \frac{q}{m}\boldsymbol{v}_\perp \cdot \frac{\partial \phi_g}{\partial \boldsymbol{X}}\left(\frac{\partial}{\partial \varepsilon} + \frac{1}{B_0}\frac{\partial}{\partial \mu}\right)\right] f_0^g,$$

其中 $\partial/\partial\phi$ 及 $\partial/\partial \boldsymbol{X}$ 作用到 f_0^g 上后均为零. 而且上式的最后一项还可以利用

$$\frac{\partial \phi_g(\boldsymbol{X})}{\partial \boldsymbol{v}} = \left(\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial \boldsymbol{v}} \cdot \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{V}} + \frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial \boldsymbol{v}} \cdot \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{X}}\right)\phi_g \equiv 0$$

来进一步简化. 将前面得出的导数变换式代入,上式可写作

$$\left[v_\parallel \boldsymbol{e}_\parallel \frac{\partial}{\partial \varepsilon} + v_\perp \boldsymbol{e}_\perp \left(\frac{\partial}{\partial \varepsilon} + \frac{1}{B_0}\frac{\partial}{\partial \mu}\right) + \frac{1}{v_\perp}\boldsymbol{e}_\phi \frac{\partial}{\partial \phi}\right]\phi_g$$
$$= -\frac{(\overleftrightarrow{I} \times \boldsymbol{e}_\parallel)}{\omega_c} \cdot \frac{\partial \phi_g}{\partial \boldsymbol{X}}.$$

将上式两边同时点乘 $\boldsymbol{v}_\perp \times \boldsymbol{e}_\parallel = v_\perp \boldsymbol{e}_\phi$ 后,经过一些运算,可直接得出

$$\boldsymbol{v}_\perp \cdot \frac{\partial \phi_g}{\partial \boldsymbol{X}} = -\omega_c \frac{\partial \phi_g}{\partial \phi}.$$

将它代回线性方程后,可得到

$$\mathscr{L}_g f_1^g = \frac{q}{m}\left[v_\parallel \frac{\partial \phi_g}{\partial X_\parallel}\frac{\partial}{\partial \varepsilon} - \omega_c \frac{\partial \phi_g}{\partial \phi}\left(\frac{\partial}{\partial \varepsilon} + \frac{1}{B_0}\frac{\partial}{\partial \mu}\right)\right] f_0^g$$

$$= \frac{q}{m}\left[\left(v_\parallel \frac{\partial}{\partial X_\parallel} - \omega_c \frac{\partial}{\partial \phi}\right)\phi_g \frac{\partial}{\partial \varepsilon} - \omega_c \frac{\partial \phi_g}{\partial \phi}\frac{1}{B_0}\frac{\partial}{\partial \mu}\right] f_0^g.$$

注意到

$$\mathscr{L}_g f_1^g = \left(\frac{\partial}{\partial t} + v_\parallel \frac{\partial}{\partial X_\parallel} - \omega_c \frac{\partial}{\partial \phi}\right) f_1^g,$$

所以可以合理地设上述方程的解有如下形式

$$f_1^g = \frac{q}{m}\phi^g \frac{\partial f_0^g}{\partial \varepsilon} + h^g. \tag{10.25}$$

其中 $f_0^g = f_0^g(\varepsilon, \mu, \sigma)$ 已知，而 $h^g(\boldsymbol{X}, \varepsilon, \mu, \sigma, \phi)$ 则是 $f_1^g(\boldsymbol{X}, \varepsilon, \mu, \sigma, \phi)$ 中的待求部分，满足微分方程

$$\mathscr{L}_g h^g = -\frac{q}{m}\frac{\partial \phi^g}{\partial t}\frac{\partial f_0^g}{\partial \varepsilon} - \frac{q}{m}\frac{\omega_c}{B_0}\frac{\partial \phi^g}{\partial \phi}\frac{\partial f_0^g}{\partial \mu}. \tag{10.26}$$

下面来给出对上述方程求积的过程. 考虑到 ϕ 是回旋角，故应有

$$h^g(\phi) = h^g(\phi + 2\pi), \quad \phi^g(\phi) = \phi^g(\phi + 2\pi).$$

于是可将 h^g 和 ϕ^g 用 ϕ 作傅氏级数展开

$$h^g(\boldsymbol{X}, \varepsilon, \mu, \sigma, \phi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_n^g(\boldsymbol{X}, \varepsilon, \mu, \sigma) e^{-in\phi},$$

$$\phi^g(\boldsymbol{X}, \phi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \phi_n^g(\boldsymbol{X}) e^{-in\phi}.$$

把上述展开式代入 h^g 的线性方程，得

$$\mathscr{L}_{gn} h_n^g \equiv \left(\frac{\partial}{\partial t} + v_\parallel \frac{\partial}{\partial X_\parallel} + in\omega_c\right) h_n^g$$

$$= -\frac{q}{m}\left(\frac{\partial \phi_n^g}{\partial t}\frac{\partial f_0^g}{\partial \varepsilon} - in\omega_c \frac{\phi_n^g}{B_0}\frac{\partial f_0^g}{\partial \mu}\right).$$

现在方程只是关于时间和空间的微分方程，已经与速度 $\boldsymbol{v}$ 无关，因此可以通过作(导心系的)拉氏、傅氏变换 $\exp(i\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{X} - i\omega t)$ 来解. 在作拉氏、傅氏变换变换后，上述方程变成

$$(-i\omega + ik_\parallel v_\parallel + in\omega_c) h_{nk}^g = -\frac{q}{m}\left(-i\omega \frac{\partial f_0^g}{\partial \varepsilon} - in\omega_c \frac{1}{B_0}\frac{\partial f_0^g}{\partial \mu}\right)\phi_{nk}^g.$$

由上式直接可得出线性弗拉索夫方程的解

$$h_{nk}^g = -\frac{q}{m}\frac{\omega \dfrac{\partial f_0^g}{\partial \varepsilon} + n\omega_c \dfrac{1}{B_0}\dfrac{\partial f_0^g}{\partial \mu}}{\omega - n\omega_c - k_\parallel v_\parallel}\phi_{nk}^g. \tag{10.27}$$

按定义

$$h_k^g = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_{nk}^g e^{-in\phi}, \quad \phi_k^g = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \phi_{nk}^g e^{-in\phi},$$

故通过比较可得

$$f_k^g = \frac{q}{m}\phi_k^g \frac{\partial f_0^g}{\partial \varepsilon} + h_k^g.$$

这解和无外场时的静电波解很相似，而且推导过程中也没有硬解微分方程；不同的只是目前的 f_k^g 是在导心系中的线性扰动速度分布. 由于将要代入的泊松方程是写在实验室坐标系中的，故在这以前先需要把 f_k^g 变回成实验室坐标中的 f_k. 对比在实验室坐标系和在导心系中的两个拉氏、傅氏变换

$$A(t, \boldsymbol{r}) = \int \frac{d\omega}{2\pi}\int d\boldsymbol{k} A(\omega, \boldsymbol{k}) e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega t)},$$

$$A^g(t, \boldsymbol{X}) = \int \frac{d\omega}{2\pi}\int d\boldsymbol{k} A^g(\omega, \boldsymbol{k}) e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{X} - \omega t)},$$

考虑到 $A(t, \boldsymbol{r}) \equiv A^g(t, \boldsymbol{X})$，可知一定有

$$A(\omega, \boldsymbol{k}) e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} = A^g(\omega, \boldsymbol{k}) e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{X}}, \implies A(\omega, \boldsymbol{k}) = A^g(\omega, \boldsymbol{k}) e^{iL_k},$$

$$L_k = \boldsymbol{k} \cdot \frac{\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{e}_\parallel}{\omega_c}, \tag{10.28}$$

其中用到了导心位置 $\boldsymbol{X}$ 和粒子位置 $\boldsymbol{r}$ 间的变换关系.

如果进一步取如图 10.4 的 $\boldsymbol{k}$ 坐标系

$$\boldsymbol{k} = k_\perp \boldsymbol{e}_1 + k_\parallel \boldsymbol{e}_\parallel,$$

则有

$$L_k = \frac{k_\perp v_\perp}{\omega_c}\sin\phi.$$

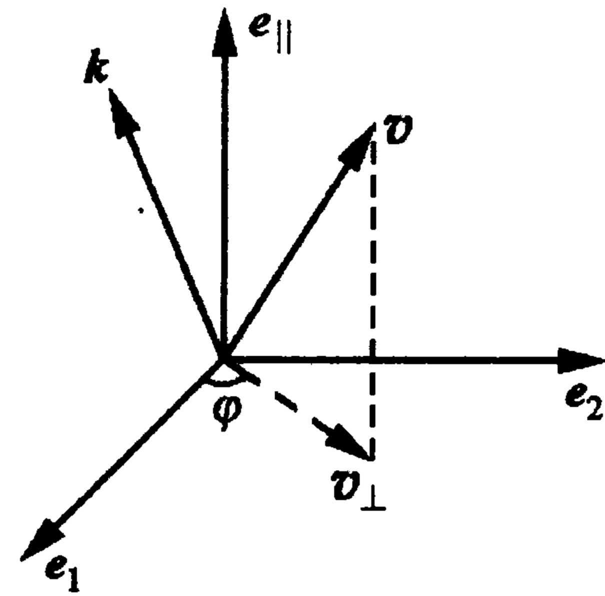


图 10.4　速度、波矢的坐标图

最后得

$$f_{\alpha k} \equiv f^{g}_{\alpha k} e^{iL_k}$$

$$= \frac{q_\alpha}{m_\alpha}\phi^g_k e^{iL_k}\frac{\partial f^g_{\alpha 0}}{\partial \varepsilon} + \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(-\frac{q}{m}\right)\frac{\omega\frac{\partial f^g_{\alpha 0}}{\partial \varepsilon} + \frac{n\omega_c}{B_0}\frac{\partial f^g_{\alpha 0}}{\partial \mu}}{\omega - n\omega_c - k_\parallel v_\parallel}\phi^g_{nk}e^{-in\phi}e^{iL_k}$$

$$= \frac{q_\alpha}{m_\alpha}\phi_k \frac{\partial f^g_{\alpha 0}}{\partial \varepsilon} + \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(-\frac{q}{m}\right)\frac{\omega\frac{\partial f^g_{\alpha 0}}{\partial \varepsilon} + \frac{n\omega_c}{B_0}\frac{\partial f^g_{\alpha 0}}{\partial \mu}}{\omega - n\omega_c - k_\parallel v_\parallel}\phi^g_{nk}e^{-in\phi}e^{iL_k}.$$

为了把最后一项求和号中的 ϕ^g_{nk}变成实验室坐标系中的 ϕ_k，通过比较

$$\phi^g_k = \phi_k e^{-iL_k} = \phi_k e^{-i\lambda\sin\phi} = \phi_k\sum_n J_n(\lambda)e^{-in\phi} = \sum_n \phi_k J_n(\lambda)e^{-in\phi}$$

和

$$\phi^g_k \equiv \sum_n \phi^g_{nk}e^{-in\phi}$$

后，可知

$$\phi^g_{nk} = \phi_k J_n(\lambda), \quad \lambda = \frac{k_\perp v_\perp}{\omega_c}. \tag{10.29}$$

将这变换式代入表达 $f_{\alpha k}$的前式，就得出了实验室坐标系中的线性扰动速度分布函数的傅氏分量表达式

$$f_{\alpha k} = \frac{q_\alpha}{m_\alpha}\phi_k\left(\frac{\partial f^g_{\alpha 0}}{\partial \varepsilon} - \sum_{n,l=-\infty}^{\infty}\frac{\omega\frac{\partial f^g_{\alpha 0}}{\partial \varepsilon} + \frac{n\omega_c}{B_0}\frac{\partial f^g_{\alpha 0}}{\partial \mu}}{\omega - n\omega_c - k_\parallel v_\parallel}J_n(\lambda)J_l(\lambda)e^{i(l-n)\phi}\right). \tag{10.30}$$

由此可见 $f_{\alpha k} \equiv f_{\alpha k}(\varepsilon,\mu,\sigma,\phi,\boldsymbol{X}) \propto \phi_k$.

10.2.4　泊松方程的解——静电波色散方程

将式(10.30)代入实验室坐标系中的泊松方程，得

$$k^2\phi_k = 4\pi\sum_\alpha n_{\alpha 0}q_\alpha\int f_{\alpha k}d\boldsymbol{v}$$

$$= 4\pi\sum_\alpha n_{\alpha 0}q_\alpha\sum_\sigma\int f_{\alpha k}\frac{B_0}{|v_\parallel|}d\varepsilon d\mu d\phi$$

$$= \phi_k\sum_\alpha\frac{4\pi n_{\alpha 0}q^2_\alpha}{m_\alpha}\sum_\sigma\int\frac{B_0}{|v_\parallel|}d\varepsilon d\mu 2\pi$$

$$\cdot\left[\frac{\partial f^g_{\alpha 0}}{\partial \varepsilon} - \sum_{n,l=-\infty}^{\infty}\frac{\omega\frac{\partial f^g_{\alpha 0}}{\partial \varepsilon} + \frac{n\omega_c}{B_0}\frac{\partial f^g_{\alpha 0}}{\partial \mu}}{\omega - n\omega_{\alpha c} - k_\parallel v_\parallel}J_n(\lambda)J_l(\lambda)\frac{1}{2\pi}\int e^{i(l-n)\phi}d\phi\right].$$

考虑到

$$\frac{1}{2\pi}\int e^{i(l-n)\phi}d\phi = \delta_{l,n},$$

可以直接得出色散方程(即泊松方程存在非平凡解的条件)

$$1 + \sum_\alpha \chi_\alpha = 0,$$

$$\chi_\alpha = 2\pi\frac{\omega^2_{p\alpha}}{k^2}\sum_\sigma\int\frac{B_0 d\varepsilon d\mu}{|v_\parallel|}\sum_n J^2_n(\lambda)\frac{(k_\parallel v_\parallel + n\omega_{\alpha c})\frac{\partial}{\partial \varepsilon} + \frac{n\omega_c}{B_0}\frac{\partial}{\partial \mu}}{\omega - n\omega_{\alpha c} - k_\parallel v_\parallel}f^g_{\alpha 0}. \tag{10.31}$$

一般情况下，$f_{\alpha 0}$是在实验室坐标系中给出的，故把上式中的积分号下各项从导心系变换到实验室坐标系中去是有实用价值的. 考虑到

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{V}} = \boldsymbol{e}_\parallel\frac{\partial}{\partial v_\parallel} + \boldsymbol{e}_\perp\frac{\partial}{\partial v_\perp} + \boldsymbol{e}_\phi\frac{1}{v_\perp}\frac{\partial}{\partial \phi} \quad \text{(实验室坐标系)}$$

$$= \boldsymbol{e}_\parallel v_\parallel\frac{\partial}{\partial \varepsilon} + \boldsymbol{e}_\perp v_\perp\left(\frac{\partial}{\partial \varepsilon} + \frac{1}{B_0}\frac{\partial}{\partial \mu}\right)$$

$$+ \boldsymbol{e}_\phi\frac{1}{v_\perp}\frac{\partial}{\partial \phi}. \quad \text{(导心坐标系)}$$

故可以看出

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon} = \frac{1}{v_\parallel}\frac{\partial}{\partial v_\parallel}, \quad \frac{1}{B_0}\frac{\partial}{\partial \mu} = \frac{1}{v_\perp}\frac{\partial}{\partial v_\perp} - \frac{1}{v_\parallel}\frac{\partial}{\partial v_\parallel}.$$

将它们代入式(10.31)后，再把积分变量及 $f^g_{\alpha 0}$变回实验室坐标系，可得

$$\chi_\alpha = 2\pi\frac{\omega^2_{p\alpha}}{k^2}\int_{-\infty}^{\infty}dv_\parallel\int_0^\infty v_\perp dv_\perp\sum_n J^2_n\left(\frac{k_\perp v_\perp}{\omega_{\alpha c}}\right)$$

$$\times \frac{k_{\parallel}\dfrac{\partial}{\partial v_{\parallel}}+\dfrac{n\omega_{\alpha c}}{v_{\perp}}\dfrac{\partial}{\partial v_{\perp}}}{\omega - n\omega_{\alpha c} - k_{\parallel}v_{\parallel}} f_{\alpha 0}(v_{\parallel}, v_{\perp}). \tag{10.32}$$

当 $\lambda = k_{\perp}v_{\perp}/\omega_{\alpha c} = k_{\perp}r_{\alpha c} = 0$ 时，$J_0(0)=1$，$J_{n\neq 0}(0)=0$，上式就自然回到了无磁场静电波的极化率

$$\chi_{\alpha} = \frac{\omega_{p\alpha}^2}{k^2}\int \mathrm{d}\boldsymbol{v}\, \frac{k_{\parallel}\dfrac{\partial}{\partial v_{\parallel}} f_{\alpha 0}}{\omega - k_{\parallel}v_{\parallel}}.$$

10.2.5 准静电模和准电磁模近似及它们的耦合机制

由于磁场所造成的粒子拉莫尔运动，使得本征模中的静电(纵)波($\boldsymbol{E}_1 \parallel \boldsymbol{k}$)和电磁(横)波($\boldsymbol{E}_1 \perp \boldsymbol{k}$)是相互耦合的，但在很多情况中，可以用准静电模式或准电磁模式来近似地描述磁化等离子体中的集体运动(波). 下面就来给出它们各自适用的条件.

由色散方程可以得出一个等价的标量方程：

$$\overset{\leftrightarrow}{D}\cdot \boldsymbol{E}_k = 0, \implies \boldsymbol{E}_k^* \cdot \overset{\leftrightarrow}{D}\cdot \boldsymbol{E}_k = 0, \tag{10.33}$$

其中 $\boldsymbol{E}_k^*$ 是电场矢量的复共轭. 将扰动电场分解成纵向和横向(平行及垂直于 $\boldsymbol{k}$ 的方向)两部分

$$\boldsymbol{E}_k = E_{kl}\boldsymbol{e}_l + E_{kt}\boldsymbol{e}_t, \quad \boldsymbol{k} = k\boldsymbol{e}_l, \quad \boldsymbol{e}_t\cdot \boldsymbol{e}_l = 0,$$

并代入

$$\overset{\leftrightarrow}{D} = \boldsymbol{kk} - k^2\overset{\leftrightarrow}{I} + \frac{\omega^2}{c^2}\overset{\leftrightarrow}{\varepsilon}.$$

考虑到 E_{kl}^* 和 E_{kt}^* 是彼此独立的，故由方程(10.33)可以得出两个耦合的色散方程

$$\varepsilon_{ll}E_{kl} + \varepsilon_{lt}E_{kt} = 0, \tag{10.34}$$

$$(N^2 - \varepsilon_{tt})E_{kt} - \varepsilon_{tl}E_{kl} = 0, \quad N^2 = \frac{c^2k^2}{\omega^2}. \tag{10.35}$$

现在来推导准静电波近似得以成立的条件. 这时取

$$E_{kt} \approx 0, \quad \omega = \omega_l + \delta\omega_l, \quad \delta\omega_l \ll \omega_l,$$

从而由(10.34)式并通过泰勒展开可以有

$$\varepsilon_{ll}(\omega_l) = 0, \implies \varepsilon_{ll}(\omega_l + \delta\omega_l) = \varepsilon_{ll}(\omega_l) + \delta\omega_l \frac{\partial}{\partial \omega_l}\varepsilon_{ll}(\omega_l)$$
$$= \delta\omega_l \frac{\partial}{\partial \omega_l}\varepsilon_{ll}(\omega_l).$$

代回纵波色散方程(10.34)后，得

$$\delta\omega_l \frac{\partial}{\partial \omega_l}\varepsilon_{ll}(\omega_l)E_{kl} + \varepsilon_{lt}E_{kt} = 0.$$

另一方面，由横波的色散方程(10.35)可近似得(和 ω_l 相比略去 $\delta\omega_l$ 小量)

$$E_{kt} = \frac{\varepsilon_{tl}(\omega_l)}{N^2(\omega_l) - \varepsilon_{tt}(\omega_l)}E_{kl}.$$

将它代入前式，为了方便再加上一个零项(下式中的第一项)，得

$$\frac{\delta\omega_l}{\omega_l}\varepsilon_{ll}(\omega_l) + \delta\omega_l\frac{\partial}{\partial \omega_l}\varepsilon_{ll}(\omega_l) + \frac{\varepsilon_{lt}(\omega_l)\varepsilon_{tl}(\omega_l)}{N^2(\omega_l) - \varepsilon_{tt}(\omega_l)} = 0.$$

于是有

$$\frac{\delta\omega_l}{\omega_l}\frac{\partial}{\partial \omega_l}(\varepsilon_{ll}(\omega_l)\omega_l) = -\left[\frac{\varepsilon_{lt}\varepsilon_{tl}}{N^2 - \varepsilon_{tt}}\right]_{\omega_l}.$$

由于 $\delta\omega_l \ll \omega_l$，因此可以得出静电模近似成立的条件

$$-\left[\frac{\varepsilon_{lt}\varepsilon_{tl}}{(N^2 - \varepsilon_{tt})\dfrac{\partial}{\partial \omega}(\varepsilon_{ll}\omega)}\right]_{\omega_l} \ll 1. \tag{10.36}$$

同样，对横向(电磁)模近似则可以取

$$E_{kl} \approx 0, \quad \omega = \omega_t + \delta\omega_t, \quad \delta\omega_t \ll \omega_t.$$

按相同的方法，可证准电磁模近似成立时所要满足的条件

$$\left[\frac{\varepsilon_{lt}\varepsilon_{tl}}{\varepsilon_{ll}\dfrac{\partial (N^2 - \varepsilon_{tt})\omega}{\partial \omega}}\right]_{\omega_t} \ll 1. \tag{10.37}$$

最后，应当注意到

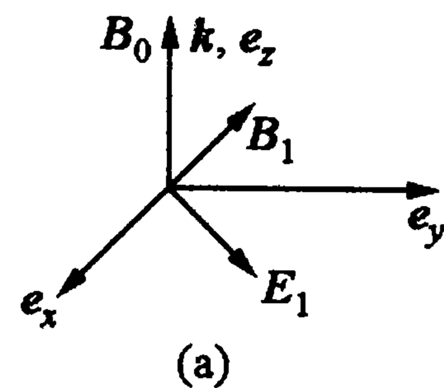
$$\varepsilon_{lt} = \boldsymbol{e}_l \cdot \left(\frac{\mathrm{i}4\pi}{\omega}\overset{\leftrightarrow}{\sigma}\right)\cdot \frac{\boldsymbol{E}_{kt}}{E_{kt}},$$

$$\varepsilon_{\mathrm{tl}} = \boldsymbol{e}_{\mathrm{t}} \cdot \left(\frac{\mathrm{i}4\pi \overleftrightarrow{\sigma}}{\omega}\right) \cdot \frac{\boldsymbol{E}_{kl}}{E_{kl}}.$$

这说明，静电模和电磁模间的耦合来自扰动电流：由一个模引起的扰动电流在投影到另一个模的极化方向上去时有非零分量(这是因为电导张量 $\overleftrightarrow{\sigma}$ 有非零的非对角元素)。例如，$\sigma_{\mathrm{lt}} \neq 0$ 因而 $\varepsilon_{\mathrm{lt}} \neq 0$ 表示电磁扰动引起的扰动电流 $\boldsymbol{j}_1$ 在静电波的极化(也即传播)方向上有投影：$\boldsymbol{j}_1 \cdot \boldsymbol{k} = \boldsymbol{j}_1 \cdot k\boldsymbol{e}_{\mathrm{l}} \neq 0$，因而进一步引起 $\boldsymbol{k}$ 方向上的电荷密度扰动，从而产生空间的电荷振荡以至于静电波.

10.3　平行于磁场方向传播的电磁波

10.3.1　左旋波和右旋波色散关系



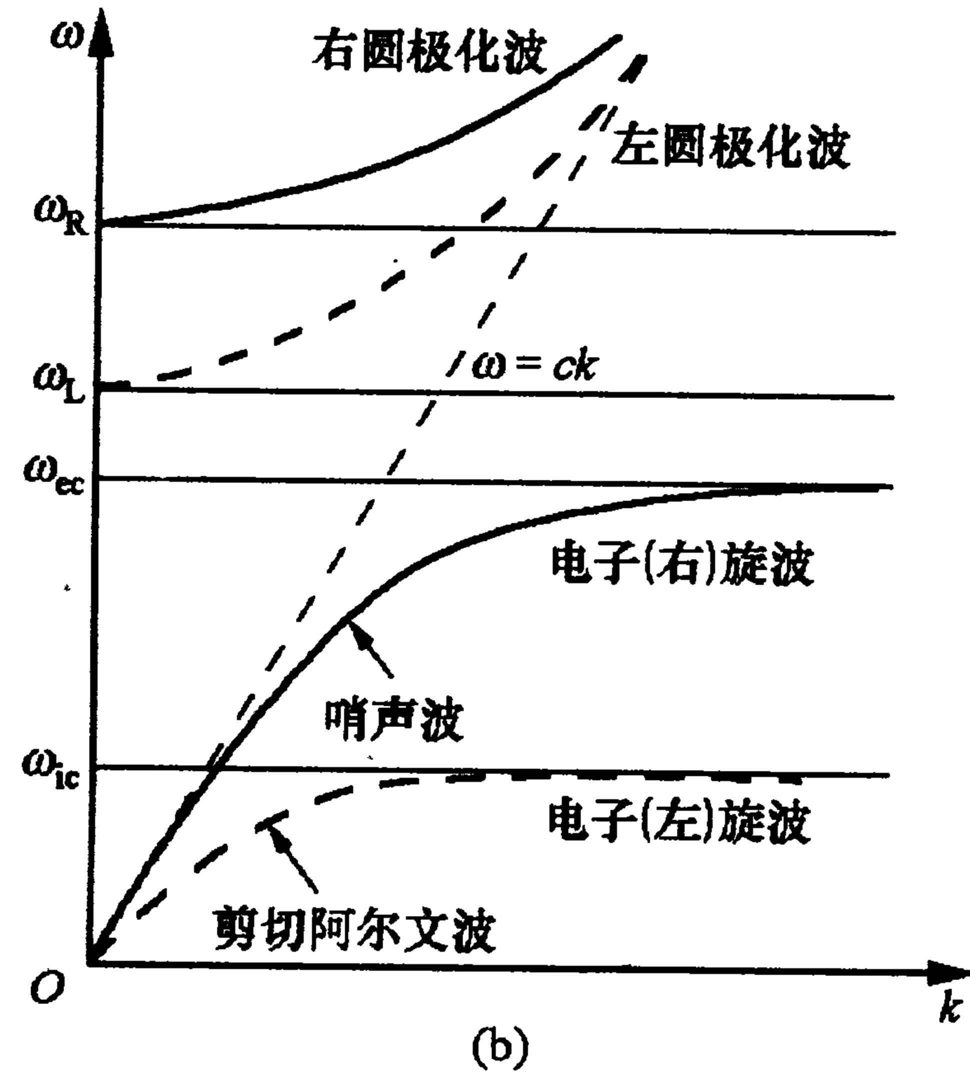


图 10.5　左旋波和右旋波图示(流体描述).
(a) 坐标系，(b) 色散关系

这时，令(图 10.5(a))

$$\boldsymbol{k} \parallel \boldsymbol{B}_0(B_0\boldsymbol{e}_z), \quad k_\perp = 0.$$

按流体理论，这时存在两支本征模：左旋波和右旋波(见图 10.5(b)). 应当指出的是，在磁化等离子体中左、右旋是相对于磁场方向而言的. 离子在磁场中是左旋的，电磁波中电场(也即极化)的旋转方向和离子旋转方向一致的波被称为左旋波；而电场(也即极化)的旋转方向和电子旋转方向一致的波被称为右旋(电磁)波. 在动理学理论中，左、右旋本征模是由下面的色散方程来描述的：

$$\begin{bmatrix} D_{xx} & D_{xy} \\ D_{yx} & D_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} = 0.$$

色散函数中涉及的无穷求和现在可以大大简化：因为 $k_\perp = 0$，故其中贝塞尔函数的宗量 $x = k_\perp v_\perp / \omega_c \ll 1$，利用微扰展开式，取

$$\mathrm{J}_n(x) = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ \pm \dfrac{x}{2}, & n = \pm 1, \\ 0, & n = \text{其他}, \end{cases}$$

$$\mathrm{J}_n' = \frac{1}{2}(\mathrm{J}_{n-1} - \mathrm{J}_{n+1}) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}, & n = 1, \\ -\dfrac{1}{2}, & n = -1, \\ 0, & n = \text{其他}. \end{cases}$$

将它们代入色散函数后有

$$\begin{aligned} D_{xx} &= 1 - \frac{k_\parallel^2 c^2}{\omega^2} - \frac{2\pi}{\omega} \sum_\alpha \left(\frac{\omega_{\mathrm{p}}^2}{\omega_{\mathrm{c}}}\right) \sum_{\alpha l = \pm 1} \left[\!\left[\omega_{\alpha c} \left(\frac{l\omega_{\alpha c} \mathrm{J}_l}{k_\perp}\right)^2 \hat{\chi}_\alpha \right]\!\right] \\ &= 1 - \frac{k_\parallel^2 c^2}{\omega^2} - \frac{2\pi}{\omega} \sum_\alpha \omega_{\mathrm{p}\alpha}^2 \left(\left[\!\left[\frac{1}{4} v_\perp^2 \hat{\chi}_\alpha \right]\!\right]_+ + \left[\!\left[\frac{1}{4} v_\perp^2 \hat{\chi}_\alpha \right]\!\right]_- \right) \\ &= 1 - \frac{k_\parallel^2 c^2}{\omega^2} + d_+ + d_-, \end{aligned}$$

其中

$$[\![\cdots]\!]_\pm = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}v_\parallel \int_0^\infty \frac{2v_\perp [\cdots]}{k_\parallel v_\parallel \pm \omega_{\alpha c} - \omega} \mathrm{d}v_\perp,$$

$$\begin{aligned} D_{xy} &= \mathrm{i}\left(-\frac{2\pi}{\omega}\right) \sum_\alpha \left(\frac{\omega_{\mathrm{p}}^2}{\omega_{\mathrm{c}}}\right) \sum_{\alpha l = \pm 1} \left[\!\left[\frac{l\omega_{\alpha c}^2 v_\perp}{k_\perp} \mathrm{J}_l \mathrm{J}_l' \hat{\chi}_\alpha \right]\!\right] \\ &= \mathrm{i}\left(-\frac{2\pi}{\omega}\right) \sum_\alpha \omega_{\mathrm{p}\alpha}^2 \left(\left[\!\left[\frac{1}{4} v_\perp^2 \hat{\chi}_\alpha \right]\!\right]_+ - \left[\!\left[\frac{1}{4} v_\perp^2 \hat{\chi}_\alpha \right]\!\right]_- \right) \\ &= \mathrm{i}(d_+ - d_-), \end{aligned}$$

$$D_{yx} = -D_{xy} = -\mathrm{i}(d_+ - d_-),$$

$$D_{yy} = 1 - \frac{k_\parallel^2 c^2}{\omega^2} - \frac{2\pi}{\omega} \sum_\alpha \sum_{l = \pm 1} \left(\frac{\omega_{\mathrm{p}}^2}{\omega_{\mathrm{c}}}\right)_\alpha [\omega_{\alpha c} (\mathrm{J}_l')^2 v_\perp^2 \hat{\chi}_\alpha]$$

$$=1-\frac{k_{\parallel}^2c^2}{\omega^2}-\frac{2\pi}{\omega}\sum_\alpha\omega_{p\alpha}^2\left(\left[\!\left[\frac{1}{4}v_\perp^2\hat{\chi}_\alpha\right]\!\right]_+ +\left[\!\left[\frac{1}{4}v_\perp^2\hat{\chi}_\alpha\right]\!\right]_-\right)$$

$$=1-\frac{k_{\parallel}^2c^2}{\omega^2}+d_+ + d_-.$$

把本小节开头矩阵形式的色散方程乘开,得

$$D_{xx}E_{kx}+D_{xy}E_{ky}=0,$$
$$D_{yx}E_{kx}+D_{yy}E_{ky}=0.$$

若将线极化的电场 E_{kx},E_{ky}重新组合成左、右圆极化的电场

$$E_L=(E_{kx}+iE_{ky}),\quad E_R=(E_{kx}-iE_{ky}).$$

则上述色散方程可以写成如下的易解形式

$$(1-N_\parallel^2+2d_+)E_L+(1-N_\parallel^2+2d_-)E_R=0,$$
$$(1-N_\parallel^2+2d_+)E_L-(1-N_\parallel^2+2d_-)E_R=0.$$

将两方程相加,得左旋波的色散关系 $D_+\equiv(1-N_\parallel^2+2d_+)=0$,即

$$\omega_L^2=k_\parallel^2c^2+2\pi\omega_L\sum_\alpha\omega_{p\alpha}^2\int dv_\parallel\int\frac{\hat{\chi}_\alpha v_\perp^3 dv_\perp}{k_\parallel v_\parallel+\omega_{\alpha c}-\omega_L}. \tag{10.38}$$

将两方程相减,得右旋波的色散关系 $D_-\equiv(1-N_\parallel^2+2d_-)=0$,即

$$\omega_R^2=k_\parallel^2c^2+2\pi\omega_R\sum_\alpha\omega_{p\alpha}^2\int dv_\parallel\int\frac{\hat{\chi}_\alpha v_\perp^3 dv_\perp}{k_\parallel v_\parallel-\omega_{\alpha c}-\omega_R}. \tag{10.39}$$

在流体极限下,这两支波分别回到无阻尼的左、右旋波.但在这里,由于波-粒子在 $\omega\pm\omega_{\alpha c}=k_\parallel v_\parallel$ 处的回旋共振相互作用,因而有回旋阻尼效应出现.从回旋频率的定义 $\omega_{\alpha c}=q_\alpha B_0/(m_\alpha c)$ 可知,它的符号依赖于粒子电荷的符号.故对离子,其 $\omega_{ic}>0$;而对电子,$\omega_{ec}<0$.这样对于离子只有左旋波才能与之共振 $\omega_{L(+)}-\omega_{ic}=k_\parallel v_\parallel$,而对于电子只有右旋波才能与之共振 $\omega_{R(-)}+\omega_{ec}=\omega_{R(-)}-|\omega_{ec}|=k_\parallel v_\parallel$.从物理上来看,在磁场中带电粒子的运动总是逆磁的——即由于其旋转而产生的感生磁场应当和原来磁场的方向相反,故离子是(相对于磁场方向)左旋的,而电子是右旋的;只有其旋转方向和波电场极化的旋转方向一致的时候,粒子和波之间才能发生共振.

为了估算回旋共振而引起的阻尼效应,利用

$$\frac{1}{k_\parallel v_\parallel\pm\omega_{\alpha c}-\omega_r-i\gamma}=\frac{\mathscr{P}}{k_\parallel v_\parallel\pm\omega_{\alpha c}-\omega_r}+i\frac{\pi}{|k_\parallel|}\delta(v_\parallel\pm\omega_{\alpha c}-\omega_r),$$

再假定 $f_{\alpha 0}$是各向同性的,则

$$\hat{\chi}_\alpha=\left(1-\frac{k_\parallel v_\parallel}{\omega}\right)\frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial v_\perp^2}+\frac{k_\parallel v_\parallel}{\omega}\frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial v_\parallel^2}=\frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial v_\perp^2};$$

加之

$$\int_0^\infty v_\perp^2\frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial v_\perp^2}v_\perp dv_\perp=\frac{1}{2}\left(v_\perp^2 f_{\alpha 0}\Big|_0^\infty-\int_0^\infty f_{\alpha 0}dv_\perp^2\right)=-\int f_{\alpha 0}v_\perp dv_\perp,$$

于是色散函数的实部为

$$D_{\pm r}=1-\frac{k_\parallel^2c^2}{\omega_{\pm r}^2}+\frac{1}{\omega_{\pm r}}\sum_\alpha 2\pi\omega_{p\alpha}^2\mathscr{P}\int\frac{v_\perp f_{\alpha 0}dv_\parallel dv_\perp}{k_\parallel v_\parallel-\omega_r\pm\omega_{\alpha c}}.$$

由此可得左、右旋波的色散关系(从 $D_{\pm r}=0$):

$$\omega_{\pm r}^2=k^2c^2+\omega_{\pm r}\sum_\alpha 2\pi\omega_{p\alpha}^2\mathscr{P}\int\frac{v_\perp f_{\alpha 0}dv_\parallel dv_\perp}{k_\parallel v_\parallel-\omega_r\pm\omega_{\alpha c}}. \tag{10.40}$$

其相应的阻尼(或不稳定增长)率为

$$\gamma_\pm=-\frac{D_i}{\partial D_r/\partial\omega_r}\bigg|_\pm=-\frac{\omega_r D_i}{\partial(\omega_r D_r)/\partial\omega_r}\bigg|_\pm,$$

$$D_{\pm i}=\frac{2\pi^2}{\omega_{\pm r}}\sum_\alpha\frac{\omega_{p\alpha}^2}{|k_\parallel|}\int_0^\infty v_\perp f_{\alpha 0}\left(v_\perp^2,\left(\frac{\omega_{\pm r}\mp\omega_{\alpha c}}{k_\parallel}\right)^2\right)dv_\perp. \tag{10.41}$$

这样,对热平衡的麦克斯韦分布 $f_{\alpha 0}(v^2)$来说,上式中的积分总是正的,故 $D_{\pm i}>0$,于是有 $\gamma_\pm<0$.这时,左、右回旋波总是经受着朗道回旋阻尼的.

10.3.2 哨声波(低频电子右旋波)不稳定性

这是一种由于速度空间各向异性所引起的不稳定性.由右旋波色散关系

$$\omega_R^2 = k_\parallel^2 c^2 + 2\pi\omega_R \sum_\alpha \omega_{p\alpha}^2 \int dv_\parallel \int \frac{\hat{\chi}_\alpha v_\perp^3 \, dv_\perp}{k_\parallel v_\parallel - \omega_{\alpha c} - \omega_R},$$

考虑到 $\omega_{pe}^2 \gg \omega_{pi}^2$，所以在求和中可以只取电子分量. 然后令 $\boldsymbol{B}_0 = B_0\boldsymbol{e}_z, \boldsymbol{k} = k\boldsymbol{e}_z (k = k_\parallel)$ 以及

$$f_{e0}(\boldsymbol{v}) = \delta(v_\parallel) f_M(v_\perp^2), \quad f_M(v_\perp^2) = \frac{m}{2\pi T}\exp\left(-\frac{m}{2T}v_\perp^2\right),$$

则有

$$\omega^2 = k^2c^2 + 2\pi\omega\omega_{pe}^2 \int dv_\parallel \int v_\perp^3 \, dv_\perp \frac{\hat{\chi}_e}{k_\parallel v_\parallel - \omega_e - \omega}.$$

其中

$$\hat{\chi}_e = \left(1 - \frac{k_\parallel v_\parallel}{\omega}\right)\frac{\partial f_{e0}}{\partial v_\perp^2} + \frac{k_\parallel v_\parallel}{\omega}\frac{\partial f_{e0}}{\partial v_\parallel^2}$$
$$= \left(1 - \frac{k_\parallel v_\parallel}{\omega}\right)\delta(v_\parallel)\frac{\partial f_M(v_\perp^2)}{\partial v_\perp^2} + \frac{k_\parallel}{2\omega}\frac{\partial \delta(v_\parallel)}{\partial v_\parallel} f_M(v_\perp^2),$$

将它们代入上式的积分中后利用

$$\int_0^\infty f_M(v_\perp^2) dv_\perp^2 = \frac{1}{\pi}, \quad \int_0^\infty f_M(v_\perp^2) v_\perp^2 \, dv_\perp^2 = \frac{2T}{m\pi},$$

则积分可解析求出

$$\int dv_\parallel \int v_\perp^3 \, dv_\perp \frac{\hat{\chi}_e}{k_\parallel v_\parallel - \omega_e - \omega}$$
$$= \frac{1}{2}\left[\int dv_\parallel v_\perp^2 \, dv_\perp^2 \frac{(1 - k_\parallel v_\parallel/\omega)\delta(v_\parallel)}{k_\parallel v_\parallel - \omega_e - \omega}\frac{\partial f_M}{\partial v_\perp^2} + \frac{k_\parallel}{2\omega}\int dv_\parallel \frac{\delta'(v_\parallel)}{k_\parallel v_\parallel - \omega_e - \omega}\int f_M(v_\perp^2) v_\perp^2 \, dv_\perp^2\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\omega_e + \omega}\int f_M(v_\perp^2) dv_\perp^2 + \frac{k_\parallel}{2\omega}\int v_\perp^2 \, dv_\perp^2 \, f_M \frac{k_\parallel}{(\omega_e + \omega)^2}\right]$$
$$= \frac{1}{2\pi(\omega + \omega_e)}\left[1 + \frac{k^2 v_{T\perp}^2}{2\omega(\omega + \omega_e)}\right], \quad v_{T\perp}^2 = \frac{2T}{m}.$$

最后，可得色散方程

$$\omega^2 = k^2c^2 + \frac{\omega\omega_{pe}^2}{\omega + \omega_e}\left[1 + \frac{k^2 v_{T\perp}^2}{2\omega(\omega + \omega_e)}\right]. \tag{10.42}$$

下面分别讨论在 k 的两个极端取值情况下此波的性质. 当取

$k \to 0, \omega \ll \omega_e$ 的低频长波极限时，色散关系简化成

$$\omega_r^2 \approx k^2c^2 + \frac{\omega_r \omega_{pe}^2}{\omega_e}, \quad \Longrightarrow \quad \omega_r^2 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_e}\omega_r - k^2c^2 = 0.$$

有解

$$\omega_r = \frac{\omega_{pe}^2}{2\omega_e}\left[1 \pm \sqrt{1 + \frac{4k^2c^2\omega_e^2}{\omega_{pe}^4}}\right]$$
$$\approx \frac{\omega_{pe}^2}{2\omega_e}\left[1 \pm \left(1 + \frac{2k^2c^2\omega_e^2}{\omega_{pe}^4}\right)\right].$$

考虑到 $\omega_e < 0$，可略去上式中的负根 ω_{r+}，结果得到低频电子右旋波的色散关系

$$\omega = \omega_{r-} = \frac{k^2c^2}{\omega_{pe}^2}|\omega_e|. \tag{10.43}$$

这也就是流体描述中的哨声模. 在 $k \to \infty$ 的极限情况下，可以最方便地看出不稳定增长率. 这时，色散方程变成

$$k^2c^2 + \frac{k^2 v_{T\perp}^2 \omega_{pe}^2}{2(\omega + \omega_e)^2} = 0, \quad \Longrightarrow \quad \omega + \omega_e = \pm\, i\,\frac{v_{T\perp}\omega_{pe}}{\sqrt{2}\,c}.$$

这表明波的实部和不稳定增长率(虚部)分别为

$$\omega_r = -\omega_e, \quad \gamma = \frac{v_{T\perp}\omega_{pe}}{\sqrt{2}\,c}. \tag{10.44}$$

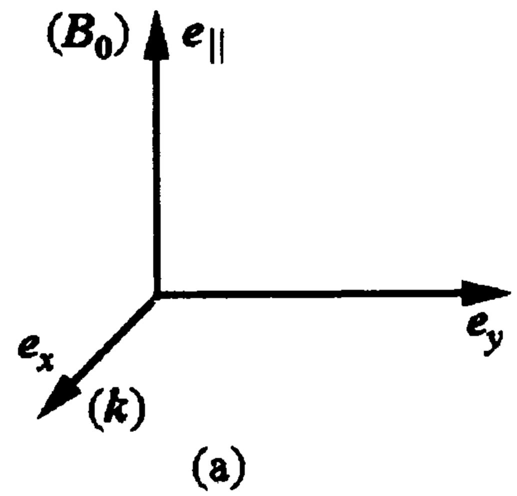
这个增长率和无磁场下的 Weibel 不稳定增长率 $\gamma_M(k \to \infty) = \frac{\sqrt{\langle v_{ex}\rangle^2}\omega_{pe}}{c}$ 相同，因此可以当成 Weibel 不稳定性在磁化等离子体中的推广.

10.4 垂直于磁场方向传播的电磁波

10.4.1 一般性讨论

对于垂直于磁场方向传播的电磁波情况，令(见图 10.6(a))

$$\boldsymbol{B}_0 = B_0\boldsymbol{e}_z, \quad \boldsymbol{k}_\perp = k_x\boldsymbol{e}_x, \quad \boldsymbol{k}_\parallel = 0.$$



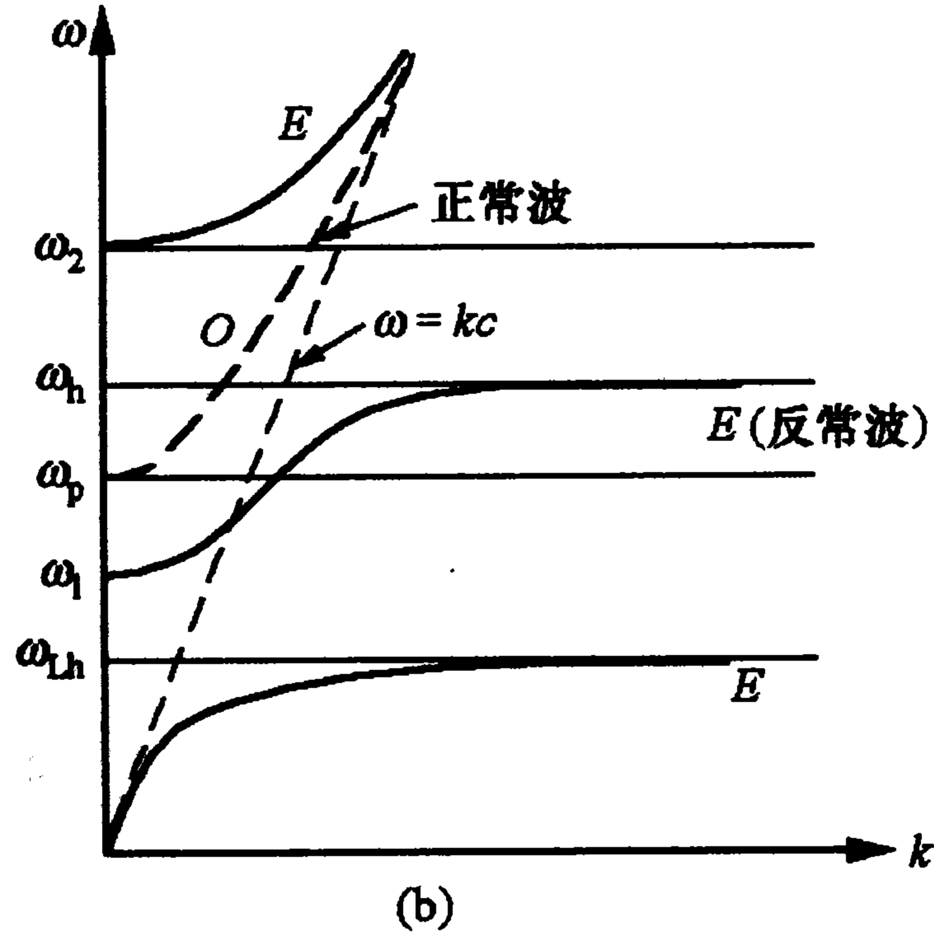


图 10.6　正常波和反常波图示(流体描述)
(a) 坐标系，(b) 色散关系

按流体理论，这时存在两支本征模：正常波和反常波(见图 10.6(b)). 在动理学理论中，除了这两支本征模外还增加了一支伯恩斯坦波. 在具体讨以上三支模前，首先指出这些波的两个突出的特点. 第一，因为 $k_\parallel=0$ 故在速度空间的积分中，由于被积函数的分母上不存在 $k_\parallel v_\parallel$ 的项，所以不存在回旋共振阻尼，而只存在 $\omega=\pm\omega_{\alpha c}$ 的回旋共振. 从物理上来看，这是由于在垂直于磁场的方向上，粒子不能自由运动而只能作回旋运动，因此不可能和在这方向上传播的波有相同的速度，从而发生共振阻尼. 第二，正是因为回旋共振，所以本征模的整个频谱被这些共振分成了无穷多个分支

$$n\omega_{\alpha c}<\omega(\boldsymbol{k})<(n+1)\omega_{\alpha c},\quad n=0,\pm1,\pm2,\cdots.$$

在 $k_\parallel=0$ 时，色散函数中的 $D_{xz},D_{yz},D_{zx},D_{zy}$ 均为零；这是因为它们都含有为零的积分因子 $\int v_\parallel\exp(-\alpha v_\parallel^2)\mathrm{d}v_\parallel=0$. 这样，色散方程就可写作

$$\begin{bmatrix} D_{xx} & D_{xy} & 0 \\ D_{yx} & D_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & D_{zz} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_{1x} \\ E_{1y} \\ E_{1z} \end{bmatrix}=0.$$

其解可写成

$$D_{zz}(D_{xx}D_{yy}-D_{xy}D_{yx})=0.$$

其中 $D_{zz}=0$ 给出的本征模就是电子(离子)正常(ordinary)波(见图 10.7). 而 $D_{xx}D_{yy}=D_{xy}D_{yx}$ 给出的是电场矢量方向在 (x,y) 平面

上的本征模. 在极端情况下 $D_{xy}D_{yx}\approx0$，它分成两个典型的本征模：电场矢量主要在 $\boldsymbol{e}_y$ 方向上的电子(离子)反常(extraordinary)回旋波(见图 10.8)，以及电场矢量主要在波的传播方向 $\boldsymbol{k}=k\boldsymbol{e}_x$ 上的电子(离子)伯恩斯坦波(见图 10.9)——这是一支流体描述中不曾出现的静电波. 下面将以 $D_{zz}=0$ 及 $D_{xx}=0$ 为例分别导出电子正常回旋波和离子伯恩斯坦波的色散关系，其他的色散关系的讨论请参考文献[2]，[4].

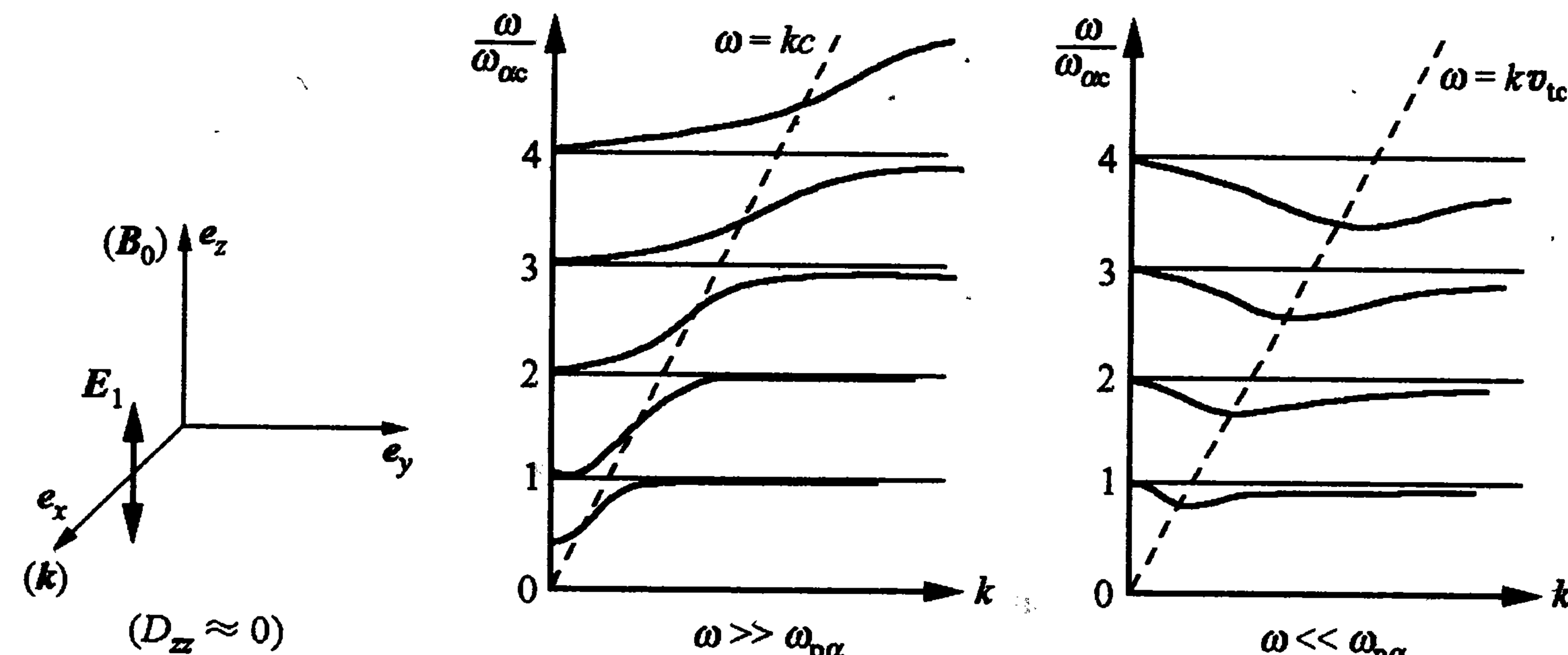


图 10.7　正常(电子、离子)回旋波图示
(a) 坐标系，(b) 色散关系($\omega\gg\omega_{p\alpha}$)，(c) 色散关系($\omega\ll\omega_{p\alpha}$)

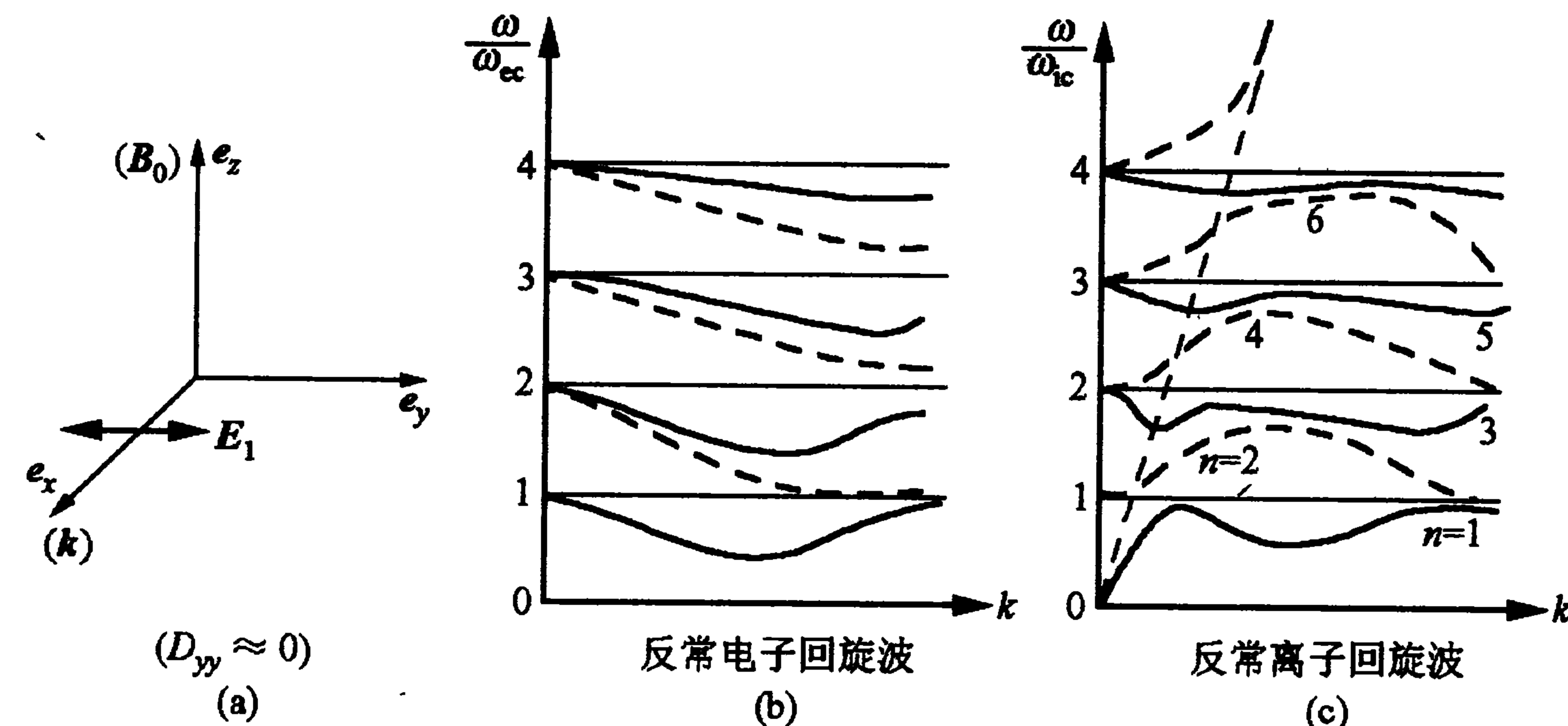


图 10.8　反常(电子、离子)回旋波图示
(a) 坐标系，(b) 反常电子回旋波色散关系，(c) 反常离子回旋波色散关系

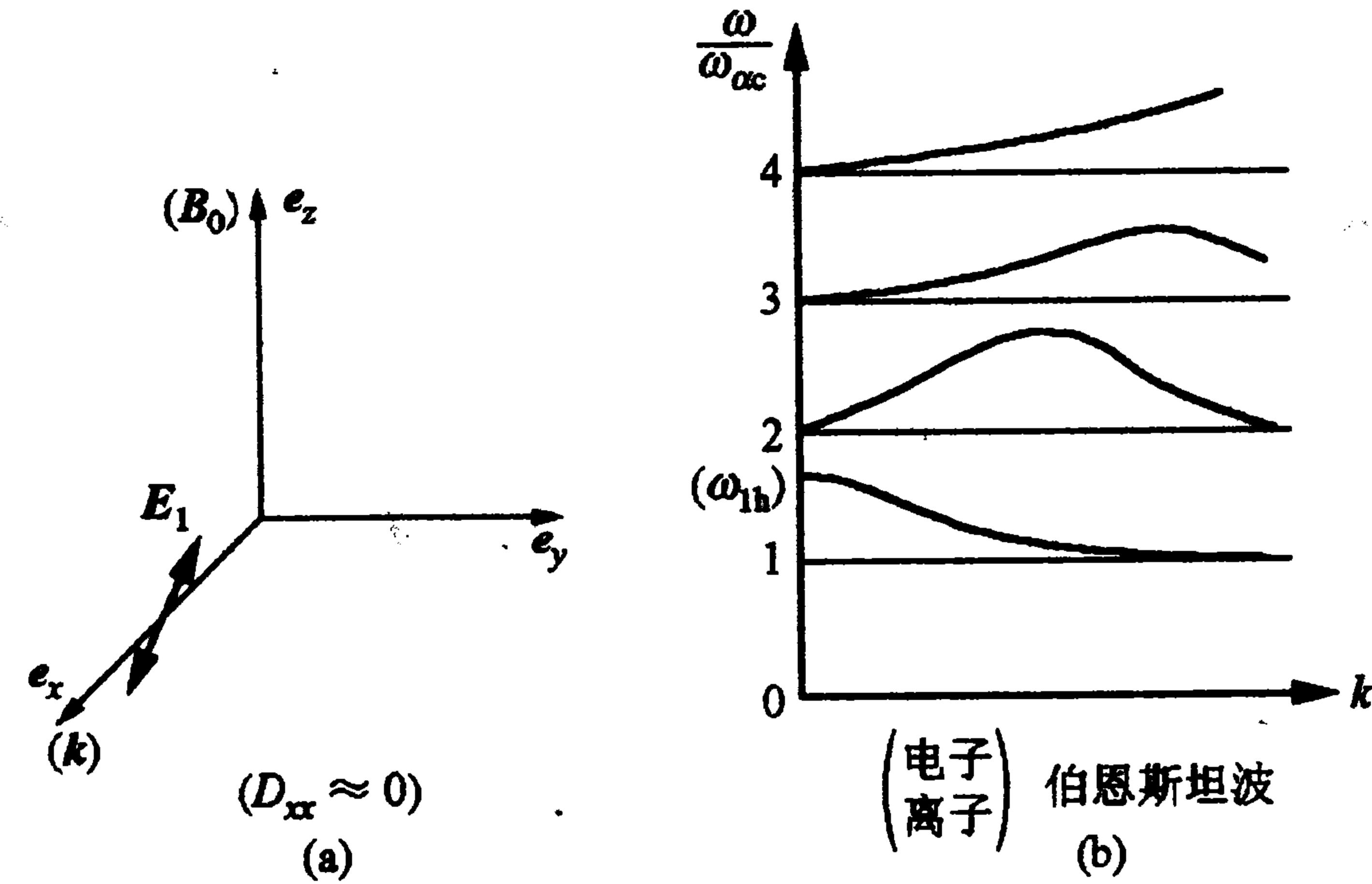


图 10.9　电子、离子伯恩斯坦波图示
(a) 坐标系，(b) 色散关系

10.4.2　电子正常回旋波

由前面定义，注意到 $\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}_\perp=k\boldsymbol{e}_x$，则

$$D_{zz}=1-\frac{k_\perp^2c^2}{\omega^2}-\frac{2\pi}{\omega}\sum_\alpha\left(\frac{\omega_p^2}{\omega_c}\right)_\alpha\sum_n\int dv_\parallel\int\frac{2v_\perp(v_\parallel^2\omega_{\alpha c}J_n^2\Lambda_\alpha)}{n\omega_{\alpha c}-\omega}dv_\perp,$$

其中

$$\Lambda_\alpha=\frac{\partial f_{\alpha0}}{\partial v_\parallel^2}-\frac{n\omega_{\alpha c}}{\omega}\left(\frac{\partial f_{\alpha0}}{\partial v_\parallel^2}-\frac{\partial f_{\alpha0}}{\partial v_\perp^2}\right).$$

进一步，当取热平衡分布 $f_{\alpha0}=f_{\alpha M}$时，上式中的第二项为零，而第一项关于平行速度的积分很容易得出

$$\int_{-\infty}^{\infty}v_\parallel^2\frac{\partial f_{\alpha M}}{\partial v_\parallel^2}dv_\parallel=-\frac{1}{2}f_{\alpha M\perp}(v_\perp^2),$$

再由对垂直速度的积分，得

$$\int_0^{2\pi}d\phi\int_0^\infty J_n^2(k_\perp v_\perp/\omega_{\alpha c})f_{\alpha M\perp}(v_\perp^2)v_\perp\,dv_\perp$$
$$=\frac{m_\alpha}{T_\alpha}\int_0^\infty J_n^2(k_\perp v_\perp/\omega_{\alpha c})\exp\left(-\frac{m_\alpha v_\perp^2}{2T_\alpha}\right)v_\perp\,dv_\perp$$
$$=A_n(b_\alpha)\equiv e^{-b_\alpha}I_n(b_\alpha),\quad b_\alpha=k_\perp^2r_{\alpha c}^2,$$

其中 $r_{\alpha c}=v_\alpha/\omega_{\alpha c}(v_\alpha^2=T_\alpha/m_\alpha)$是粒子的拉莫尔半径. 这样可得

$$D_{zz}=1-\frac{k_\perp^2c^2}{\omega^2}-\sum_\alpha\frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{A_n(b_\alpha)}{\omega-n\omega_{\alpha c}}$$
$$=1-\frac{k_\perp^2c^2}{\omega^2}-\sum_\alpha\omega_{p\alpha}^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2A_n(b_\alpha)}{\omega^2-n^2\omega_{\alpha c}^2}-\sum_\alpha\frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega^2}A_0(b_\alpha).$$

其中用到了

$$\frac{1}{\omega-n\omega_{\alpha c}}+\frac{1}{\omega+n\omega_{\alpha c}}=\frac{2\omega}{\omega^2-n^2\omega_{\alpha c}^2}.$$

现在专门来讨论电子正常波，即令 $\alpha=e$. 由于电子的拉莫尔半径远小于此波的波长 $b_e=k_\perp^2r_e^2\ll1$，有 $A_{n+1}\ll A_n$，故在下面我们只取 $n=0,1$ 的两项：

$$D_{zz}\approx1-\frac{k_\perp^2c^2}{\omega^2}-\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}A_0(b_e)-\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2-\omega_{ec}^2}2A_1(b_e).\tag{10.45}$$

从上式中的共振因子可以看出，这时 $\omega\sim\omega_{ec}$，故可以令

$$\omega=|\omega_{ec}|(1+\Delta),\ \Rightarrow\ \omega^2\approx\omega_{ec}^2(1+2\Delta).\tag{10.46}$$

下面分两种情况来导出色散关系(对应于正常电子回旋波的两个色散图 10.7(b),(c)).

当 $\omega_{ec}^2\gg\omega_{pe}^2$时，电子正常波的色散方程可简化成

$$D_{zz}\approx1-\frac{k_\perp^2c^2}{\omega^2}-\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2-\omega_{ec}^2}2A_1(b_e)=0,\tag{10.47}$$

代入(10.46)式后可得

$$\Delta=\frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{ec}^2-k_\perp^2c^2}A_1(k_\perp^2r_e^2).$$

现在分别讨论两种波长极限下的色散行为：当 $k_\perp\to0$ 时，$A_1\sim k_\perp^2r_{ec}^2/2$，结果有

$$\Delta\approx\frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{ec}^2}\frac{k_\perp^2r_e^2}{2}\propto k_\perp^2;$$

而当 $k_\perp\to\infty$时，$A_1\sim1/\sqrt{2\pi k_\perp^2r_{ec}^2}$，结果得出

$$\Delta \approx -\frac{\omega_{pe}^2}{k_\perp^2 c^2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}k_\perp r_{ec}} \propto -\frac{1}{k_\perp^3}.$$

用这两种极限下的解析表达式,可以说明图 10.7(b)中 ω 在 ω_{ec}上下的色散曲线的行为.

当 $\omega_{ec}^2 \ll \omega_{pe}^2$时,色散方程简化成

$$D_{zz} \approx -\frac{k_\perp^2 c^2}{\omega^2} - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}A_0(b_e) - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2 - \omega_{ec}^2}2A_1(b_e) = 0. \tag{10.48}$$

同样令 $\omega = |\omega_{ec}|(1+\Delta)$,可得

$$-\frac{k_\perp^2 c^2}{\omega_{ec}^2} - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{ec}^2}A_0(b_e) - \frac{\omega_{pe}^2}{2\Delta\omega_{ec}^2}2A_1(b_e) = 0,$$

$$\Delta = -\frac{\omega_{pe}^2 A_1(k_\perp^2 r_{ec}^2)}{k_\perp^2 c^2 + \omega_{pe}^2 A_0(k_\perp^2 r_{ec}^2)}. \tag{10.49}$$

有

$$k_\perp \to 0,\quad \Delta \approx -\frac{A_1}{A_0} \sim -\frac{1}{2}k_\perp^2 r_{ec}^2 \propto -k_\perp^2,$$

$$k_\perp \to \infty,\quad \Delta \approx -\frac{\omega_{pe}^2}{k_\perp^2 c^2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}k_\perp r_{ec}} \propto -\frac{1}{k_\perp^3}.$$

这两个波矢极限下的色散曲线形状和图 10.7(c)中 $\omega/\omega_{ec} \leqslant 1$ 时给出的基本相符;进一步,由上面的(10.49)式,还可以求出当 Δ 取极大值时的波矢值约在

$$k_{\perp\max} \sim \frac{1}{r_{ec}}.$$

10.4.3 离子伯恩斯坦波

这时色散方程由 $D_{xx}=0$ 给出. 取各向同性的速度分布函数 $f_{\alpha0}(v^2)$,于是 $\hat{\chi}_\alpha = \partial f_{\alpha0}/\partial v_\perp^2$;并考虑到 $k_\parallel = 0$,则

$$D_{xx} = 1 - \frac{2\pi}{\omega}\sum_\alpha \omega_{p\alpha}^2 \sum_{l=-\infty}^{\infty}\int dv_\parallel v_\perp dv_\perp \frac{2\hat{\chi}_\alpha}{l\omega_{\alpha c} - \omega}\frac{\omega_{\alpha c}^2}{k_\perp^2}l^2 J_l^2$$

$$= 1 + \frac{2\pi}{\omega}\sum_\alpha \frac{\omega_{p\alpha}^2}{k_\perp^2}\sum_{l=-\infty}^{\infty}\int dv_\parallel v_\perp dv_\perp \frac{l^2 J_l^2 \omega_{\alpha c}^2}{\omega - l\omega_{\alpha c}}\frac{\partial f_{\alpha0}}{\partial v_\perp^2/2}$$

$$= 1 + \frac{2\pi}{\omega}\sum_\alpha \frac{\omega_{p\alpha}^2}{k_\perp^2}\sum_{l=1}^{\infty}\int dv_\parallel v_\perp dv_\perp \frac{2\omega l^2 J_l^2 \omega_{\alpha c}^2}{\omega^2 - l^2\omega_{\alpha c}^2}\frac{\partial f_{\alpha0}}{\partial v_\perp^2/2}$$

$$= 1 + \sum_\alpha \chi_\alpha,$$

其中 χ_α 是静电波的极化率. 上式也可以从纯静电波的色散方程(10.32)直接推出. 在下面的讨论中进一步假定 $f_{\alpha0} = f_{\alpha M}(v^2)$,利用

$$\frac{\partial f_{\alpha M}}{\partial v_\perp^2/2} = -\frac{1}{v_{t\perp}^2}f_{\alpha M},\quad v_{t\perp}^2 = \frac{T_\alpha}{m_\alpha},\quad \frac{\omega_{\alpha c}}{v_{t\perp}} = r_\alpha^{-1},\quad \frac{\omega_{p\alpha}}{v_{t\perp}} = \lambda_{D\alpha}^{-1},$$

有

$$2\pi\int_0^\infty J_n^2(k_\perp r_{\alpha c})f_{\alpha M}v_\perp dv_\perp = I_n(b_\alpha)e^{-b_\alpha} \equiv A_{n\alpha}(b_\alpha),\quad b_\alpha = k_\perp^2 r_{\alpha c}^2,$$

其中 I_n 是虚宗量的贝塞尔函数. 这样极化率就可写成

$$\chi_\alpha = -\frac{1}{k_\perp^2\lambda_{D\alpha}^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n^2\omega_{\alpha c}^2}{\omega^2 - n^2\omega_{\alpha c}^2}A_{n\alpha}. \tag{10.50}$$

而伯恩斯坦波的色散方程为

$$1 + \chi_e + \chi_i = 0.$$

为了进一步得出解析结果,下面将利用 I_n 的微扰展开和渐近展开:

$$x \ll 1,\quad I_n(x) = \frac{(x/2)^n}{\Gamma(n+1)} + \frac{(x/2)^{n+2}}{1!\Gamma(n+2)} + \frac{(x/2)^{n+4}}{2!\Gamma(n+3)} + \cdots,$$

$$x \gg 1,\quad I_n(x) \sim \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}\left[1 + O\left(\frac{1}{x}\right)\right],$$

$$\Rightarrow A_n \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi x}}.$$

下面以离子伯恩斯坦波为例,因为 $\omega \sim \omega_{ic}$,故

$$\left|\frac{\omega}{\omega_{ec}}\right| \sim \left|\frac{\omega_{ic}}{\omega_{ec}}\right| \ll 1;\quad |k_\perp r_e| \sim O\left(\frac{r_e}{r_i}\right) \ll 1,$$

$$A_{ne}(k_\perp^2 r_e^2) \propto (k_\perp^2 r_e^2)^n.$$

这样在 χ_e 中只有 $n=1$ 的项才是最主要的，只保留这一项时，电子极化率可简化成

$$\chi_e \sim -\frac{1}{k_\perp^2 \lambda_{De}^2}\frac{2\omega_{ec}^2}{\omega^2-\omega_{ec}^2}A_{1e} \approx \frac{2A_{1e}}{k_\perp^2 \lambda_{De}^2} \approx \frac{k_\perp^2 r_e^2}{k_\perp^2 \lambda_{De}^2} = \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_e^2}.$$

故离子伯恩斯坦波的色散方程为

$$1+\frac{\omega_{pe}^2}{\omega_e^2} = \frac{1}{k_\perp^2 \lambda_{Di}^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n^2\omega_{ic}^2}{\omega^2-n^2\omega_{ic}^2}A_{ni} \equiv F_i(\omega). \quad (10.51)$$

由上面方程可见：

(i) 因为 $\omega_{pe}\sim\omega_e$，故上式的右边近似为 2，故 $F_i(\omega)\approx 2$，并和 k 无关；

(ii) 因为 $F_i(\omega)>0$，故波只能存在于 $n\omega_i<\omega<(n+1)\omega_i$（否则 $F_i\to\infty$）.

下面进一步讨论在波矢两种极限取值下的色散行为. 首先，当 $|k|\to\infty$ 时，因为

$$\frac{A_{1i}}{k^2} \sim \frac{1}{k^2\sqrt{2\pi k^2 r_i^2}} \propto \frac{1}{k^3} \to 0^+,$$

故方程右边求和号中的分母也只有 $\lim\limits_{|k|\to\infty}(\omega^2-n^2\omega_{ic}^2)\to 0^+$，才能保证 F_i 的有限. 这意味着

$$|k|\to\infty,\quad \omega\sim n\omega_{ic}. \quad (10.52)$$

而在 $k\to 0$ 时，因为 $A_{ni}\propto(k^2 r_i^2)^n\to 0$，故

$$\lim_{k\to 0}F_i(\omega) \approx \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2-\omega_{ic}^2} + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^2\omega_{pi}^2}{\omega^2-n^2\omega_{ic}^2}O(|k^2|^{n-1}). \quad (10.53)$$

其中右边第一项是从 A_{1i} 推导而来，其中已用到了

$$\frac{2A_{1i}\omega_{ic}^2}{k^2\lambda_{Di}^2} = k^2 r_i^2 \omega_{ic}^2 \frac{\omega_{pi}^2}{k^2 v_{it}^2} = \omega_{pi}^2.$$

由于 $F_i\approx 2$，故在 $\omega<\omega_{ic}$ 时，上式不可能有解；而在 $\omega_{ic}<\omega<2\omega_{ic}$ 时有一个解 ω_{1h}，

$$1+\frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{ec}^2} = \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2-\omega_{ic}^2},\ \Rightarrow\ \omega_{1h}^2 = \omega_{ic}^2 + \frac{\omega_{pi}^2}{1+\omega_{pe}^2/\omega_{ec}^2}.$$

最后，在 $n\omega_{ic}<\omega<(n+1)\omega_{ic}\,(n\geqslant 2)$ 时，上式的解基本为 $\omega_{nh}\approx 0\,(n\geqslant 2)$. 这些分析也可以用图解的方法得出（见图 10.10），方程 (10.53) 的左面基本上是常数 2（图中平行横轴的直线），而右面则可用数值法画成一条一条曲线，直线和各条曲线的交点就是色散方程的解. 综合关于 k 两种极端情况的上述讨论，可以有离子伯恩斯坦波的色散曲线（图 10.11），这和前面给出的色散图 10.9 是一致的.

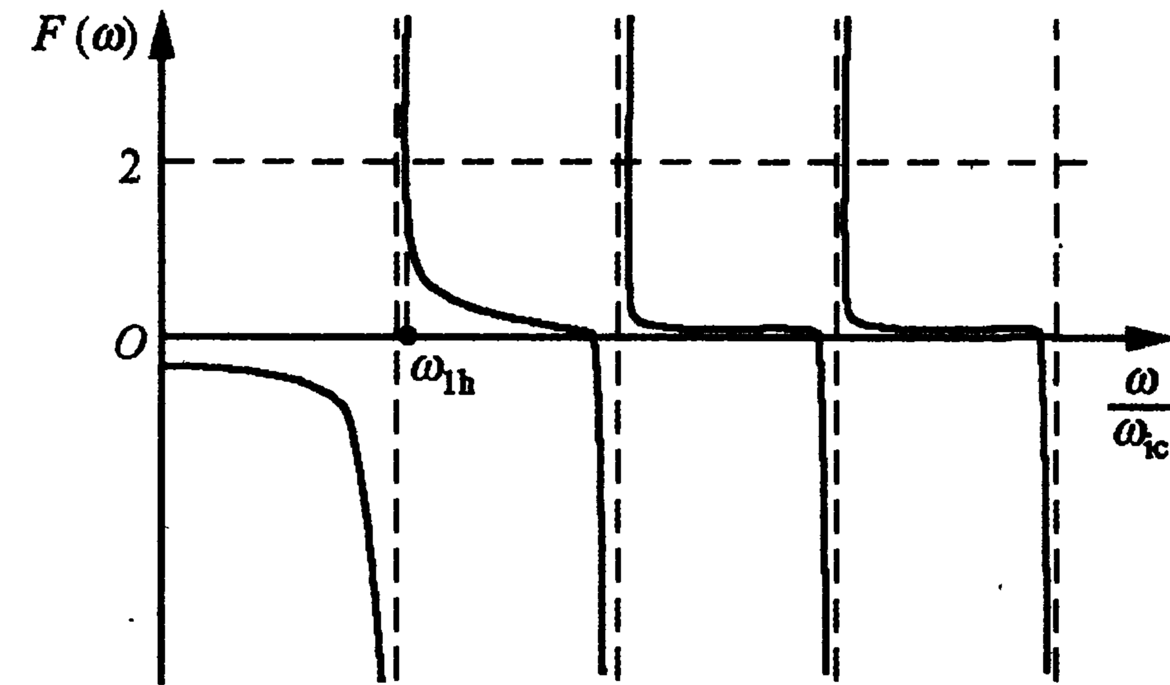


图 10.10　色散方程的作图求解

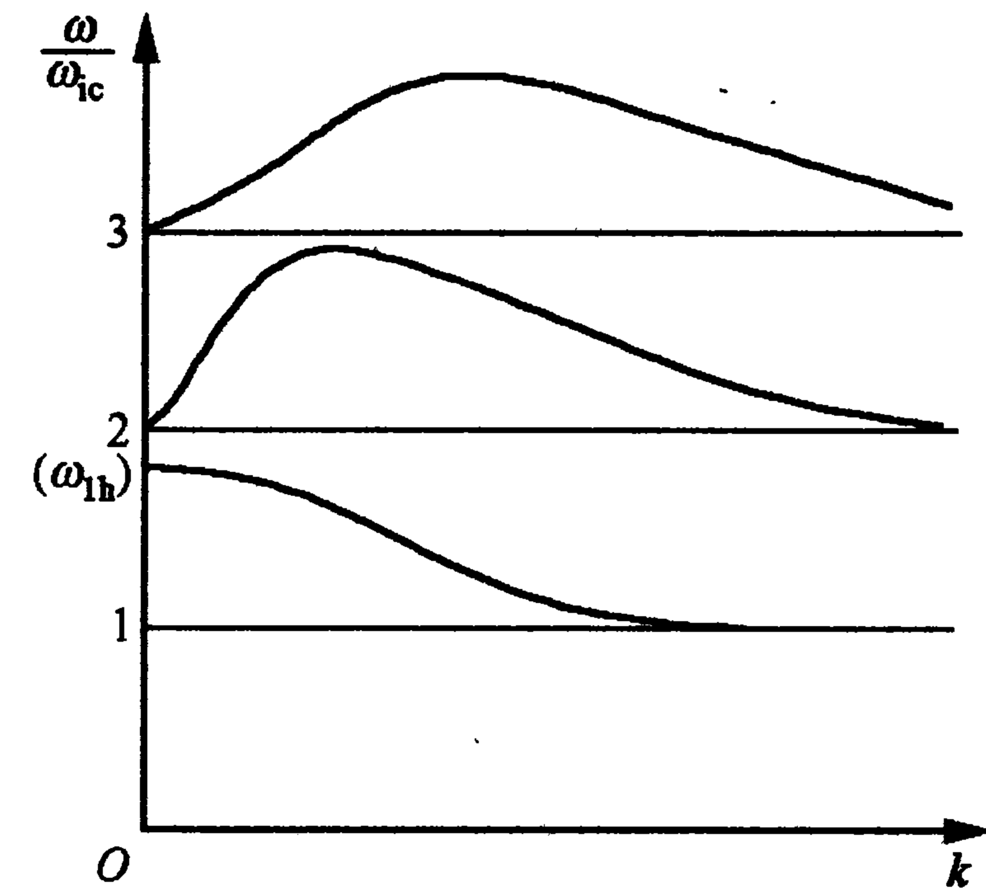


图 10.11　离子伯恩斯坦波色散关系

参考文献

[1] Krall N A, Trivelpiece A W. Principles of Plasma Physics. McGraw-Hill Book Company, 1973

[2] Stix T H. Waves in Plasmas. American Institute of Physics, New York, 1992. 247—262

[3] Liu Chen. Wave and Instabilities in Plasmas. World Scientific Publications, 1987

[4] Akhiezer A I *et al*. Plasma Electrodynamics. Pergamon Press, 1975

第十一章 空间不均匀、外磁场均匀情况下的漂移波

本章只讨论由于等离子体密度的空间不均匀而在垂直磁场方向上引起的带电粒子流的漂移运动，及由这种定向运动所驱动的等离子体波——漂移波. 本章所给出的方法可以无原则困难地推广到等离子体中温度、流场及外磁场都不均匀时所引发的一般漂移波中去，但为了简单在本课程中不做介绍(有兴趣的读者可以参考例如文献[1]). 在下面我们取

$$\boldsymbol{B}_0 = B_0\boldsymbol{e}_z, \quad n_{\alpha 0}(\boldsymbol{r}) = n_{\alpha 0}(x), \quad \boldsymbol{u}_{\alpha 0} = u_{\alpha 0}(x)\boldsymbol{e}_y,$$

$$T_\alpha = T = \text{常数}, \quad \boldsymbol{E}_0 = 0.$$

考虑到在《等离子体物理学原理》[2]中对漂移波的(流体)描述比较简单，所以本章一开始先补充这方面的内容. 由于不同符号和质量的带电粒子流其漂移方向与大小都不同，故对漂移波作流体描述时必须启用双(多)流体方程组.

11.1 流体描述概述

11.1.1 漂移速度——双流体方程平衡解

选取如图 11.1 所示的坐标系，对由电子和离子组成的等离子体，其双流体方程为

$$\frac{\partial n_{\alpha 0}}{\partial t} + \nabla \cdot (n_{\alpha 0}\boldsymbol{u}_{\alpha 0}) = 0, \quad \alpha = \mathrm{e}, \mathrm{i},$$

$$n_{\alpha0}\frac{\partial \boldsymbol{u}_{\alpha0}}{\partial t}=\frac{q_\alpha n_{\alpha0}}{c}\boldsymbol{u}_{\alpha0}\times\boldsymbol{B}_0-\nabla P_{\alpha0}.$$

其中已用到了 $\boldsymbol{u}_{\alpha0}\cdot\nabla\boldsymbol{u}_{\alpha0}=0$. 这时静态(平衡时)的连续性方程是

$$\nabla\cdot(n_{\alpha0}\boldsymbol{u}_{\alpha0})=0.$$

由于 $\boldsymbol{u}_{\alpha0}$的方向在 $\boldsymbol{e}_y$，而 $n_{\alpha0}$，$\boldsymbol{u}_{\alpha0}$又只是 x 的函数，故在我们所取的等离子体平衡参数下此式自动满足. 即

$$\boldsymbol{u}_{\alpha0}\cdot\nabla n_{\alpha0}(x)=0,$$

$$\Longrightarrow \boldsymbol{u}_{\alpha0}\perp\nabla n_{\alpha0}(x).$$

图 11.1　漂移流动的坐标系

而平衡的运动方程为

$$\boldsymbol{u}_{\alpha0}\times\boldsymbol{B}_0=\frac{c}{n_{\alpha0}q_\alpha}\nabla P_{\alpha0},$$

两边同时叉乘 $\boldsymbol{B}_0$，得

$$\boldsymbol{u}_{\alpha0}=-\frac{cT_\alpha}{q_\alpha B_0}\left[\frac{\nabla n_{\alpha0}}{n_{\alpha0}}\times\left(\frac{\boldsymbol{B}_0}{B_0}\right)\right]$$

$$\left(由\ \boldsymbol{b}=\frac{\boldsymbol{B}_0}{B_0}\right)=-\frac{T_\alpha}{m_\alpha\omega_{\alpha c}}[\nabla\ln n_{\alpha0}\times\boldsymbol{b}]$$

$$\equiv \boldsymbol{v}_{D\alpha}.$$

其中 $\omega_{\alpha c}=q_\alpha B_0/(m_\alpha c)$，因此 $\omega_{i0}>0$，$\omega_{e0}<0$. 按一开始取的坐标，可以看出 v_{Di}在 $+\boldsymbol{e}_y$ 方向，而 v_{De}在 $-\boldsymbol{e}_y$方向(但它们都是 x 的函数)：

$$\boldsymbol{v}_{Di}=\frac{T_i}{m_i\omega_i}\frac{d(\ln n_{i0})}{dx}\boldsymbol{e}_y,$$

$$\boldsymbol{v}_{De}=-\frac{T_e}{m_e|\omega_e|}\frac{d(\ln n_{e0})}{dx}\boldsymbol{e}_y.$$

特别当 $T_i=T_e=T$，$n_{e0}=n_{i0}=n_0$ 时，有 $v_D=v_{Di}=-v_{De}(v_{Di}>0)$.

在《等离子体物理导论》[2]中对于偏离平衡的漂移运动所产生的线性漂移波没有作系统的介绍，为了有助于大家建立物理图像，

下面先用流体方程组来描述典型的两种线性漂移波.

11.1.2　流体静电漂移波

在低 β 条件下($\beta=P/P_M\ll1$，$P_M=B^2/2\mu$ 是磁场压强)，磁场扰动 $\boldsymbol{B}_1\sim0$，这时漂移波可以看成是静电型的. 此外为了讨论方便，假定

$$\omega\ll\omega_i,\quad \sqrt{\frac{T_i}{m_i}}\ll\frac{\omega}{k_z}\ll\sqrt{\frac{T_e}{m_e}}.$$

这时，描述漂移静电扰动的线性流体方程组为

$$\frac{\partial n_{\alpha1}}{\partial t}+\nabla\cdot(n_{\alpha0}\boldsymbol{v}_{\alpha1})+\nabla\cdot(n_{\alpha1}\boldsymbol{v}_{\alpha0})=0,\qquad \alpha=e,i,\tag{11.1}$$

$$m_\alpha\frac{\partial\boldsymbol{v}_{\alpha1}}{\partial t}+m_\alpha(\boldsymbol{v}_{\alpha0}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}_{\alpha1}+m_\alpha(\boldsymbol{v}_{\alpha1}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}_{\alpha0}$$

$$=q_\alpha\left(\boldsymbol{E}_1+\frac{1}{c}\boldsymbol{v}_{\alpha1}\times\boldsymbol{B}_0\right),\tag{11.2}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}_1=4\pi(n_iq_i+n_eq_e).\tag{11.3}$$

下面，还将取

$$T_i=T_e=T,\ n_{e0}=n_{i0}=n_0,\ \Longrightarrow\ v_D=v_{Di}=-v_{De},$$

以及

$$\boldsymbol{E}_1=-\nabla\varphi$$

和

$$(n_{\alpha1},\boldsymbol{v}_{\alpha1},\varphi)\propto(n_{\alpha k},\boldsymbol{v}_{\alpha k},\varphi_k)\exp(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-i\omega t).$$

于是泊松方程变成

$$k^2\varphi_k=4\pi|e|(n_{ik}-n_{ek}),\tag{11.4}$$

其中 $n_{\alpha k}$可以从流体方程组解出(表示成 φ_k 的线性函数). 但在静电波速 $\omega/k_z\ll v_{et}$时，电子完全可以跟随静电波的电场沿磁力线来回运动；这样电子就处在热力学平衡态中，电子在波场中的扰动密度可以用玻尔兹曼分布来描述，而不用解电子流体方程：

$$n_e=n_{e0}e^{-q_e\varphi/T_e}=n_{e0}(1+e\varphi/T_e).$$

由此可知在线性近似下，扰动电子密度与扰动电势间存在以下关系：

$$n_{e1}=n_0\frac{e\varphi}{T},\ \Longrightarrow\ n_{ek}=n_0\frac{e\varphi_k}{T}. \tag{11.5}$$

而离子的扰动密度则必须从离子流体方程来导出. 先从连续性方程出发

$$-\mathrm{i}\omega n_{ik}+\mathrm{i}n_0\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}_{ik}+v_{ikx}\frac{\mathrm{d}n_0}{\mathrm{d}x}+\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}_{Di}n_{ik}=0,$$

可得(为简单,下面略去 $\boldsymbol{v}_{\alpha k}$的下标 k)

$$\frac{n_{ik}}{n_0}=\frac{v_{ix}}{\mathrm{i}\tilde{\omega}}\frac{\mathrm{d}\ln n_0}{\mathrm{d}x}+\frac{\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}_i}{\tilde{\omega}}, \tag{11.6}$$

其中 $\tilde{\omega}=\omega-k_yV_{Di}=\omega-\omega_i^*$. 再由离子运动方程(11.2)可得

$$-\mathrm{i}\omega\boldsymbol{v}_i+\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}_{Di})\boldsymbol{v}_i+v_{ix}\frac{\partial\boldsymbol{v}_{Di}}{\partial x}=-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\frac{q_i\varphi_k}{m_i}+\frac{q_i}{m_ic}(\boldsymbol{v}_i\times\boldsymbol{B}_0).$$

把它按分量写出

$$-\mathrm{i}(\omega-k_yv_{Di})v_{ix}=-\mathrm{i}k_x\frac{q_i\varphi_k}{m_i}+\omega_iv_{iy},$$

$$-\mathrm{i}(\omega-k_yv_{Di})v_{iy}+v_{ix}\frac{\partial v_{Di}}{\partial x}=-\mathrm{i}k_y\frac{q_i\varphi_k}{m_i}-\omega_iv_{ix},$$

$$-\mathrm{i}(\omega-k_yv_{Di})v_{iz}=-\mathrm{i}k_z\frac{q_i\varphi_k}{m_i}.$$

其中 z 方向的速度是和另外两个速度分量解耦的,由它可以立刻得出

$$v_{iz}=\frac{q_i}{m_i}\frac{k_z\varphi_k}{\tilde{\omega}}. \tag{11.7}$$

而另外两个方向是相互耦合的

$$v_{ix}=\frac{k_x\varphi_k}{\tilde{\omega}}\frac{q_i}{m_i}+\mathrm{i}\frac{\omega_i}{\tilde{\omega}}v_{iy},$$

$$v_{iy}=\frac{k_y\varphi_k}{\tilde{\omega}}\frac{q_i}{m_i}-\mathrm{i}\frac{(\omega_i+\partial v_{Di}/\partial x)}{\tilde{\omega}}v_{ix}.$$

把后一式代入前一式,得

$$\left[\frac{(\omega_i+\partial v_{Di}/\partial x)\omega_i}{\tilde{\omega}^2}-1\right]v_{ix}=-\frac{q_i}{m_i}\left[\frac{k_x\varphi_k}{\tilde{\omega}}+\mathrm{i}\frac{\omega_i}{\tilde{\omega}}\frac{k_y\varphi_k}{\tilde{\omega}}\right].$$

考虑到

$$\frac{\omega_i}{\tilde{\omega}}>\frac{\omega_i}{\omega}\gg 1,$$

故上式可以近似写作

$$v_{ix}\approx-\mathrm{i}\frac{k_y\varphi_k}{\omega_i}\frac{q_i}{m_i}. \tag{11.8}$$

将上式代入 v_{iy}的表达式后可得

$$v_{iy}=0. \tag{11.9}$$

把这些 $\boldsymbol{v}_i$ 代入(11.6)后,得

$$\frac{n_{ik}}{n_0}=\left(-\frac{1}{\tilde{\omega}}\frac{k_yT_e}{m_i\omega_i}\frac{\mathrm{d}\ln n_0}{\mathrm{d}x}+\frac{k_z^2T_e}{m_i\tilde{\omega}^2}\right)\frac{q_i\varphi_k}{T_e}. \tag{11.10}$$

利用

$$q_i=-q_e=e,\quad m_i\omega_i=m_e|\omega_e|,\quad T_i=T_e=T,$$

及

$$\omega_e^*=k_yv_{De}=-k_y\frac{T_e}{m_e|\omega_e|}\frac{\partial\ln n_0}{\partial x},\quad C_s^2=\frac{T}{m_i},$$

最后可有

$$\frac{n_{ik}}{n_0}=\left(-\frac{\omega_i^*}{\tilde{\omega}}+\frac{k_z^2C_s^2}{\tilde{\omega}^2}\right)\frac{e\varphi_k}{T}, \tag{11.11}$$

其中 $\tilde{\omega}=\omega-\omega_i^*$. 将电子和离子的密度扰动代入泊松方程后,得

$$k^2\varphi_k=4\pi e\left[n_0\left(-\frac{\omega_i^*}{\tilde{\omega}}+\frac{k_z^2C_s^2}{\tilde{\omega}^2}\right)\frac{e\varphi_k}{T}-n_0\frac{e\varphi_k}{T}\right]$$

$$=\frac{1}{\lambda_D^2}\left[-\frac{\omega_i^*}{\tilde{\omega}}+\frac{k_z^2C_s^2}{\tilde{\omega}^2}-1\right]\varphi_k,$$

其中 $\lambda_D^2=T/(4\pi n_0e^2)$. 由此可得色散方程

$$(1+k^2\lambda_D^2)\tilde{\omega}^2+\omega_i^*\tilde{\omega}-k_z^2C_s^2=0. \tag{11.12}$$

其解为

$$\tilde{\omega}\equiv\omega-\omega_i^*$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{1+k^2\lambda_D^2}\left[-\omega_i^* \pm \sqrt{(\omega_i^*)^2 + 4(1+k^2\lambda_D^2)k_z^2C_s^2}\right]. \tag{11.13}$$

对低频长波，$k^2\lambda_D^2 \ll 1$，故解可以近似成

$$\tilde{\omega} \approx \frac{1}{2}\left[-\omega_i^* \pm \sqrt{(\omega_i^*)^2 + 4k_z^2C_s^2}\right].$$

这个解在两种极端条件下可以有明显的物理意义：当 $k_z \gg k_y$ 时，$\omega_i^* = k_y v_{Di} \sim 0$，故解近似成为离子声波

$$\tilde{\omega} \approx \omega = \pm k_z C_s; \tag{11.14}$$

图 11.2 流体静电漂移波的色散关系图

而当 $k_z \ll k_y$ 时，对应取 + 号及取 − 号，解可近似成

$$\tilde{\omega} = \begin{cases} -\omega_i^*, & +, \\ \dfrac{k_z^2C_s^2}{\omega_i^*}, & -. \end{cases}$$

这相当于

$$\omega = \begin{cases} 0, & +, \\ \omega_i^*, & -. \end{cases} \tag{11.15}$$

图 11.2 就是上述色散关系的 ω-k_z 图，可以看出这里存在两支波，它们在 $k_z \to \infty$ 时都像离子声波. 但其中在 $k_z \to 0$ 时趋于 ω_i^* 的一支不是离子声波，而是典型的静电漂移波，也即是 $k_z \ll k_\perp = k_y$ 的低频长波.

11.1.3 流体电磁漂移波及低杂漂移波不稳定性

这是波频较高的本征模，$\omega_i \ll \omega \ll \omega_e$. 本节把坐标系安置在电子漂移流上，也即此坐标系相对实验室坐标系以电子漂移速度运动. 于是在此坐标系中

$$\boldsymbol{v}_e = \boldsymbol{v}_{e1}(\boldsymbol{v}_{De} = 0), \quad \boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{v}_{i1}, \tag{11.16}$$

其中

$$\boldsymbol{v}_0 = \boldsymbol{v}_{Di} - \boldsymbol{v}_{De} = \frac{T_i}{m_i\omega_i}\frac{\partial \ln n_0}{\partial x}\boldsymbol{e}_y + \frac{T_e}{m_e|\omega_e|}\frac{\partial \ln n_0}{\partial x}\boldsymbol{e}_y$$
$$= 2\frac{T_0}{m_i\omega_i}\frac{\partial \ln n_0}{\partial x}\boldsymbol{e}_y$$

（若当 $T_i = T_e = T_0$）$= 2v_D\boldsymbol{e}_y$. $\qquad (\nabla\cdot\boldsymbol{v}_0 \equiv 0)$

而其他扰动量表示成

$$n_\alpha = n_0(x) + n_{\alpha 1}, \quad \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}_0 + \boldsymbol{B}_1, \quad \boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_1(\boldsymbol{E}_0 = 0). \tag{11.17}$$

电子流体的线性扰动方程组为

$$\frac{\partial n_{e1}}{\partial t} + \nabla\cdot(n_0(x)\boldsymbol{v}_{e1}) = 0, \tag{11.18}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}_{e1}}{\partial t} = -\frac{e}{m_e}\left(\boldsymbol{E}_1 + \frac{1}{c}\boldsymbol{v}_{e1}\times\boldsymbol{B}_0\right). \tag{11.19}$$

离子流体的线性扰动方程组为

$$\frac{\partial n_{i1}}{\partial t} + \nabla\cdot[n_0(x)\boldsymbol{v}_{i1} + n_{i1}\boldsymbol{v}_0] = 0, \tag{11.20}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}_{i1}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}_0\cdot\nabla)\boldsymbol{v}_{i1} = \frac{e}{m_i}\left(\boldsymbol{E}_1 + \frac{1}{c}\boldsymbol{v}_0\times\boldsymbol{B}_1 + \frac{1}{c}\boldsymbol{v}_{i1}\times\boldsymbol{B}_0\right). \tag{11.21}$$

而线性麦克斯韦方程组是

$$\nabla\times\boldsymbol{E}_1 = -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{B}_1}{\partial t}, \tag{11.22}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{B}_1 = \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{E}_1}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}_1, \tag{11.23}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}_1 = 4\pi e(n_{i1} - n_{e1}). \tag{11.24}$$

求色散方程的步骤类似上节，即由流体方程组（同时利用上面列出的前两个线性麦克斯韦方程组）分别求得扰动的电子、离子密度 n_{i1}，n_{e1}对扰动势能的依赖关系，然后代入泊松方程，即可得到色散方程.

先求离子的密度扰动，考虑到 $\nabla\cdot\boldsymbol{v}_0 = 0$，

$$\frac{\partial n_{i1}}{\partial t} + \boldsymbol{v}_{i1}\cdot\nabla n_0(x) + \boldsymbol{v}_0\cdot\nabla n_{i1} + n_0\nabla\cdot\boldsymbol{v}_{i1} = 0,$$

由于假定了 $\omega \gg \omega_i$，故离子运动得很慢，在一个波场周期中只能移动极小的距离，它受到空间不均匀性的影响（即含 ∇n_0 的项）很小. 这样上式中的第二项可以忽略. 对线性扰动作傅氏变换，即令

$$h_1(\boldsymbol{r},t) = h_\omega e^{-i\omega t} = h_k e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}, \quad h_1 = n_1, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{E}_1, \boldsymbol{B}_1, \boldsymbol{j}_1, \cdots,$$

并且取

$$\boldsymbol{k} = \boldsymbol{k}_x + \boldsymbol{k}_y = \boldsymbol{k}_\perp, \quad \Longrightarrow \boldsymbol{k}_z = 0;$$

于是由上面的连续性方程可得

$$n_{ik} = \frac{\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}_{ik} n_0}{\tilde{\omega}} = \frac{k_\perp v_{ik\perp} n_0}{\tilde{\omega}}. \tag{11.25}$$

其中 v_{ik} 则应该从运动方程来求出. 利用麦克斯韦方程中的法拉第定律

$$i\frac{\omega}{c}\boldsymbol{B}_k = i\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E}_k, \quad \Longrightarrow \boldsymbol{B}_k = \frac{c}{\omega}\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E}_k,$$

将它代入离子运动方程(11.21)右面的第二项后得

$$\frac{e}{m_i c}\boldsymbol{v}_0\times\boldsymbol{B}_k = \frac{e}{m_i\omega}\boldsymbol{v}_0\times(\boldsymbol{k}_\perp\times\boldsymbol{E}_k) = \frac{e}{m_i}\frac{k_\perp v_0}{\omega}\boldsymbol{E}_{kz}$$

$$= \frac{e}{m_i}\frac{v_0}{v_{ph}}\boldsymbol{E}_{kz} \ll \frac{e}{m_i}\boldsymbol{E}_{kz}.$$

其中用到了电磁波的相速度远大于漂移速度：$v_{ph}\sim c \gg v_0$. 上式的最后一项正是离子运动方程右面的第一项（电场力项），因此离子运动方程的右面第二项和第一项相比可以略去. 另外，离子运动方程的最后一项可写作

$$\frac{e}{m_i c}\boldsymbol{v}_{ix}\times\boldsymbol{B}_0 = \frac{eB_0}{m_i c}v_{ix} = \omega_i v_{ix} \ll \omega v_{ix},$$

其中用到了 $\omega_i \ll \omega$. 上式的最后一项正是离子运动方程左面的第一项，因此与其相比也可以将离子运动方程的最后一项略去. 这样，最后可以有简化的离子运动方程：

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}_{i1}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}_0\cdot\nabla)\boldsymbol{v}_{i1} \approx \frac{e}{m_i}\boldsymbol{E}_1. \tag{11.26}$$

在作了傅氏变换后，并考虑到 $\boldsymbol{E}_1 = -\nabla\varphi = -i\boldsymbol{k}\varphi_k$，有

$$v_{ik} = \frac{i}{\omega - k_y v_0}\frac{e}{m_i}\boldsymbol{E}_k = \frac{e}{m_i}\frac{\boldsymbol{k}}{\tilde{\omega}}\varphi_k.$$

而从离子的连续性方程的傅氏变换，可得我们所需的离子密度扰动（作为扰动电势的线性函数）

$$n_{ik} = \frac{n_0}{\tilde{\omega}}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}_{ik} = \frac{k^2\varphi_k}{\tilde{\omega}^2}\frac{en_0}{m_i}. \tag{11.27}$$

下面来求电子的密度扰动（也是作为扰动电势的线性函数），从电子的连续性方程可得

$$n_{e\omega} = -\frac{i}{\omega}\left[v_{e\omega x}\frac{\partial n_0}{\partial x} + n_0\nabla\cdot\boldsymbol{v}_{e\omega}\right]. \tag{11.28}$$

因此必须求出 $\boldsymbol{v}_{e\omega}$，而这可以从电子的运动方程解出

$$\boldsymbol{v}_{e\omega} = -i\frac{e}{m_e\omega}\boldsymbol{E}_\omega - i\frac{\omega_e}{\omega}\boldsymbol{v}_{e\omega}\times\boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{b} = \frac{\boldsymbol{B}_0}{B_0},$$

其中 $\omega_e = eB_0/(m_e c) > 0$. 由于 $\omega_e \gg \omega$，故可以用迭代法来解此方程. 首先，在零级近似下，和右面第二项相比可以略去左面的第一项，于是零级的电子扰动速度为

$$\boldsymbol{v}_{e\omega}^0 \times \boldsymbol{b} = -\frac{e}{m_e\omega_e}\boldsymbol{E}_\omega.$$

然后，在电子运动方程的左面用已求出的零级的 $\boldsymbol{v}_{e\omega}^0$ 代入，由此求出下一级的电子扰动速度

$$\frac{1}{c}\boldsymbol{v}_{e\omega}^0\times\boldsymbol{b} = -i\frac{e}{m_e c\omega}\boldsymbol{E}_\omega\times\boldsymbol{b} - i\frac{\omega_e}{c\omega}(\boldsymbol{v}_{e\omega}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{b},$$

$$\boldsymbol{v}_{e\omega} = i\frac{e}{m_e}\frac{\omega}{\omega_e^2}\boldsymbol{E}_\omega + \frac{e}{m_e\omega_e}\boldsymbol{E}_\omega\times\boldsymbol{b}.$$

由于在 $n_{e\omega}$ 的表达式中出现 $v_{e\omega x}$ 和 $\nabla\cdot\boldsymbol{v}_{e\omega}$ 的项，故下面来分别求出它们.

$$v_{e\omega x} = i\frac{e}{m_e\omega_e}\frac{\omega}{\omega_e}E_{\omega x} + \frac{e}{m_e\omega_e}E_{\omega y} \approx \frac{e}{m_e\omega_e}E_{\omega y},$$

$$\Longrightarrow v_{ekx} = -i\frac{ek_y}{m_e\omega_e}\varphi_k,$$

其中用到了 $\omega/\omega_e \ll 1$. 而

$$\nabla\cdot\boldsymbol{v}_{e\omega}=\mathrm{i}\frac{e}{m_e}\frac{\omega}{\omega_e^2}\nabla\cdot\boldsymbol{E}_\omega+\frac{e}{m_e\omega_e}\nabla\cdot(\boldsymbol{E}_\omega\times\boldsymbol{b}).$$

代入，得

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}_\omega=-\nabla^2\varphi,\Longrightarrow\nabla\cdot\boldsymbol{E}_\omega=k^2\varphi_k,$$

及

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{E}_\omega\times\boldsymbol{b})=\boldsymbol{b}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{E}_\omega)=(\nabla\times\boldsymbol{E}_\omega)_z=\frac{\mathrm{i}\omega}{c}B_{\omega z},$$

其中的 $B_{\omega z}$ 又可以通过麦克斯韦方程和 $E_{\omega x}$ 及 $v_{e\omega x}$ 相联系. 因为按安培定律有

$$\nabla\times\boldsymbol{B}_1=\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{E}_1}{\partial t}+\frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}_1.$$

上式的左面可进一步写成

$$(\nabla\times\boldsymbol{B}_1)_x=\frac{\partial B_{1z}}{\partial y},\Longrightarrow(\nabla\times\boldsymbol{B}_k)_x=\mathrm{i}k_yB_{kz},$$

而右面为（其中，和电子流速 v_{ex} 相比略去了离子流速 v_{ix} 对电流的贡献）

$$-\mathrm{i}\frac{\omega}{c}E_{\omega x}-\frac{4\pi n_0e}{c}v_{e\omega x}.$$

将 $v_{e\omega x}$ 代入，并对其空间量进一步作傅氏展开后，上式成为

$$\frac{\omega k_x}{c}\varphi_k+\mathrm{i}\frac{k_y}{c\omega_e}\frac{4\pi n_0e^2}{m_e}\varphi_k=\frac{\omega k_x}{c}\varphi_k+\mathrm{i}\frac{\omega_{pe}k_y}{c}\frac{\omega_{pe}}{\omega_e}\varphi_k.$$

考虑到 $\omega_{pe}\sim\omega_e\gg\omega$，故只须保留上式的第二项. 然后通过把安培定律的左、右边相等，就得到

$$B_{kz}\approx\frac{\omega_{pe}^2}{c\omega_e}\varphi_k.\qquad(11.29)$$

最后，得出

$$\nabla\cdot\boldsymbol{v}_{ek}=\mathrm{i}\frac{e}{m_e}\frac{\omega}{\omega_e^2}k^2\varphi_k+\frac{e}{m_e\omega_e}\frac{\mathrm{i}\omega}{c}\frac{\omega_{pe}^2}{c\omega_e}\varphi_k=\mathrm{i}\frac{e}{m_e}\frac{\omega}{\omega_e^2}k^2\left(1+\frac{\omega_{pe}^2}{c^2k^2}\right)\varphi_k.\qquad(11.30)$$

把它和前面已得出的 v_{ekx} 都代入 n_{ek}，可得

$$n_{ek}=-\frac{\mathrm{i}}{\omega}\left[n_0v_{ekx}\frac{\partial\ln n_0}{\partial x}+n_0\nabla\cdot\boldsymbol{v}_{ek}\right]$$

$$\left(\text{由 }\varepsilon_n=\frac{\partial\ln n_0}{\partial x}\right)=\frac{n_0ek^2\varphi_k}{m_e\omega_e^2}\left(1+\frac{\omega_{pe}^2}{c^2k^2}-\frac{k_y\omega_e}{k^2\omega}\varepsilon_n\right).$$

然后把上式和早先求出的 n_{ik} 一同代入泊松方程，就立刻得出色散方程

$$1-\frac{\omega_{pi}^2}{\tilde{\omega}^2}-\frac{\omega_{pe}^2}{\omega_e^2}\left(1+\frac{\omega_{pe}^2}{c^2k^2}-\frac{k_y\omega_e}{k^2\omega}\varepsilon_n\right)=0.\qquad(11.31)$$

当不计入密度梯度的影响（即在色散关系中令 $\varepsilon_n=0$，但 $v_0\propto\varepsilon_n\neq0$）时，色散方程的解是

$$\tilde{\omega}^2=(\omega-k_yv_0)^2=\frac{\omega_{pi}^2}{1+\dfrac{\omega_{pe}^2}{\omega_e^2}\left(1+\dfrac{\omega_{pe}^2}{c^2k^2}\right)}.$$

当 $c^2k^2\to\infty$ 及 $\omega_{pe}^2/\omega_e^2\gg1$ 时，有

$$\tilde{\omega}^2=\frac{\omega_{pi}^2}{\omega_{pe}^2}\omega_e^2=\omega_e\omega_i=\omega_{LH}^2,$$

也即是低杂波. 但如果计入密度梯度效应（即 $\varepsilon_n\neq0$），色散方程将成为 ω 的三次代数方程，并在 $\varepsilon_n<0$ 时有一对共轭的复根，因此出现所谓的"低杂漂移波不稳定性". 它在激波、θ-箍缩，及地球的磁层和磁尾中都有可能存在.

如果还想进一步考虑温度梯度（$\partial T_e(x)/\partial x\neq0$）的影响，则由于电子和离子的热运动引起的动理学效应往往起重要作用，这时仅仅用流体描述已经无法提供正确的结果. 因而必须发展漂移波的动理学描述.

11.2　密度不均匀时弗拉索夫方程的平衡解

对密度不均匀的磁化（设 $\boldsymbol{B}_0=B_0\boldsymbol{e}_z$，$B_0=$常数）等离子体，其稳态（平衡或零阶）弗拉索夫方程是

$$\boldsymbol{v}\cdot\nabla f_{\alpha0}+\boldsymbol{v}\times\omega_\alpha\cdot\nabla_v f_{\alpha0}=0. \tag{11.32}$$

显然，空间均匀的热平衡分布——麦克斯韦分布——是上述方程的一个平凡解，但我们需要的是平衡弗拉索夫方程的空间依赖解 $f_{\alpha0}(\boldsymbol{r},v^2)$. 为此，在不失一般性的情况下，令密度的空间不均匀只在 $\boldsymbol{e}_x$ 方向：$\nabla n_0(\boldsymbol{r})=\partial n_0(x)/\partial x\neq0$. 故 $f_{\alpha0}(\boldsymbol{r},v^2)=f_{\alpha0}(x,v^2)$. 于是平衡方程可简写成

$$v_x\frac{\partial f_{\alpha0}(x)}{\partial x}+v_y\omega_\alpha\frac{\partial f_{\alpha0}(x)}{\partial v_x}-v_x\omega_\alpha\frac{\partial f_{\alpha0}(x)}{\partial v_y}=0. \tag{11.33}$$

从上式可以看出，如果令 $f_{\alpha0}(x,\boldsymbol{v},v^2)=f_{\alpha0}(x,v_y,v^2)$，即使上面方程中的第二项为零，则可以得到进一步的简化：

$$\frac{\partial f_{\alpha0}(x)}{\partial x}-\omega_\alpha\frac{\partial f_{\alpha0}(x)}{\partial v_y}=0.$$

这样很容易猜测其解有如下形式

$$f_{\alpha0}(x,v_y)=(C_1x+C_2v_y)f_{\rm M}(v^2),$$

其中 C_1,C_2 是待定常数. 将上式代入前方程后可定出它们间的一个关系式

$$C_1-\omega_\alpha C_2=0,\ \Longrightarrow\ C_2=\frac{C_1}{\omega_\alpha},$$

而 C_1 则由归一化条件给出. 对空间均匀的麦克斯韦分布通常取如下的归一条件

$$\int f_{\rm M}(v^2)\mathrm{d}\boldsymbol{v}=1\quad 即\quad n_{\alpha0}\int f_{\rm M}(v^2)\mathrm{d}\boldsymbol{v}=n_{\alpha0},$$

其中 $n_{\alpha0}$ 是平衡的带电粒子密度. 在密度不均匀的情况下，可以将它取成空间某参考点的密度值，下面我们令它代表坐标原点的密度：$n_{\alpha0}(0)$. 这样空间任一点的密度就由下面的归一化条件给出

$$\begin{aligned}n_{\alpha0}(x)&=n_{\alpha0}(0)\int f_{\alpha0}(x,v_y,v^2)\mathrm{d}\boldsymbol{v}\\&=n_{\alpha0}(0)\int C_1(1+v_y/\omega_\alpha)f_{\rm M}(v^2)\mathrm{d}\boldsymbol{v}=C_1xn_{\alpha0}(0),\end{aligned}$$

所以可以由此定出

$$C_1=\left.\frac{\mathrm{d}\ln n_\alpha(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}\equiv\epsilon_n(0). \tag{11.34}$$

在物理上它代表密度梯度特征长度的倒数 L_n^{-1}. 所以最后，可以将这种情况下弗拉索夫方程的平衡解写成

$$f_{\alpha0}(x,\boldsymbol{v})=\left[1+\epsilon_n\left(x+\frac{v_y}{\omega_\alpha}\right)\right]f_{\alpha\rm M}(v^2). \tag{11.35}$$

在这种分布下带电粒子在 $\boldsymbol{e}_y$ 方向，也即在和磁场及不均匀方向都垂直的方向上有整体的漂移速度

$$v_{\rm D\alpha}=\int v_yf_{\alpha0}(x,\boldsymbol{v})\mathrm{d}\boldsymbol{v}=\frac{T_\alpha}{m_\alpha\omega_\alpha}\epsilon_n,$$

这也就是流体描述中的平衡漂移速度.

11.3　动理学漂移电磁波

在本节，令 $n_0=n_0(x)$，$\boldsymbol{B}_0=B_0\boldsymbol{e}_z$，$\boldsymbol{B}_1\neq0$，$\boldsymbol{E}_1\neq0$.

取如图 11.3 的坐标系：

$$\boldsymbol{k}=(k_\perp\cos\phi,k_\perp\sin\phi,k_\parallel), \tag{11.36}$$

$$\boldsymbol{v}=(v_\perp\cos\theta,v_\perp\sin\theta,v_\parallel). \tag{11.37}$$

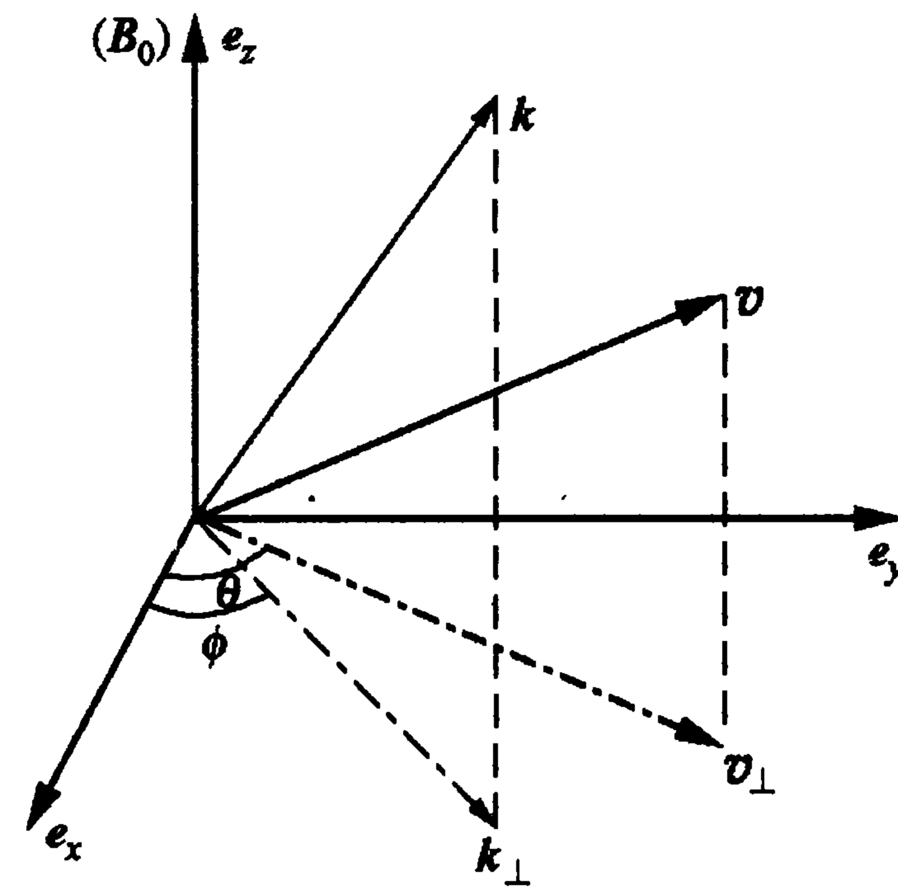


图 11.3　磁场，波矢及速度的坐标图

并取平衡速度分布如式(11.35).

对扰动量取其傅氏分量为：

$$(f_{\alpha1},\boldsymbol{E}_1,\boldsymbol{B}_1)(x,t)\propto(f_{\alpha k},\boldsymbol{E}_k,\boldsymbol{B}_k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}.$$

其中 $(f_{\alpha k},\boldsymbol{E}_k,\boldsymbol{B}_k)=(f_{\alpha k},\boldsymbol{E}_k,\boldsymbol{B}_k)(x)|_{x=0}$，即对空间慢变量取参照点处的值，这称为局部近似；也可以将上述空间慢变量在参照点附近作泰勒展开(详见文献[3])，求出对 x 有线性依赖的非局部表达式，但本节只采用局部近似. 然后采取沿未扰动轨道积分法，有

线性弗拉索夫方程的解

$$f_{\alpha k} = -\frac{q_\alpha}{m_\alpha}\int_0^\infty \left(\boldsymbol{E}_k + \frac{1}{c}\boldsymbol{v}(\tau) \times \boldsymbol{B}_k\right) \cdot \nabla_v f_{\alpha 0} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\psi(\tau)} \mathrm{d}\tau, \tag{11.38}$$

其中

$$\psi(\tau) = \boldsymbol{k} \cdot \Delta \boldsymbol{X} - \omega\tau = \frac{k_\perp v_\perp}{\omega_\alpha}\sin(\omega_\alpha \tau + \phi - \theta) - \frac{k_\perp v_\perp}{\omega_\alpha}\sin(\phi - \theta) + k_\parallel v_\parallel \tau - \omega\tau. \tag{11.39}$$

在推导上式时，利用了式(11.36)、(11.37)及粒子在均匀磁场中的运动轨道公式(见 10.1.2 小节中(10.2)式及其后的一些公式).

$$\boldsymbol{k} \cdot \Delta \boldsymbol{X} = \frac{k_x}{\omega_\alpha}[v_x(\tau)\sin\omega_\alpha\tau + v_y(\tau)(1 - \cos\omega_\alpha\tau)] + \frac{k_y}{\omega_\alpha}[-v_x(\tau)(1 - \cos\omega_\alpha\tau) + v_y(\tau)\sin\omega_\alpha\tau] + k_\parallel v_\parallel \tau.$$

在式(11.38)中被积函数的诸项可以进一步简化. 第一个因子可变成

$$\boldsymbol{E}_k + \frac{1}{c}\boldsymbol{v}(\tau) \times \boldsymbol{B}_k = \boldsymbol{E}_k + \frac{1}{c}\boldsymbol{v}(\tau) \times \left(\frac{1}{\omega}\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{E}_k\right) = \left(1 - \frac{1}{\omega}\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{v}(\tau)\right)\boldsymbol{E}_k + \frac{1}{\omega}(\boldsymbol{v}(\tau) \cdot \boldsymbol{E}_k)\boldsymbol{k}.$$

而第二个因子为

$$\nabla_v f_{\alpha 0} = \frac{\varepsilon_n}{\omega_\alpha} f_{\alpha M} \boldsymbol{e}_y + \left(-\frac{m_\alpha}{T_\alpha}\boldsymbol{v}\right) f_{\alpha 0} \approx \left(\frac{\varepsilon_n}{\omega_\alpha}\boldsymbol{e}_y - \frac{m_\alpha}{T_\alpha}\boldsymbol{v}\right) f_{\alpha M}.$$

上式最后在 $f_{\alpha 0}$ 中略去了含 ε_n 的小量，故 $f_{\alpha 0} \approx f_{\alpha M}$. 这两个因子合起来为

$$\frac{1}{f_{\alpha M}}\left(\boldsymbol{E}_k + \frac{1}{c}\boldsymbol{v}(\tau) \times \boldsymbol{B}_k\right) \cdot \nabla_v f_{\alpha 0}$$

$$= \frac{\varepsilon_n}{\omega_\alpha}\left(1 - \frac{\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{v}(\tau)}{\omega}\right) E_{ky} + \frac{\varepsilon_n k_y}{\omega_\alpha \omega}(\boldsymbol{v}(\tau) \cdot \boldsymbol{E}_k) - \frac{m_\alpha}{T_\alpha}\boldsymbol{E}_k \cdot \boldsymbol{v}(\tau)$$

$$= -\frac{m_\alpha}{T_\alpha}\left[\left(1 - \frac{k_y v_D}{\omega}\right)(\boldsymbol{v}(\tau) \cdot \boldsymbol{E}_k) - v_D\left(1 - \frac{\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{v}(\tau)}{\omega}\right) E_{ky}\right]$$

$$= -\frac{m_\alpha}{T_\alpha \omega}[(\omega - \omega^*)(\boldsymbol{v}(\tau) \cdot \boldsymbol{E}_k) - (\omega - \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{v}(\tau)) v_D E_{ky}],$$

其中用到了 $v_D = \varepsilon_n T_\alpha / (m_\alpha \omega_\alpha)$ 和 $\omega^* = k_y v_D$. 代入

$$v_x(\tau) = v_x \cos(\omega_\alpha \tau) + v_y \sin(\omega_\alpha \tau) = v_\perp \cos(\omega_\alpha \tau - \theta),$$

$$v_y(\tau) = -v_x \sin(\omega_\alpha \tau) + v_y \cos(\omega_\alpha \tau) = -v_\perp \sin(\omega_\alpha \tau - \theta),$$

$$k_x v_x(\tau) + k_y v_y(\tau) = k_\perp v_\perp \cos(\omega_\alpha \tau + \phi - \theta).$$

最后可得被积函数的非指数部分

$$\left(\boldsymbol{E}_k + \frac{1}{c}\boldsymbol{v}(\tau) \times \boldsymbol{B}_k\right) \cdot \nabla_v f_{\alpha 0}$$

$$\approx -\frac{m_\alpha}{T_\alpha \omega} f_{\alpha M}(\omega - \omega^*) v_\perp \cos(\omega_\alpha \tau - \theta) E_x + \frac{m_\alpha}{T_\alpha \omega} f_{\alpha M}[(\omega - \omega^*) v_\perp \sin(\omega_\alpha \tau - \theta) + (\omega - \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{v}(\tau)) v_D] E_y - \frac{m_\alpha}{T_\alpha \omega} f_{\alpha M}(\omega - \omega^*) v_\parallel E_z,$$

上式中已略去了 $\boldsymbol{E}_k$ 的下标 k. 将上式代入(11.38)式可将 $f_{\alpha k}$ 形式上写成

$$f_{\alpha k} = \hat{f}_{\alpha x} E_x + \hat{f}_{\alpha y} E_y + \hat{f}_{\alpha z} E_z,$$

其中 $\hat{f}_{\alpha i}(i = x, y, z)$ 是一些对 τ 的积分. 这些积分一共有四项，其中 $\hat{f}_{\alpha y}$ 中含有两项，其第二项可直接积分.

$$v_D \int_0^\infty (\omega - \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{v}(\tau)) \exp[-\mathrm{i}(\boldsymbol{k} \cdot \Delta \boldsymbol{X}(\tau) - \omega\tau)] \mathrm{d}\tau$$

$$= v_D \int_0^\infty \exp[-\mathrm{i}(\boldsymbol{k} \cdot \Delta \boldsymbol{X}(\tau) - \omega\tau)] \mathrm{d}(\omega\tau - \boldsymbol{k} \cdot \Delta \boldsymbol{X}(\tau))$$

$$= \frac{v_D}{\mathrm{i}} \exp[-\mathrm{i}(\boldsymbol{k} \cdot \Delta \boldsymbol{X}(\tau) - \omega\tau)] \Big|_0^\infty$$

$$= \mathrm{i} v_D.$$

其他的三项分别是含 $(\omega - \omega^*)(\boldsymbol{v}(\tau) \cdot \boldsymbol{E}_k)$ 的三项

$$\int_0^\infty v_x(\tau) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\psi(\tau)} \mathrm{d}\tau, \quad \int_0^\infty v_y(\tau) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\psi(\tau)} \mathrm{d}\tau, \quad \int_0^\infty v_\parallel(\tau) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\psi(\tau)} \mathrm{d}\tau.$$

利用

$$e^{-ia\sin\phi} = \sum_n J_n(a)e^{-in\phi},$$

可以得出

$$e^{-i\psi(\tau)} = \sum_{n,m} J_n J_m\left(\frac{k_\perp v_\perp}{\omega_a}\right) e^{i(\omega - n\omega_a - k_\parallel v_\parallel)\tau} e^{-i(n-m)(\phi-\theta)}. \quad (11.40)$$

于是可以将所余三个积分依次积出：

$$\int v_x(\tau)e^{-i\psi(\tau)}d\tau$$

$$= v_\perp \int \cos(\omega_a\tau - \theta)e^{-i\psi(\tau)}d\tau$$

$$= \frac{v_\perp}{2}\sum_{n,m} J_n J_m\left(\frac{k_\perp v_\perp}{\omega_a}\right)e^{-i(n-m)(\phi-\theta)}$$

$$\times \int_0^\infty d\tau\left[e^{i\omega_a\tau - i\theta}e^{i(\omega - n\omega_a - k_\parallel v_\parallel)\tau} + e^{-i\omega_a\tau + i\theta}e^{i(\omega - n\omega_a - k_\parallel v_\parallel)\tau}\right]$$

$$= i\frac{v_\perp}{2}\sum_{n,m} J_n J_m e^{-i(n-m)\phi}\left[\frac{\exp[i(n-m-1)\theta]}{\omega - (n-1)\omega_a - k_\parallel v_\parallel}\right.$$

$$\left. + \frac{\exp[i(n-m+1)\theta]}{\omega - (n+1)\omega_a - k_\parallel v_\parallel}\right]$$

$$= i\frac{v_\perp}{2}\sum_{n,m} J_m\left(\frac{k_\perp v_\perp}{\omega_a}\right)e^{-i(n-m)(\phi-\theta)}\left[\frac{J_{n+1}e^{-i\phi} + J_{n-1}e^{i\phi}}{\omega - n\omega_a - k_\parallel v_\parallel}\right],$$

$$\int v_y(\tau)e^{-i\psi(\tau)}d\tau$$

$$= -v_\perp \int \sin(\omega_a\tau - \theta)e^{-i\psi(\tau)}d\tau$$

$$= -\frac{v_\perp}{2}\sum_{n,m} J_n J_m e^{-i(n-m)\phi}\left[\frac{\exp[i(n-m-1)\theta]}{\omega - (n-1)\omega_a - k_\parallel v_\parallel}\right.$$

$$\left. - \frac{\exp[i(n-m+1)\theta]}{\omega - (n+1)\omega_a - k_\parallel v_\parallel}\right]$$

$$= -\frac{v_\perp}{2}\sum_{n,m} J_m\left(\frac{k_\perp v_\perp}{\omega_a}\right)e^{-i(n-m)(\phi-\theta)}\left[\frac{J_{n+1}e^{-i\phi} - J_{n-1}e^{i\phi}}{\omega - n\omega_a - k_\parallel v_\parallel}\right],$$

$$\int v_\parallel(\tau)e^{-i\psi(\tau)}d\tau = \frac{v_\parallel}{i}\sum_{n,m} e^{-i(n-m)(\phi-\theta)}\frac{J_n J_m}{\omega - n\omega_a - k_\parallel v_\parallel}.$$

所以在完成了速度空间的积分后，我们得出

$$\hat{f}_{ax} = i\frac{q_a}{T_a\omega}(\omega - \omega^*)f_{aM}\frac{v_\perp}{2}\sum_{n,m}\frac{J_{n+1}e^{-i\phi} + J_{n-1}e^{i\phi}}{\omega - n\omega_a - k_\parallel v_\parallel}J_m e^{-i(n-m)(\phi-\theta)}, \quad (11.41)$$

$$\hat{f}_{ay} = \frac{q_a}{T_a\omega}\Big[iv_D f_{aM}$$

$$- (\omega - \omega^*)f_{aM}\frac{v_\perp}{2}\sum_{n,m}\frac{J_{n+1}e^{-i\phi} - J_{n-1}e^{i\phi}}{\omega - n\omega_a - k_\parallel v_\parallel}J_m e^{-i(n-m)(\phi-\theta)}\Big], \quad (11.42)$$

$$\hat{f}_{az} = i\frac{q_a}{T_a\omega}(\omega - \omega^*)f_{aM}v_\parallel\sum_{n,m}\frac{J_n J_m}{\omega - n\omega_a - k_\parallel v_\parallel}e^{-i(n-m)(\phi-\theta)}. \quad (11.43)$$

由(11.41)—(11.43)式可以直接得出电导张量的各分量

$$\sigma_{ij} = \sum_a n_{a0}q_a\int v_i\hat{f}_{aj}d\boldsymbol{v}, \quad i,j = x,y,z. \quad (11.44)$$

而等价介电张量为

$$\overleftrightarrow{\varepsilon} = \overleftrightarrow{I} + \frac{4\pi i}{\omega}\overleftrightarrow{\sigma}, \quad (11.45)$$

色散张量为

$$\overleftrightarrow{D} = \frac{c^2}{\omega^2}\boldsymbol{kk} - \frac{c^2k^2}{\omega^2}\overleftrightarrow{I} + \overleftrightarrow{\varepsilon} = \overleftrightarrow{D}^0 + i\frac{4\pi}{\omega}\overleftrightarrow{\sigma}. \quad (11.46)$$

在本节取的坐标系下，$\overleftrightarrow{D}^0$ 的各分量是

$$D^0_{xx} = 1 + \frac{c^2}{\omega^2}(k_x^2 - k^2) = 1 - \frac{c^2}{\omega^2}(k_\parallel^2 + k_\perp^2\sin^2\phi),$$

$$D^0_{xy} = \frac{c^2}{\omega^2}k_xk_y = \frac{c^2}{\omega^2}k_\perp^2\sin\phi\cos\phi,$$

$$D^0_{xz} = \frac{c^2}{\omega^2}k_xk_z = \frac{c^2}{\omega^2}k_\parallel k_\perp\cos\phi,$$

$$D^0_{yx} = \frac{c^2}{\omega^2}k_yk_x = \frac{c^2}{\omega^2}k_\perp^2\sin\phi\cos\phi,$$

$$D^0_{yy} = 1 + \frac{c^2}{\omega^2}(k_y^2 - k^2) = 1 - \frac{c^2}{\omega^2}(k_\parallel^2 + k_\perp^2\cos^2\phi),$$

$$D^0_{yz}=\frac{c^2}{\omega^2}k_yk_z=\frac{c^2}{\omega^2}k_\parallel k_\perp\sin\phi,$$

$$D^0_{zx}=\frac{c^2}{\omega^2}k_zk_x=\frac{c^2}{\omega^2}k_\parallel k_\perp\cos\phi,$$

$$D^0_{zy}=\frac{c^2}{\omega^2}k_zk_y=\frac{c^2}{\omega^2}k_\parallel k_\perp\sin\phi,$$

$$D^0_{zz}=1+\frac{c^2}{\omega^2}(k_z^2-k^2)=1-\frac{c^2}{\omega^2}k_\perp^2.$$

下面,以 σ_{xx} 为例,来给出电导张量各分量的具体推导过程. 按定义

$$\sigma_{xx}=\sum_\alpha n_{\alpha0}q_\alpha\frac{\mathrm{i}q_\alpha}{\omega T_\alpha}(\omega-\omega^*)\int v_\perp\,\mathrm{d}v_\perp\,\mathrm{d}v_\parallel\,\frac{v_\perp}{2}v_\perp\,f_{\alpha\mathrm{M}}$$

$$\times\sum_{n,m}\mathrm{J}_m\frac{\mathrm{J}_{n+1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi}+\mathrm{J}_{n-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}}{\omega-n\omega_\alpha-k_\parallel v_\parallel}\int\mathrm{d}\theta\,\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(n-m)(\phi-\theta)}.$$

利用

$$\int\mathrm{d}\theta\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-m)\theta}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(n-m)\phi}=2\pi\delta_{n+1,m}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi},$$

$$\int\mathrm{d}\theta\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-m)\theta}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(n-m)\phi}=2\pi\delta_{n-1,m}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi},$$

有

$$\sigma_{xx}=\mathrm{i}\sum_\alpha\frac{n_{\alpha0}q_\alpha^2}{\omega T_\alpha}(\omega-\omega^*)\,\frac{\pi}{2}\int v_\perp^3\,\mathrm{d}v_\perp\,\mathrm{d}v_\parallel$$

$$\times\sum_n\left[\frac{\mathrm{J}_{n+1}^2+\mathrm{J}_{n+1}\mathrm{J}_{n-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\phi}}{\omega-n\omega_\alpha-k_\parallel v_\parallel}+\frac{\mathrm{J}_{n-1}^2+\mathrm{J}_{n+1}\mathrm{J}_{n-1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\phi}}{\omega-n\omega_\alpha-k_\parallel v_\parallel}\right]f_{\alpha\mathrm{M}}$$

$$=\frac{\mathrm{i}}{2}\sum_\alpha\frac{\pi n_{\alpha0}q_\alpha^2}{\omega T_\alpha}(\omega-\omega^*)$$

$$\times\sum_n\int v_\perp^3\,\mathrm{d}v_\perp\,(\mathrm{J}_{n+1}^2+\mathrm{J}_{n-1}^2+2\mathrm{J}_{n+1}\mathrm{J}_{n-1}\cos2\phi)f_{\alpha\mathrm{M}\perp}$$

$$\times\int\frac{\mathrm{d}v_\parallel}{\omega-n\omega_\alpha-k_\parallel v_\parallel}f_{\alpha\mathrm{M}\parallel}.$$

其中后一个积分可直接用等离子体色散函数 $Z(\zeta_n)$ 来表示,

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f_{\alpha\mathrm{M}\parallel}(v_\parallel^2)}{\omega-n\omega_\alpha-k_\parallel v_\parallel}\mathrm{d}v_\parallel=-\frac{\zeta_nZ(\zeta_n)}{\omega-n\omega_\alpha},\quad\zeta_n=\sqrt{\frac{m_\alpha}{2T_\alpha}}\,\frac{\omega-n\omega_\alpha}{k_\parallel}.\tag{11.47}$$

为了计算第一个积分,先对其被积函数作一些简化. 因为

$$2\mathrm{J}_{n+1}\mathrm{J}_{n-1}\cos2\phi=[(\mathrm{J}_{n+1}(av_\perp)+\mathrm{J}_{n-1}(av_\perp))^2-\mathrm{J}_{n+1}^2(av_\perp)$$

$$-\mathrm{J}_{n-1}^2(av_\perp)]\cos2\phi$$

$$=\left[\left(\frac{2n}{av_\perp}\right)^2\mathrm{J}_n^2-\mathrm{J}_{n+1}^2-\mathrm{J}_{n-1}^2\right]\cos2\phi.$$

故有

$$\mathrm{J}_{n+1}^2+\mathrm{J}_{n-1}^2+2\mathrm{J}_{n+1}\mathrm{J}_{n-1}\cos2\phi$$

$$=(\mathrm{J}_{n+1}^2+\mathrm{J}_{n-1}^2)(1-\cos2\phi)+\frac{4n^2}{a^2v_\perp^2}\mathrm{J}_n^2\cos2\phi.$$

再利用

$$f_{\alpha\mathrm{M}v_\perp}=\frac{m_\alpha}{2\pi T_\alpha}\mathrm{e}^{-\mu^2v_\perp^2},\quad\mu^2=\frac{m_\alpha}{2T_\alpha},$$

及

$$\int_0^\infty v_\perp^3\,\mathrm{e}^{-\mu^2v_\perp^2}\mathrm{J}_n^2(av_\perp)\mathrm{d}v_\perp$$

$$=\frac{1}{2\mu^4}\mathrm{e}^{-a^2/(2\mu^2)}\left[\left(1-\frac{a^2}{2\mu^2}\right)\mathrm{I}_n\left(\frac{a^2}{2\mu^2}\right)+\frac{a^2}{2\mu^2}\mathrm{I}_n'\left(\frac{a^2}{2\mu^2}\right)\right]$$

$$\equiv\frac{1}{2\mu^4}\mathrm{e}^{-b}[(1-b)\mathrm{I}_n(b)+b\mathrm{I}_n'(b)],$$

$$b=\frac{a^2}{2\mu^2}=\frac{k_\perp^2\,v_t^2}{\omega_\alpha^2},\quad v_t^2=\frac{T}{m},$$

与

$$\int_0^\infty v_\perp\,\mathrm{e}^{-\mu^2v_\perp^2}\mathrm{J}_n^2(av_\perp)\mathrm{d}v_\perp=\frac{1}{2\mu^2}\mathrm{e}^{-b}\mathrm{I}_n(b),$$

于是最后可得

$$\sigma_{xx}=-\frac{\mathrm{i}}{8}\sum_\alpha\frac{\omega_{p\alpha}^2m_\alpha}{\omega T_\alpha}(\omega-\omega^*)\sum_n\frac{\zeta_nZ(\zeta_n)}{\omega-n\omega_\alpha}\,\frac{m_\alpha}{2\pi T_\alpha}$$

$$\times\Big\{\frac{1}{2\mu^4}\mathrm{e}^{-b}[(1-b)(\mathrm{I}_{n+1}(b)+\mathrm{I}_{n-1}(b))$$

$$+b(\mathrm{I}_{n+1}'(b)+\mathrm{I}_{n-1}'(b))](1-\cos2\phi)$$

$$+\frac{4n^2}{a^2}\frac{1}{2\mu^2}e^{-b}I_n(b)\cos 2\phi\Big\}.$$

考虑到

$$I_{n+1}+I_{n-1}=2I_n',\quad I_{n+1}'+I_{n-1}'=2I_n'',\quad \frac{m_\alpha}{2\pi T_\alpha}\frac{1}{2\mu^4}=\frac{T_\alpha}{\pi m_\alpha},$$

最后有

$$\sigma_{xx}=-\frac{i}{4\pi}\sum_\alpha\frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega}(\omega-\omega^*)\sum_n\frac{\zeta_n Z(\zeta_n)}{\omega-n\omega_\alpha}$$
$$\times\left\{\left[e^{-b}I_n'+b(e^{-b}I_n')'\right](1-\cos 2\phi)+\frac{n^2}{b}e^{-b}I_n(b)\cos 2\phi\right\},$$

其中

$$b=\left(\frac{k_\perp v_{\alpha t}}{\omega_\alpha}\right)^2=(k_\perp r_{\alpha\perp})^2=\frac{a^2}{2\mu^2}.$$

若令

$$A_n\equiv A_n(b)=e^{-b}I_n(b),\quad B_n\equiv B_n(b)=e^{-b}I_n'(b),\tag{11.48}$$

则可以得出更简明的表达式

$$\sigma_{xx}=-\frac{i}{4\pi}\sum_\alpha\frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega}(\omega-\omega^*)\sum_n\frac{\zeta_n Z(\zeta_n)}{\omega-n\omega_\alpha}$$
$$\times\left[(B_n+bB_n')(1-\cos 2\phi)+\frac{n^2}{b}A_n\cos 2\phi\right].\tag{11.49}$$

用同样的方法,可以求出色散张量的其他分量. 下面将直接列出它们的表达式

$$\sigma_{xy}=\frac{1}{4\pi}\sum_\alpha\frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega}(\omega-\omega^*)\sum_n\frac{\zeta_n Z(\zeta_n)}{\omega-n\omega_\alpha}$$
$$\times\left[\frac{b}{4}(A_{n+2}-A_{n-2})+\left(1-\frac{1}{b}\right)nA_n\right.$$
$$\left.-i\sin 2\phi bA_n'\right],\tag{11.50}$$

$$\sigma_{xz}=-\frac{i}{4\pi}\sum_\alpha\frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega}(\omega-\omega^*)\frac{k_\perp}{k_\parallel\omega_\alpha}\sum_n[1+\zeta_n Z(\zeta_n)]$$
$$\times\left[\cos\phi\frac{n}{b}A_n-i\sin\phi A_n'\right],\tag{11.51}$$

$$\sigma_{yx}=-\frac{1}{4\pi}\sum_\alpha\frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega}(\omega-\omega^*)\sum_n\frac{\zeta_n Z(\zeta_n)}{\omega-n\omega_\alpha}$$
$$\times\left[\frac{b}{4}(A_{n+2}-A_{n-2})+\left(1-\frac{1}{b}\right)nA_n\right.$$
$$\left.+i\sin 2\phi bA_n'\right],\tag{11.52}$$

$$\sigma_{yy}=-\frac{i}{4\pi}\sum_\alpha\frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega}(\omega-\omega^*)\sum_n\frac{\zeta_n Z(\zeta_n)}{\omega-n\omega_\alpha}$$
$$\times\left[(B_n+bB_n')(1+\cos 2\phi)-\frac{n^2}{b}A_n\cos 2\phi\right],\tag{11.53}$$

$$\sigma_{yz}=-\frac{1}{4\pi}\sum_\alpha\frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega}(\omega-\omega^*)\frac{k_\perp}{k_\parallel\omega_\alpha}\sum_n[1+\zeta_n Z(\zeta_n)]$$
$$\times\left[i\sin\phi\frac{n}{b}A_n-\cos\phi A_n'\right],\tag{11.54}$$

$$\sigma_{zx}=-\frac{i}{4\pi}\sum_\alpha\frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega}(\omega-\omega^*)\frac{k_\perp}{k_\parallel\omega_\alpha}\sum_n[1+\zeta_n Z(\zeta_n)]$$
$$\times\left[\cos\phi\frac{n}{b}A_n+i\sin\phi A_n'\right],\tag{11.55}$$

$$\sigma_{zy}=-\frac{1}{4\pi}\sum_\alpha\frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega}(\omega-\omega^*)\frac{k_\perp}{k_\parallel\omega_\alpha}\sum_n[1+\zeta_n Z(\zeta_n)]$$
$$\times\left[i\sin\phi\frac{n}{b}A_n+\cos\phi A_n'\right],\tag{11.56}$$

$$\sigma_{zz}=\frac{i}{4\pi}\sum_\alpha\frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega}(\omega-\omega^*)\frac{1}{\sqrt{2}k_\parallel v_{\alpha t}}\sum_n[Z(\zeta_n)+\zeta_n Z'(\zeta_n)]A_n.\tag{11.57}$$

11.4 动理学漂移静电波

这一般发生在低 β 的磁化等离子体中. 这时与平衡磁场 $\boldsymbol{B}_0$ 相比,$\boldsymbol{B}_1\sim 0$,故只剩下扰动电场——即所谓的漂移静电波. 这时可以令

$$\boldsymbol{E}_1(\boldsymbol{r},t)=-\nabla\varphi(\boldsymbol{r},t),\quad 和\quad \varphi(\boldsymbol{r},t)=\varphi(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_y y+k_z z-\omega t)}. \tag{11.58}$$

同上节一样，在弱不均匀条件下可取局域近似 $\varphi(x)\sim\varphi(0)$，于是有

$$\boldsymbol{E}_k=-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\varphi(0)\equiv-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\varphi.$$

通过对静电波的弗拉索夫方程作沿未扰动轨道积分，就可得

$$f_{\alpha k}=-\frac{q_\alpha}{m_\alpha}\int_0^\infty \mathrm{d}\tau \boldsymbol{E}_k\cdot\nabla_{v(\tau)}f_{\alpha 0}(\boldsymbol{v}(\tau))\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\Delta\boldsymbol{X}(\tau)-\omega\tau)}$$

$$=\mathrm{i}\varphi(0)\frac{q_\alpha}{m_\alpha}\int_0^\infty \mathrm{d}\tau\boldsymbol{k}\cdot\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{v}(\tau)}f_{\alpha 0}(\boldsymbol{v}(\tau))\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\psi(\tau)}.$$

其中

$$\psi(\tau)=\boldsymbol{k}\cdot\Delta\boldsymbol{X}(\tau)-\omega\tau=k_y\left[\frac{v_x}{\omega_c}(1-\cos\omega_c\tau)+\frac{v_y}{\omega_c}\sin\omega_c\tau\right]$$
$$+k_\parallel v_\parallel\tau-\omega\tau,$$

取平衡分布在 $x=0$ 处的局域近似

$$f_{\alpha 0}(0)\approx\left(1+\frac{\varepsilon_n v_y}{\omega_c}\right)f_{\alpha\mathrm{M}},$$

有

$$\boldsymbol{k}\cdot\frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial\boldsymbol{v}}=-\frac{m}{T}f_{\alpha\mathrm{M}}(\boldsymbol{v}(\tau))\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}(\tau)+\frac{\varepsilon_n}{\omega_c}f_{\alpha\mathrm{M}}(\boldsymbol{v}(\tau))k_y.$$

将它们代入轨道积分，利用

$$\int\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\Delta\boldsymbol{X}(\tau)-\omega\tau)}\mathrm{d}\tau$$
$$=\int\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\Delta\boldsymbol{X}(\tau)-\omega\tau)}\mathrm{d}(\boldsymbol{k}\cdot\Delta\boldsymbol{X}(\tau)-\omega\tau)+\int\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\Delta\boldsymbol{X}(\tau)-\omega\tau)}\mathrm{d}(\omega\tau),$$

可以直接得到

$$f_{\alpha k}=-\varphi(0)\frac{q_\alpha}{m_\alpha}f_{\alpha\mathrm{M}}\left[1+\mathrm{i}(\omega-\omega_\alpha^*)\int_0^\infty\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\psi(\tau)}\mathrm{d}\tau\right],$$

$$\omega_\alpha^*=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}_\mathrm{D}=k_y\frac{\varepsilon_n T_\alpha}{m_\alpha\omega_\alpha},$$

其中后一个积分，可以利用在均匀磁场中求沿未扰动轨道积分时用过的“贝塞尔函数展开法”来求出

$$\int_0^\infty\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\psi(\tau)}\mathrm{d}\tau=\frac{1}{\mathrm{i}}\sum_{n,m}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(n-m)(\phi-\theta)}\frac{\mathrm{J}_n\mathrm{J}_m}{\omega-n\omega_\alpha-k_\parallel v_\parallel}.$$

所以，最后可得

$$f_{\alpha k}=-\varphi(0)\frac{q_\alpha}{m_\alpha}f_{\alpha\mathrm{M}}\left[1+\mathrm{i}(\omega-\omega_\alpha^*)\sum_{n,l}\frac{\mathrm{J}_n\mathrm{J}_l\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(n-l)\theta}}{n\omega_\alpha+k_\parallel v_\parallel-\omega}\right]. \tag{11.59}$$

然后将上式代入（作了拉氏、傅氏变换后的）泊松方程，就可以得出色散函数

$$D(\omega,\boldsymbol{k})=1+\sum_\alpha\frac{1}{k^2\lambda_{\mathrm{D}\alpha}^2}\int\mathrm{d}\boldsymbol{v}f_{\alpha\mathrm{M}}$$
$$\times\left[1-(\omega-\omega_\alpha^*)\sum_{n,l}\frac{\mathrm{J}_n\mathrm{J}_l\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(n-l)\theta}}{\omega-n\omega_\alpha-k_\parallel v_\parallel}\right].$$

完成对速度空间的积分，最后静电漂移波的色散函数为

$$D(\omega,\boldsymbol{k})=1+\sum_\alpha\frac{1}{k^2\lambda_{\mathrm{D}\alpha}^2}\Big[1+(\omega-\omega_\alpha^*)$$
$$\times\sum_n\frac{1}{\omega-n\omega_\alpha}\zeta_n Z(\zeta_n)\mathrm{e}^{-b}\mathrm{I}_n(b)\Big], \tag{11.60}$$

其中

$$\zeta_n=\sqrt{\frac{m_\alpha}{2T_\alpha}}\frac{\omega-n\omega_\alpha}{k_\parallel},\quad b=k_\perp^2 r_\alpha^2.$$

参考文献

[1] Mikhailovskii A B. Electromagnetic Instabilities in an Inhomogeneous Plasma. Institute of Physics Publishing, Bristol, 1992

[2] 马腾才，胡希伟，陈银华. 等离子体物理学原理. 合肥：中国科学技术大学出版社，1988

[3] 〔日〕宫本健郎. 热核聚变等离子体物理学. 北京：科学出版社，1981. 323

第十二章　静电不稳定性

12.1　概　　论

在弗拉索夫理论中，不稳定的波是由于这支波通过和等离子体中的粒子或其他波相互作用后，从它们那里得到能量而产生的. 在不稳定性发展的最初阶段，其振幅随时间呈指数型的增大，这被称为线性不稳定阶段，是通过弗拉索夫线性理论来描述的. 本章就是讨论一些典型静电波的不稳定现象、它的起因和描述方法.

按前几章的讨论，在非磁化等离子体中有两支本征的静电波：电子静电波和离子声波. 在均匀磁化的等离子体中，除了在磁场方向上传播的上述两支静电波外，在垂直磁场方向上还存在另一类静电波：(离子或电子的)伯恩斯坦波. 在(空间)非均匀的磁化等离子体中则有既垂直磁场又垂直等离子体不均匀方向传播的静电漂移波. 以上这些波可以通过波-粒子相互作用从处在非平衡态的等离子体粒子体系中获取能量而变得不稳定，或者也可以通过波-波相互作用从已经有很大幅度或已经不稳定的波中获取能量而不稳定地发展起来. 因此，一支静电本征模(波)要成为不稳定的波，必须具备两个条件：在等离子体的(粒子和波)体系中存在着(可以转交出去的)自由能源；并存在着使能量交换得以发生的物理机制.

等离子体内波体系中的自由能源可以来自从外界输入等离子体的强电磁波，如各种类型的微波或激光(功率可达数 MW)，它们的电场会引起电子的强烈振动，其振动动能可以相当于或超出

电子原有的动能. 这种振动能可以通过等离子体中粒子和波的进一步相互作用而转化到等离子体的本征模中去，从而激发出不稳定的等离子体波(包括静电型的和电磁型的). 这类过程，通常被称为“参量过程”，可以用等离子体的(双)流体理论或动理学理论来描述. 在本书的第七章“激光与等离子体的相互作用”中曾给出了参量过程的流体描述，本课程不打算给出参量过程的动理学描述. 有兴趣的读者可以参考文献[1].

等离子体波体系中的另一类自由能源，是来自(通过波-粒子或波-波相互作用)已经被不稳定驱动起来的原等离子体本征模，它们再通过模转换而成为其他本征模的自由能源. 上面对波-波相互作用已经作了简略的介绍，而波-粒子相互作用将在下面进行介绍.

等离子体粒子体系中的自由能源来自非热平衡分布的粒子速度分布. 例如在反应型本征值问题中作定向运动的束电子或束离子；又如在耗散型本征值问题中偏离麦克斯韦分布的粒子系(如损失锥型分布的粒子系、温度各向异性分布的粒子系、非均匀等离子体中作整体漂移运动的电子系或离子系、在外电场中沿电场定向漂移的电子系，等).

在动理学线性描述中使粒子系中的自由能馈入原本稳定的本征模的机制主要是波-粒子间的共振相互作用——也即所谓的朗道逆阻尼(耗散型本征模)；也可以是线性模转化. 所谓共振型的相互作用，是指相互作用只在能量守恒与动量守恒同时得到满足时才会发生，对线性波-粒子相互作用来说共振条件是 $\omega(\boldsymbol{k})-k_{\parallel}v_{\parallel}=0$. 而在线性模转换中要求转换前、后的两支波的波频相近 $\omega_1(\boldsymbol{k})\approx\omega_2(\boldsymbol{k})$. 在非线性的动理学描述中还可以有非线性的朗道阻尼(例如在二阶近似下的共振条件是 $\omega_1-\omega_2-k_{\parallel}v_{\parallel}=0$)，或多波相互作用(如三波相互作用条件是 $\omega_1+\omega_2=\omega_3,\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2=\boldsymbol{k}_3$). 对于非线性的波-波、波-粒子相互作用将在后面的 13.2 节中讨论，本章只讨论线性的动理学描述.

等离子体中除了静电波型的不稳定性外，还存在着电磁型的不稳定性. 虽然产生电磁不稳定性与产生静电不稳定性的机理及处理方式大同小异，但是一些有实际意义的电磁不稳定性的数学描述很复杂、冗长，因此本课程没有给出. 好在关于各类电磁不稳定性的书籍很多，在经过了本课程的训练后，感兴趣的读者去阅读这类参考书并无原则上的困难. 在众多的电磁不稳定性中，理论上比较有特色，而在实际上又被广泛应用的是所谓的回旋波激射(cyclotron maser)不稳定性. 它是一种由弱相对论性的粒子束所激发的电磁不稳定性(一般非相对论性的粒子束只能激发静电型的不稳定波). 由于粒子(例如电子)质量的相对论性修正，电子-波间产生共振型相互作用的(回旋共振)条件变成

$$\omega - n\omega_{ec}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2} - k_{\parallel} v_{\parallel} = 0.$$

其中总速度平方 $v^2 = v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2$. 因此在非相对论等离子体的共振条件中原本不起作用的垂直(磁场的)速度，在相对论性的(束)等离子体中就会加入到共振条件中来，而非热平衡的垂直(于磁场方向上的)速度分布也能直接驱动电磁不稳定性波. 这在理论上是极富有启发意义的，由这种机制激发出的不稳定电磁波在空间与天体等离子体辐射现象的研究中也有重要的应用. 详细的描述请参阅文献[2].

12.2　损失锥型速度分布引起的静电不稳定性

在磁镜装置或地磁场的两极附近，由于磁镜效应，粒子的速度分布函数呈损失锥型：这时处在 $\theta \leqslant \theta_c (\tan\theta = v_{\perp}/v_{\parallel})$ 内的粒子因为平行磁场方向的速度与垂直方向速度之比足够大而全部逃出磁镜区(见图 12.1(a))，其中

$$\tan\theta_c = \frac{v_{\perp}}{v_{\parallel}\sqrt{R}},\quad R = \frac{B_{\max}}{B_{\min}}.$$

于是在 $v_{\perp}$ 方向，粒子分布函数 $f_{\alpha 0}(v_{\perp}^2)$ 将呈现出中空的双峰状(见图 12.1(b)；令磁场及 $v_{\parallel}$ 在 $\boldsymbol{e}_z$ 方向，而 $v_{\perp}$ 在 $\boldsymbol{e}_x$ 方向).

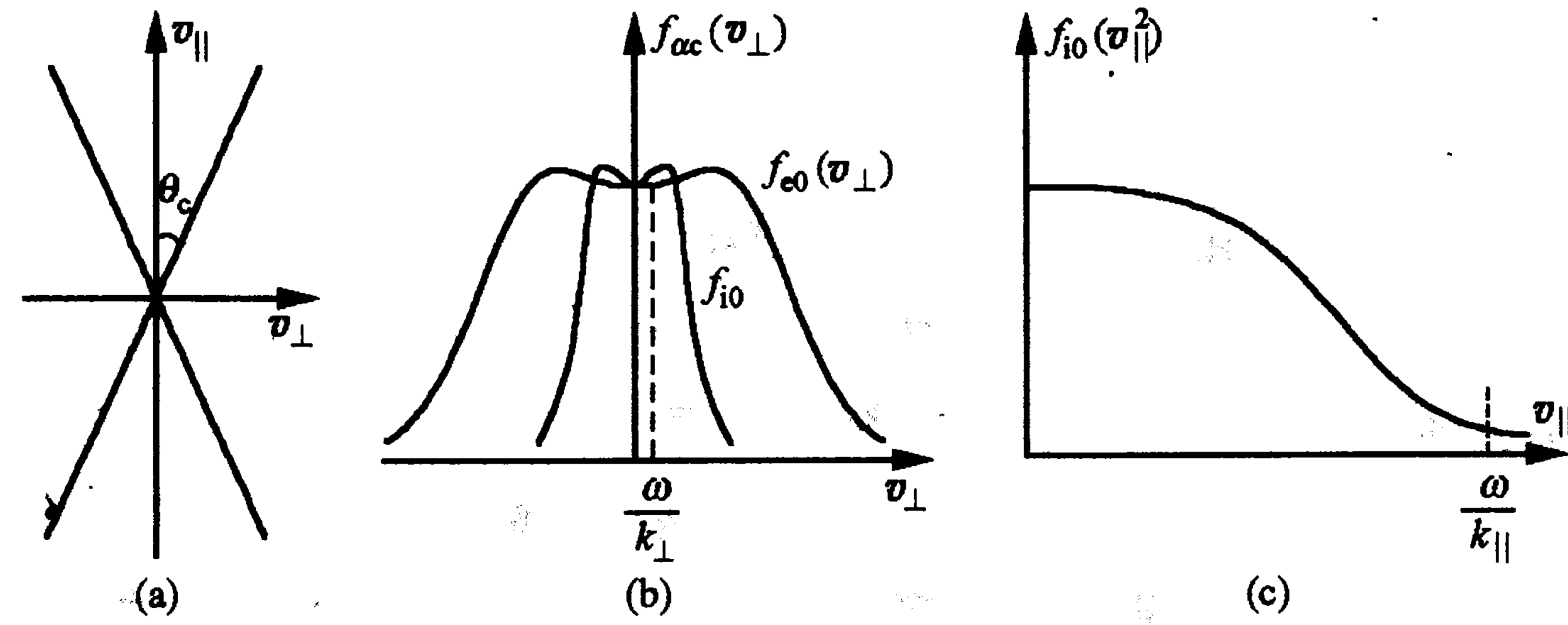


图 12.1　(a) 速度空间损失锥，(b) 损失锥型的粒子速度分布，(c) 波相速度在离子分函数中的位置

这类非麦克斯韦分布有可能引起在垂直于磁场方向上传播的静电波不稳定，因为如果这支低频的静电波在垂直方向的相速度 ω/k_x 正好落入速度分布的谷内时(图 12.1(b))，它所感受到的分布函数的斜率将是正的，因此其由于波-粒子相互作用而产生的增长率 $\gamma > 0$. 从图 12.1(b)和(c)中可以看出：当波的参数满足下面的条件时，能使其不稳定的增长率最大：

(i) $\dfrac{\omega}{k_{\perp}} = \dfrac{\omega}{k_x} < v_{iz}\tan\theta_c$，　i＝离子.

这表示波的相速将落在离子分布函数 f_{i0} 的谷内，当然也一定落在电子分布函数的谷内，这样电子和离子系都能通过共振相互作用将能量馈入此波，从而使其不稳定增长率增大.

(ii) $k_x \gg k_z$，$\Longrightarrow$ $v_{ph\parallel} = \dfrac{\omega}{k_z} \gg \dfrac{\omega}{k_x} = v_{ph\perp}$.

因为在平行磁场方向的速度分布总是麦克斯韦分布，粒子系不可避免地对波有阻尼作用，故如果这时令波在平行磁场方向有很大的相速度，使它处在平行分布函数的尾部，就会使它受到的朗道阻尼尽可能地小，从而让总的增长率尽可能地大. 按前面的讨论，静电波的色散方程可写成

$$D(\omega,\boldsymbol{k}) = 1 + \sum_{\alpha} \chi_\alpha = 0, \quad \alpha = \mathrm{i},\mathrm{e},$$

其中 χ_α 是粒子的极化率. 为了让推导的过程更简单,我们进一步假定

$$\omega_{\mathrm{ic}} \ll \omega(\boldsymbol{k}) \ll \omega_{\mathrm{ec}}, \implies r_{\mathrm{ec}} \ll \lambda_x \ll r_{\mathrm{ic}}.$$

这意味着：在磁化等离子体的色散函数(或极化率)中,$k_x r_{\mathrm{ic}} \gg 1$ 而 $k_x r_{\mathrm{ec}} \ll 1$. 也即对电子而言,因为其回旋半径远小于垂直方向的波长,故必须取磁化等离子体的极化率表达式. 而离子却因其回旋半径远大于静电波在垂直方向的波长,故基本上可以看成是非磁化的(因此,虽然在垂直方向,波-粒子共振相互作用也可以发生),其极化率 χ_{i} 可以取无磁场时静电波极化率表达式：

$$\chi_{\mathrm{i}} = \frac{\omega_{\mathrm{pi}}^2}{k^2}\int \mathrm{d}\boldsymbol{v}\, \frac{\boldsymbol{k}\cdot\partial f_{\mathrm{i0}}/\partial \boldsymbol{v}}{\omega - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}}$$

$$(\text{由 } k_x \gg k_z) \approx \frac{\omega_{\mathrm{pi}}^2}{k^2}\int \mathrm{d}\boldsymbol{v}\, \frac{k_x \partial f_{\mathrm{i0}}/\partial v_x}{\omega - k_x v_x}$$

$$= \frac{\omega_{\mathrm{pi}}^2}{k^2}\int \mathrm{d}v_x\, \frac{\partial F_{\mathrm{i0}}(v_x^2)/\partial v_x}{\omega/k_x - v_x},$$

$$F_{\mathrm{i0}}(v_x^2) = \int \mathrm{d}v_y \mathrm{d}v_z f_{\mathrm{i0}}(v_x^2, v_y^2, v_z^2, v_z).$$

令

$$Z(\omega,k_x) = \int \mathrm{d}v_x \frac{\partial F_{\mathrm{i0}}(v_x^2)/\partial v_x}{\omega/k_x - v_x}$$

$$= \mathscr{P}\int \frac{\partial F_{\mathrm{i0}}(v_x^2)/\partial v_x}{\omega/k_x - v_x} - \mathrm{i}\pi \frac{\partial F_{\mathrm{i0}}}{\partial v_x}\bigg|_{v_x=\omega/k_x}$$

$$\equiv \mathrm{Z_r} + \mathrm{iZ_i},$$

代入前式后,得离子极化率为

$$\chi_{\mathrm{i}} = \frac{\omega_{\mathrm{pi}}^2}{k^2}(\mathrm{Z_r} + \mathrm{iZ_i}). \tag{12.1}$$

下面来计算磁化电子系的极化率

$$\chi_{\mathrm{e}} = \frac{\omega_{\mathrm{pe}}^2}{k^2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int \mathrm{d}\boldsymbol{v}\, \frac{\mathrm{J}_n^2(k_x r_{\mathrm{ec}})}{\omega - k_z v_z - n\omega_{\mathrm{ec}}}\left(k_z \frac{\partial f_{\mathrm{e0}}}{\partial v_z} + \frac{n\omega_{\mathrm{ec}}}{v_\perp}\frac{\partial f_{\mathrm{e0}}}{\partial v_\perp}\right).$$

因为 $k_x r_{\mathrm{ec}} \ll 1$,可以取 $k_x r_{\mathrm{ec}} \sim 0$ 的近似,于是在所有的贝塞尔函数中只有 $\mathrm{J}_0(0)=1$,而其他的均可忽略,$\mathrm{J}_{n\neq 0}(0) \approx 0$. 于是

$$\chi_{\mathrm{e}} = \frac{\omega_{\mathrm{pe}}^2}{k^2}\int \mathrm{d}\boldsymbol{v}\, \frac{k_z \partial f_{\mathrm{e0}}/\partial v_z}{\omega - k_z v_z}.$$

又由于平行磁场方向的相速度远大于电子热速度($\omega/k_z \gg v_{\mathrm{et}}$),故波与粒子间不会发生共振,也即上式中的积分无奇异性,是实函数. 将其中对于 $\int \mathrm{d}v_z$ 的积分单独写出,得

$$\int \mathrm{d}v_z \frac{\partial f_{\mathrm{e0}}/\partial v_z}{\omega - k_z v_z} = \int \mathrm{d}v_z \frac{\partial f_{\mathrm{e0}}}{\partial v_z}\frac{1}{\omega}\frac{1}{1 - k_z v_z/\omega}$$

$$\approx \int \left(\frac{1}{\omega} + \frac{k_z v_z}{\omega^2}\right)\frac{\partial f_{\mathrm{e0}}}{\partial v_z}\mathrm{d}v_z$$

$$= \frac{1}{\omega}f_{\mathrm{e0}}\bigg|_{-\infty}^{\infty} + \frac{k_z v_z}{\omega^2}f_{\mathrm{e0}}\bigg|_{-\infty}^{\infty} - \int \frac{k_z}{\omega^2}f_{\mathrm{e0}}\mathrm{d}v_z$$

$$= -\frac{k_z}{\omega^2}\int f_{\mathrm{e0}}\mathrm{d}v_z.$$

故最后电子的极化率为

$$\chi_{\mathrm{e}} = -\frac{\omega_{\mathrm{pe}}^2}{\omega^2}\frac{k_z^2}{k^2}. \tag{12.2}$$

而色散方程最后可写成

$$1 + \chi_{\mathrm{i}} + \chi_{\mathrm{e}} = 1 + \frac{\omega_{\mathrm{pi}}^2}{k^2}(\mathrm{Z_r} + \mathrm{iZ_i}) - \frac{\omega_{\mathrm{pe}}^2}{\omega^2}\frac{k_z^2}{k^2} = 0,$$

$$k^2 + \omega_{\mathrm{pi}}^2(\mathrm{Z_r} + \mathrm{iZ_i}) - k_z^2\frac{\omega_{\mathrm{pe}}^2}{\omega^2} = 0.$$

令 $\omega = \omega_{\mathrm{r}} + \mathrm{i}\gamma$,代入上面的方程后,方程式的实部为

$$D_{\mathrm{r}}(\omega_{\mathrm{r}},\boldsymbol{k}) = \omega_{\mathrm{r}}^2(k^2 + \omega_{\mathrm{pi}}^2\mathrm{Z_r}) - k_z^2\omega_{\mathrm{pe}}^2 = 0.$$

由此可得此波的色散关系

$$\omega_{\mathrm{r}}^2 = \frac{k_z^2\omega_{\mathrm{pe}}^2}{k^2 + \omega_{\mathrm{pi}}^2\mathrm{Z_r}}. \tag{12.3}$$

其中包含了电子系的贡献,它只出现在色散关系的实部中.而色散方程的虚部为

$$D_i(\omega_r,\boldsymbol{k}) = 0, \Rightarrow \omega_r^2\omega_{pi}^2 Z_i = -2\omega_r\gamma(k^2+\omega_{pi}^2 Z_r).$$

可以看到其中只有离子系的贡献,从中可求出

$$\gamma = -\frac{\omega_r}{2}\frac{\omega_{pi}^2 Z_i}{k^2+\omega_{pi}^2 Z_r}. \tag{12.4}$$

由于

$$Z_i(\omega_r,\boldsymbol{k}) = -\pi\frac{\partial F_{i0}}{\partial v_x}\bigg|_{\omega_r/k_x}, \quad \frac{\partial F_{i0}}{\partial v_x}\bigg|_{\omega_r/k_x} > 0,$$

$$\Rightarrow Z_i < 0, \Rightarrow \gamma > 0.$$

即只有当此波相速度所对应的离子速度分布斜率为正时,这支波才会是不稳定的,而这正是本节所讨论的情况.

在本节一开始,我们曾作了 $k_x \gg k_z$, $\omega_{ic} \ll \omega \ll \omega_{ec}$ 的基本假定,同时在具体推导过程中还作过一些其他的简化才得到了上述的色散关系表达式(12.3)和(12.4).现在的问题是:这样得出的结果是否和最初作的基本假定一致?这类问题在线性稳定性的讨论中是具有普遍性的,而且在发表过的文献中,最后得出的色散关系和最初的基本假定相互矛盾的例子也屡见不鲜(包括所得出的增长率 γ 有 $\gamma \sim \omega_r$ 或 $\gamma \geqslant \omega_r$,从而违背了耗散模所必须满足的条件 $\gamma \ll \omega_r$).因此,一般在得出了色散关系后,还必须回过头来对最初假定的正确性作认真的检验.

实频 ω_r 表达式中的 Z_r 是主值积分,对各种不同的离子分布其值都不会相差太多,故可以近似地取 $F_{i0}=F_{iM}$ 来估计其数量级:

$$Z_r \sim \mathscr{P}\int \frac{\partial F_{iM}/\partial u}{\omega_r/k - u}du \sim \frac{k_z^2}{\omega_r^2} \sim \frac{k^2}{\omega_r^2}.$$

这样代入(12.3)式后,可得

$$\omega_r^2 = \frac{k_z^2\omega_{pe}^2}{k^2+\omega_{pi}^2 Z_r} \approx \frac{k_z^2}{k^2}\omega_{pe}^2 - \omega_{pi}^2, \quad \omega_r = \frac{k_z}{k}\omega_{pe}\sqrt{1-\frac{k^2}{k_z^2}\frac{\omega_{pi}^2}{\omega_{pe}^2}}.$$

因为 $\omega_{pe} \sim \omega_{ec}$, $\omega_{pi} \gg \omega_{ic}$,故只要比值 k_z/k 满足下面的取值条件

$$\frac{\omega_{pi}}{\omega_{pe}} = \sqrt{\frac{m_e}{m_i}} < \frac{k_z}{k} \ll 1, \quad 即 \quad 1 \gg \frac{k_z}{k} \gg \frac{1}{43},$$

就一定能保证一开始假定的 $\omega_{ic} \ll \omega \ll \omega_{ec}$ 条件得到满足.而这要求显然可以达到的,并有较大的调节余地.

对于磁镜不稳定性的进一步的了解,读者可以参考文献[3]—[5].

12.3 温度各向异性的速度分布造成的不稳定性

在磁化等离子体存在的三支静电波中,有两支在磁场方向传播(电子静电波和离子声波),它们由平行(磁场)方向的温度 $T_\parallel$(即粒子的热速度)所支持(驱动);另有一支波在垂直于磁场的方向上传播,它是由粒子的回旋运动支持的,因而和 $v_\perp$(也即 $T_\perp$)有关,这就是伯恩斯坦波.

当 $T_\parallel = T_\perp$ 时,这些波都处在平衡之中;但当 $T_\perp > T_\parallel$ 时,在垂直方向传播的伯恩斯坦波就比另两支波有更大的能量.这时如果平行方向的两支波能分别满足和伯恩斯坦波相耦合的条件(即两耦合波的频率和波长相近),则在垂直方向的自由能(这时表现为 $T_\perp > T_\parallel$)就会通过伯恩斯坦波和电子静电波(或离子声波)的耦合而馈入平行方向的波,而使后者不稳定.

在磁化等离子体中,静电波的色散方程是

$$D(\omega,\boldsymbol{k}) = 1 + \sum_\alpha \chi_\alpha, \quad \alpha = e, i,$$

$$\chi_\alpha = \frac{2\pi\omega_{p\alpha}^2}{k^2}\int_{-\infty}^{\infty}dv_\parallel\int_0^\infty v_\perp dv_\perp \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n^2 \frac{k_\parallel\dfrac{\partial}{\partial v_\parallel} + \dfrac{n\omega_{c\alpha}}{v_\perp}\dfrac{\partial}{\partial v_\perp}}{\omega - n\omega_{c\alpha} - k_\parallel v_\parallel} f_{\alpha 0}.$$

其中 $T_\perp \neq T_\parallel$ 的粒子速度分布可以取成

$$f_0 = \left(\frac{m}{2\pi T_\perp}\right)\left(\frac{m}{2\pi T_\parallel}\right)^{1/2}\exp\left[-\frac{v_\perp^2}{2(T_\perp/m)} - \frac{v_\parallel^2}{2(T_\parallel/m)}\right]. \tag{12.5}$$

将它代入极化率的公式后，可得

$$\chi_\alpha = \frac{1}{k^2\lambda_{D\alpha}^2}\times\left\{1+\sum_n\left[1+\frac{T_\parallel}{T_\perp}\frac{n\omega_{\alpha c}}{\omega-n\omega_{\alpha c}}\right]\right.$$
$$\left.\times\left(\frac{\omega-n\omega_{\alpha c}}{|k_\parallel|\sqrt{2T_\parallel/m_\alpha}}\right)Z\left(\frac{\omega-n\omega_{\alpha c}}{|k_\parallel|\sqrt{2T_\parallel/m_\alpha}}\right)A_n(b_\alpha)\right\}.$$

其中

$$\lambda_{D\alpha} = \frac{v_\perp}{\omega_{p\alpha}} = \frac{\sqrt{T_\perp/m_\alpha}}{\omega_{p\alpha}},\quad A_n(b_\alpha) = \mathrm{I}_n(b_\alpha)\mathrm{e}^{-b_\alpha},$$
$$b_\alpha = \frac{k_\perp^2 v_\perp^2}{\omega_{\alpha c}^2} = \frac{k_\perp^2 T_\perp}{m_\alpha\omega_{\alpha c}^2}.$$

下面我们只考虑频率在离子伯恩斯坦频域($\omega\sim n\omega_{ic}$)附近的不稳定性，这时电子对它们不起很大的作用，只有离子分布函数中的$T_\parallel\neq T_\perp$才会有决定性的影响. 因此，下面取简化：电子速度分布函数是各向同性的($T_{e\parallel}=T_{e\perp}=T_e$)；而离子速度分布却是各向异性的($T_{i\parallel}\neq T_{i\perp}$). 这样最后可得色散函数(为简单，已略去了离子温度的下标 i)：

$$D(\omega,\boldsymbol{k}) = 1+\frac{1}{k^2\lambda_{De}^2}\left\{1+\sum_n\frac{\omega}{|k_\parallel|\sqrt{2T_e/m_e}}Z\left(\frac{\omega-n\omega_{ec}}{|k_\parallel|\sqrt{2T_e/m_e}}\right)\right.$$
$$\left.\times A_n(b_e)\right\}+\frac{1}{k^2\lambda_{Di}^2}\left\{1+\sum_n\left[1+\frac{T_\parallel}{T_\perp}\frac{n\omega_{ic}}{\omega-n\omega_{ic}}\right]\right.$$
$$\left.\times\left(\frac{\omega-n\omega_{ic}}{|k_\parallel|\sqrt{2T_\parallel/m_i}}\right)Z\left(\frac{\omega-n\omega_{ic}}{|k_\parallel|\sqrt{2T_\parallel/m_i}}\right)A_n(b_i)\right\}.$$

进一步，还可以作一合理假定：在磁场足够强时，有 $b_e=k_\perp^2r_{ec}^2\ll1$，故可以取极限 $b_e\sim0$. 于是在电子极化率的表达式中，除了 $A_0(0)$ $=1$ 外，其他 $A_{n\neq0}(0)$项都可取作零. 这样，下面关于不稳定性的讨论，就可以从更简化的色散函数出发

$$D(\omega,\boldsymbol{k}) = 1+\frac{1}{k^2\lambda_{De}^2}\left\{1+\frac{\omega}{|k_\parallel|\sqrt{2T_e/m_e}}Z\left(\frac{\omega}{|k_\parallel|\sqrt{2T_e/m_e}}\right)\right\}$$
$$+\frac{1}{k^2\lambda_{Di}^2}\left\{1+\sum_n\left[1+\frac{T_\parallel}{T_\perp}\frac{n\omega_{ic}}{\omega-n\omega_{ic}}\right]\left(\frac{\omega-n\omega_{ic}}{|k_\parallel|\sqrt{2T_\parallel/m_i}}\right)\right.$$
$$\left.\times Z\left(\frac{\omega-n\omega_{ic}}{|k_\parallel|\sqrt{2T_\parallel/m_i}}\right)A_n(b_i)\right\}. \tag{12.6}$$

上式中色散函数的虚部只来自等离子体色散函数的虚部 Z_i(包括来自电子和离子的)，于是所讨论波的稳定与否也只取决于 Z_i 的符号.

下面将讨论两种可能存在的不稳定波，它们分别起因于平行于磁场方向传播的电子静电波或离子声波分别与垂直磁场方向传播的离子伯恩斯坦波耦合(即当两支模的频率及波长相当)时，自由能从垂直方向馈入平行方向，从而使平行方向的波不稳定地增大. 这种动理学过程通常称为线性模耦合.

12.3.1 电子静电波不稳定性

这时 $\omega\sim\omega_{pe}\sim N\omega_{ic}$，其中 N 是某一特定的整数值. 这一般只有当 $T_e/m_e\ll T_\parallel/m_i$，也即 $v_{et}\ll v_{it}$时才能满足. 于是有：

$$\lambda_{De}^{-2}=\frac{\omega_{pe}^2}{T_e/m_e}\gg\lambda_{Di}^{-2}=\frac{\omega_{pi}^2}{T_\parallel/m_i}=\frac{4\pi n_{i0}q_i^2}{T_\parallel}.$$

因为极化率 $\chi_\alpha\propto1/(k^2\lambda_{D\alpha}^2)$，这使得 $\chi_e\gg\chi_i$，故色散函数的实部可近似地由其电子的响应来描述，结果频率的实部就由下面的色散方程来得出：

$$D_R(\omega_r,\boldsymbol{k})\approx1+\frac{1}{k^2\lambda_{De}^2}[1+\zeta_eZ(\zeta_e)]=0.$$

其中的宗量满足关系：

$$\zeta_e=\frac{\omega}{|k_\parallel|\sqrt{2T_e/m_e}}\gg 1,\quad \zeta_i=\frac{\omega-N\omega_{ic}}{|k_\parallel|\sqrt{2T_\parallel/m_i}}\ll 1.$$

因此,色散方程中的等离子体色散函数 $Z(\zeta_e)$ 可以近似地取对 $\zeta_e\gg 1$ 的渐近展开

$$Z(\zeta_e)\rightarrow i\sqrt{\pi}\,\sigma\exp(-\zeta_e^2)-\frac{1}{\zeta_e}\left(1+\frac{1}{2\zeta_e^2}+\frac{3}{4\zeta_e^4}+\cdots\right)$$

$$\sim -\frac{1}{\zeta_e}-\frac{1}{2\zeta_e^3}-\frac{1}{4\zeta_e^5}-\cdots.$$

于是色散方程就简化成

$$D\approx 1+\frac{1}{k^2\lambda_{De}^2}\left[1-1-\frac{1}{2\zeta_e^2}-\frac{3}{4\zeta_e^4}\right]=0,$$

$$1-\frac{k_\parallel^2}{k^2}\frac{\omega_{pe}^2}{\omega_r^2}-3\frac{k_\parallel^4}{k^2}\frac{\omega_{pe}^2}{\omega_r^4}\frac{T_e}{m_e}=0,$$

$$\omega_r^4-\frac{k_\parallel^2}{k^2}\omega_{pe}^2\omega_r^2-3\frac{k_\parallel^4}{k^2}\frac{T_e}{m_e}\omega_{pe}^2=0.$$

利用 $\cos\theta=k_\parallel/k$,$\lambda_{De}^2=(T_e/m_e)/\omega_{pe}^2$ 及 $k^2\lambda_{De}^2\ll 1$,可以得出色散方程的解

$$\omega_r^2=\frac{1}{2}\left[\omega_{pe}^2\cos^2\theta\pm\sqrt{\omega_{pe}^4\cos^4\theta+4\frac{3k_\parallel^4}{k^2}\omega_{pe}^2\frac{T_e}{m_e}}\right]$$

$$\sim\frac{1}{2}\omega_{pe}^2\cos^2\theta[1\pm(1+6k^2\lambda_{De}^2)]$$

$$=\omega_{pe}^2\cos^2\theta[1+3k^2\lambda_{De}^2].$$

其中只取了正根,这正是磁化等离子体中电子静电波的色散关系.

为了讨论此波的不稳定性,必须先求出 D_i,而它又依赖于电子、离子的等离子体色散函数. 但由前面的近似可知,电子的 $Z_i(\zeta_e)\sim 0$,故只有离子的等离子体色散函数 $Z_i(\zeta_i)$ 才对 D_i 有贡献:

$$D_i(\omega_r,\boldsymbol{k})=\frac{1}{k^2\lambda_{Di}^2}\sum_n\left[1+\frac{T_\parallel}{T_\perp}\frac{n\omega_{ic}}{\omega-n\omega_{ic}}\right]\zeta_i Z_i(\zeta_i)A_n(b_i),$$

$$\zeta_i=\frac{\omega-n\omega_{ic}}{|k_\parallel|\sqrt{2T_\parallel/m_i}},$$

其中

$$Z_i(\zeta_i)\approx\frac{k_\parallel}{|k_\parallel|}\sqrt{\pi}\exp(-\zeta_i^2)$$

$$=\frac{k_\parallel}{|k_\parallel|}\sqrt{\pi}\exp\left[-\left(\frac{\omega-n\omega_{ic}}{|k_\parallel|\sqrt{2T_\parallel/m_i}}\right)^2\right].$$

由于我们只考虑 $\omega\sim N\omega_{ic}$ 时的频域,故而 $\zeta_i(n=N)\ll 1$,而 $\zeta_i(n\neq N)\gg 1$. 这样,就只有某一 N 所对应的 $Z_i(n=N)$ 才不为零,而其他 $n\neq N$ 所对应的 $Z_i(n\neq N)$ 都近似取零. 最后得

$$D_i=\frac{1}{k^2\lambda_{Di}^2}\left[1+\frac{T_\parallel}{T_\perp}\frac{N\omega_{ic}}{\omega-N\omega_{ic}}\right]\frac{\omega-N\omega_{ic}}{|k_\parallel|\sqrt{2T_\parallel/m_i}}$$

$$\times\frac{k_\parallel}{|k_\parallel|}\sqrt{\pi}\exp\left[-\left(\frac{\omega-N\omega_{ic}}{|k_\parallel|\sqrt{2T_\parallel/m_i}}\right)^2\right]A_N(b_i).$$

利用

$$\frac{\partial}{\partial\omega_r}D_r(\omega_r,\boldsymbol{k})\bigg|_{\omega_r=\omega_{pe}\cos\theta}\approx 2\cos^2\theta\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^3}\bigg|_{\omega_{pe}\cos\theta}=\frac{2}{\omega_{pe}\cos\theta},$$

最后可以得出不稳定的增长率

$$\gamma=-\frac{D_i}{\partial D_r/\partial\omega_r}$$

$$=-\sqrt{\frac{\pi}{8}}\frac{\omega_r}{k^2\lambda_{Di}^2}\left[\frac{\omega_r-N\omega_{ic}}{|k_\parallel|\sqrt{T_\parallel/m_i}}+\frac{T_\parallel}{T_\perp}\frac{N\omega_{ic}}{|k_\parallel|\sqrt{T_\parallel/m_i}}\right]$$

$$\times\exp\left[-\left(\frac{\omega-N\omega_{ic}}{|k_\parallel|\sqrt{2T_\parallel/m_i}}\right)^2\right]A_N(k_\perp^2 r_{ic}^2).$$

可以看出上式中第二项对 γ 的贡献总是阻尼(负)的,而第一项在

$$\omega_r\approx\omega_{pe}\cos\theta<N\omega_{ic}$$

时,会对 γ 贡献正值. 故如果当这一项的绝对值超过第二项时,有 $\gamma>0$,就会产生不稳定性. 这相当于

$$(N-1)\omega_{ic}<\omega_r<\left(1-\frac{T_\parallel}{T_\perp}\right)N\omega_{ic}.$$

这个不稳定条件从定量上表明了只有 $\omega_r<N\omega_{ic}$，并且 $T_\perp>T_\parallel$ 时，才会有自由能通过在垂直方向上传播的波馈入在平行方向上传播的波，而使其不稳. 反过来也可以看出，这时不稳定的静电波，不但其频率要略低于 $N\omega_{ic}$，并且只能在和磁场方向成一定夹角的方向上传播：

$$\frac{(N-1)\omega_{ic}}{\omega_{pe}}<\cos\theta<\left(1-\frac{T_\parallel}{T_\perp}\right)\frac{N\omega_{ic}}{\omega_{pe}}.$$

12.3.2　不稳定的离子声波

在 $0<\omega<\omega_{ic}$ 的低频域中，这时波的相速度处在电子热速度与离子热速度之间

$$\frac{T_\parallel}{m_i}\ll\frac{\omega}{|k_\parallel|}\ll\frac{T_e}{m_e}.$$

故在离子、电子的极化率表达式中有以下数量级关系：

$$|\zeta_i|=\frac{|\omega-\omega_{ic}|}{|k_\parallel|\sqrt{2T_\parallel/m_i}}\gg 1,\quad \zeta_e=\frac{\omega}{|k_\parallel|\sqrt{2T_e/m_e}}\ll 1.$$

这样在 χ_e 中只保留第一项（第二项对 $\zeta_e\ll 1$ 的小量而言是二阶小量，可忽略）；而在离子的 χ_i 中对 $\zeta_i Z(\zeta_i)$ 取到渐近展开的第二项，并利用 $T_\perp\gg T_\parallel$ 后，可得色散函数的实部及决定实频的色散方程

$$D_R(\omega_r,\boldsymbol{k})=1+\frac{1}{k^2\lambda_{De}^2}-\frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2}\frac{k_\parallel^2}{k^2}=0. \qquad (12.7)$$

其解就是离子声波

$$\omega_r=\frac{k_\parallel\omega_{pi}}{\sqrt{k^2+\lambda_{De}^{-2}}}=\frac{k_\parallel\sqrt{T_e/M_i}}{\sqrt{1+k^2\lambda_{De}^2}}\approx\frac{k_\parallel C_s}{\sqrt{1+k^2\lambda_{De}^2}},\quad C_s^2\approx\frac{T_e}{m_i}. \qquad (12.8)$$

而对色散函数虚部 D_i，因而对不稳定增长率 γ 有贡献的，不但有离子项也有电子项，

$$\gamma=-\sqrt{\frac{\pi}{8}}\cdot\frac{\omega_r^2}{|k_\parallel|k^2\lambda_{De}^2\sqrt{T_e/m_e}}\exp\left[-\frac{\omega_r^2}{2k_\parallel^2(T_e/m_e)}\right]$$
$$-\sqrt{\frac{\pi}{8}}\frac{\omega_r}{k^2\lambda_{Di}^2}\left[\frac{\omega_r-\omega_{ic}}{|k_\parallel|\sqrt{T_\parallel/m_i}}+\frac{T_\parallel}{T_\perp}\frac{\omega_{ic}}{|k_\parallel|\sqrt{T_\parallel/m_i}}\right]$$
$$\times\exp\left[-\frac{(\omega-\omega_{ic})^2}{2k_\parallel^2T_\parallel/m_i}\right]A_1(b_i).$$

其中第一项是电子朗道阻尼，它是致稳因素而不是解稳因素. 第二项是离子的贡献，包括了致稳和解稳的两种机制. 当下列条件满足时，这几项的总效应是解稳的. 即当

$$0<\omega_r\leqslant\left(1-\frac{T_\parallel}{T_\perp}\right)\omega_{ic} \qquad (12.9)$$

时，离子对 γ 的贡献足够正，以致可以胜过电子的阻尼贡献，这支波就可以发展成不稳定的波——即所谓的离子声波不稳定性. 原则上在 $T_\perp\gg T_\parallel$ 时，也可能出现 $n\omega_{ic}$ 的不稳定离子声波，但这时不稳定发生所需要的条件将会更加苛刻.

12.4　由定向漂移引起的不稳定性

通常把带电粒子系的整体定向移动称为漂移. 漂移可以是某类粒子系中所有的粒子都以相同速度运动（如电子束或离子束，等离子体中的逃逸电子群，聚变堆中由热核反应而产生的 α 粒子群，等等），也可以是具有某种平移（非零平均速度的）速度分布的粒子系. 后一种平移的速度分布的产生可以是由于外电场所造成的（这时定向运动平行于电场方向），也可以是磁化等离子体的各种空间不均匀性（如磁场不均匀，等离子体密度、温度或流速场的不均匀）造成的（这时漂移运动的方向不但垂直磁场，也垂直不均匀的梯度方向）.

在很多情况中，电子与离子系往往具有相反的漂移方向，而使总的等离子体的速度分布呈现双峰型(图 12.2). 这时相速度正好位于某类粒子速度分布正斜率处的等离子体波，通过波-粒子共振相互作用就会从粒子系得到能量；而另一类的粒子虽然对该波起阻尼作用，但只要不能完全抑制上述的解稳作用(例如，此波的相速度正好处于这种粒子分布函数的尾部——斜率虽为负但很小，从而阻尼也很小)，该波就会不稳定地发展起来. 从物理上来看，驱动波不稳定发展的自由能源是粒子系定向整体(漂移)运动的动能.

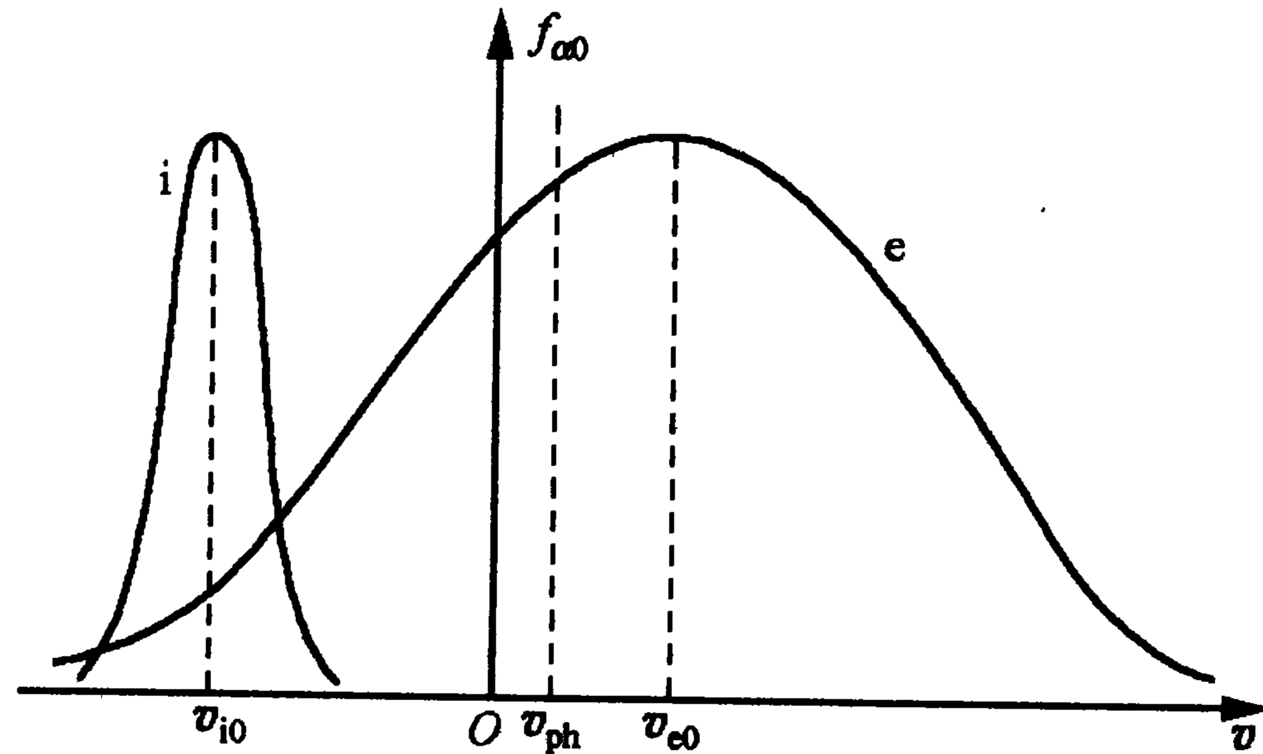


图 12.2　漂移的粒子速度分布函数

漂移波不稳定性也可以看成是我们所讨论的这支本征模与所谓的漂移波 $\omega^* = kv_0$ 通过模耦合，接受了定向运动的自由能而发展起来的. 因此，这类不稳定波的频率都和漂移波频率 ω^* 有一定关系.

12.4.1　束-等离子体不稳定性

这是最简单的漂移不稳定性，它发生在一个电子束流(密度为 n_b，速度为 v_d)入射到一冷等离子体(密度为 n_e，$n_b \ll n_e$)中时. 我们在第二章的反应型本征模和不稳定性中曾作过定性讨论. 这种不稳定性是因为电子静电波与漂移波 $\omega = kv_d$ 在 $\omega_{pe} \approx kv_d$ 附近发生强耦合而产生的. 本节将给出此问题的严格解. 这个问题的色散方

程是

$$D(\omega, \boldsymbol{k}) = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} - \frac{\omega_b^2}{(\omega - kv_d)^2} = 0.$$

其中 v_d 是电子束的速度，而 $\omega_b^2 = 4\pi n_b e^2/m_e$. 用 ω_{pe} 来归一频率：

$$x = \frac{\omega}{\omega_{pe}},\quad z = \frac{kv_d}{\omega_{pe}},\quad \alpha = \frac{\omega_b^2}{\omega_{pe}^2} = \frac{n_b}{n_e},$$

于是色散方程就可改写成

$$1 = \frac{1}{x^2} + \frac{\alpha}{(x - z)^2} \equiv y(x). \qquad (12.10)$$

这是一个关于 x 的四次代数方程

$$x^4 - 2zx^3 + (z^2 - 1 - \alpha)x^2 + 2zx - z^2 = 0.$$

上式的解也就是前一个方程 $y(x) = 1$ 的解. 而后者的解可以通过图解法来给出(图 12.3)：图中的曲线表示函数 $y(x)$，而直线则是 $y = 1$，曲线和直线的交点就是方程的解.

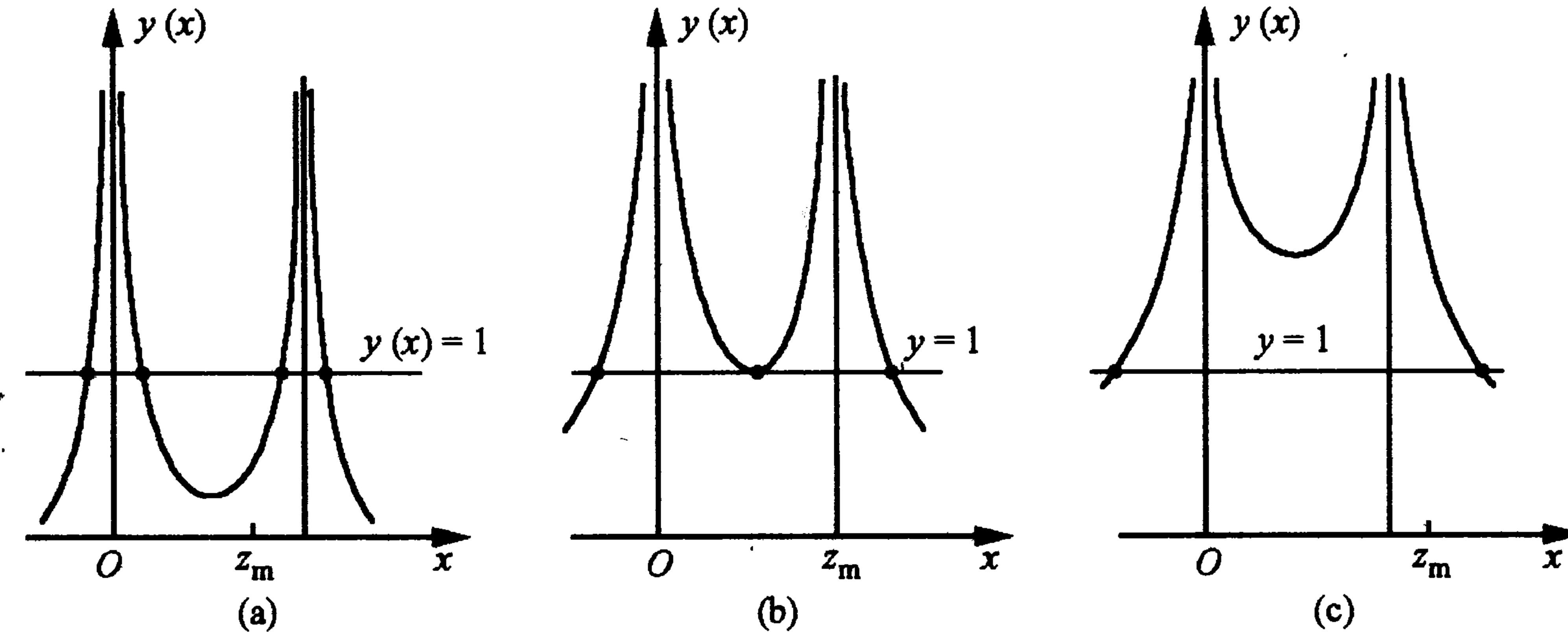


图 12.3　色散方程图解法示意

四次方程的解有三种可能性：

(i) 四个实根($z > z_m$，图 12.3(a))；

(ii) 三个实根，其中有一个根是二重简并的($z = z_m$，图 12.3(b))；

(iii) 两个实根和两个虚根($z < z_m$，图 12.3(c)).

其中 $z_m = (1 + \alpha^{1/3})x_m$，而 x_m 是函数 $y(x)$ 取极小值处的 x 值：

$$\left.\frac{\partial y(x)}{\partial x}\right|_{x=x_m} = 0, \Longrightarrow x_m = (1+\alpha^{1/3})^{1/2}.$$

由于 z 是波矢 k 的无量纲的量，故

$$z_m = (1+\alpha^{1/3})^{3/2}, \Longrightarrow k_m = \frac{\omega_{pe}}{v_d}[1+(n_b/n_e)^{1/3}]^{3/2}.$$

于是当 $|k|<|k_m|$ 时，漂移波便发生不稳，最大的不稳定增长率发生于 k 略小于 k_m 的波长处，这可以从色散关系图 12.4 看出. 这图和第二章反应型不稳定性中的色散图完全相同.

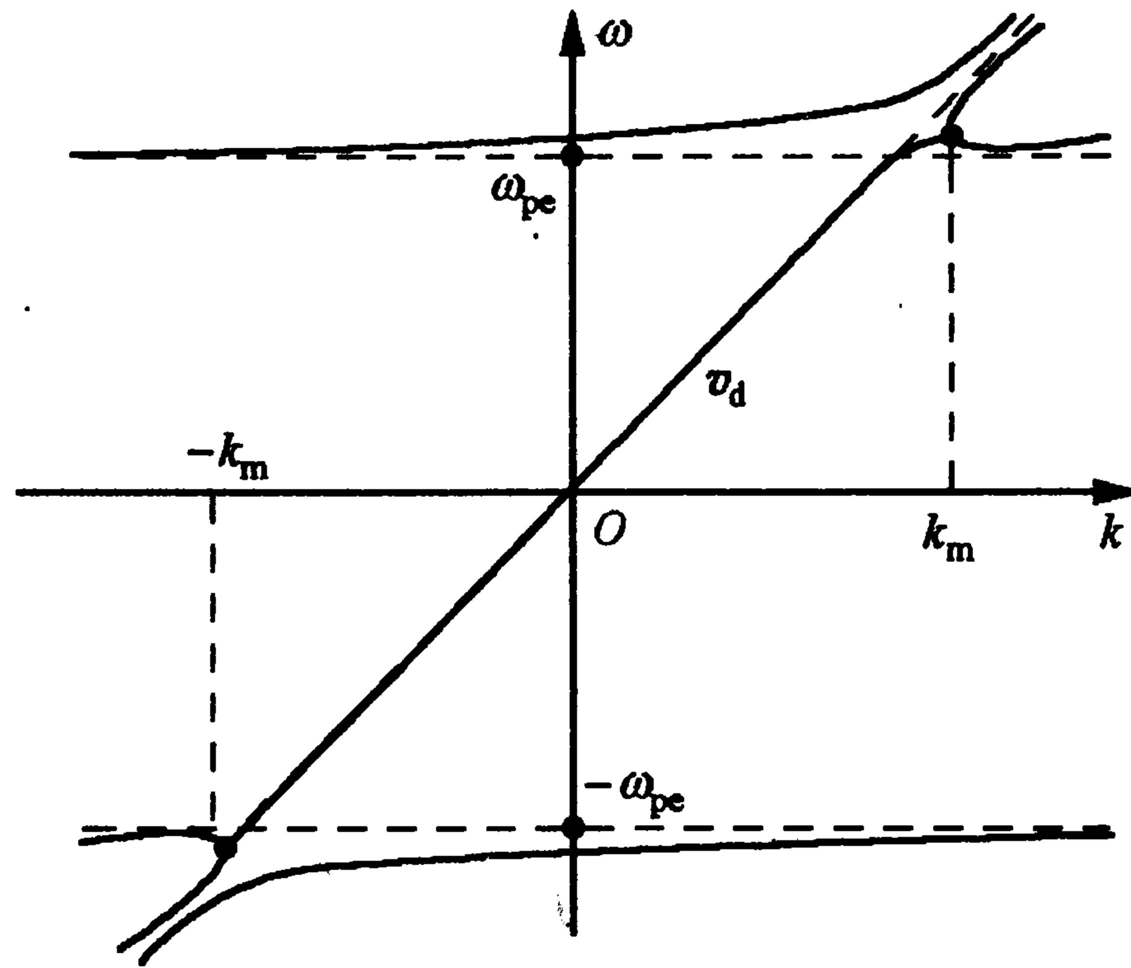


图 12.4　色散关系图

12.4.2　离子声波漂移不稳定性

这是一种电流驱动的低频(离子声频)不稳定性. 第二章的耗散型本征模中，曾讨论过当电子和离子速度分布都是麦克斯韦分布，且 $T_e \gg T_i$ 时，会存在一支低频的弱阻尼模——离子声波. 它虽然同时受到电子和离子的朗道阻尼，但相速度所对应的电子、离子分布函数的斜率都很小，故阻尼率也不大，所以离子声波衰减得很慢. 但如果由于外电场在等离子体中引起了电流，电子和离子的速度分布函数虽然还能保持高斯形状，但都具有一个平均的漂移速

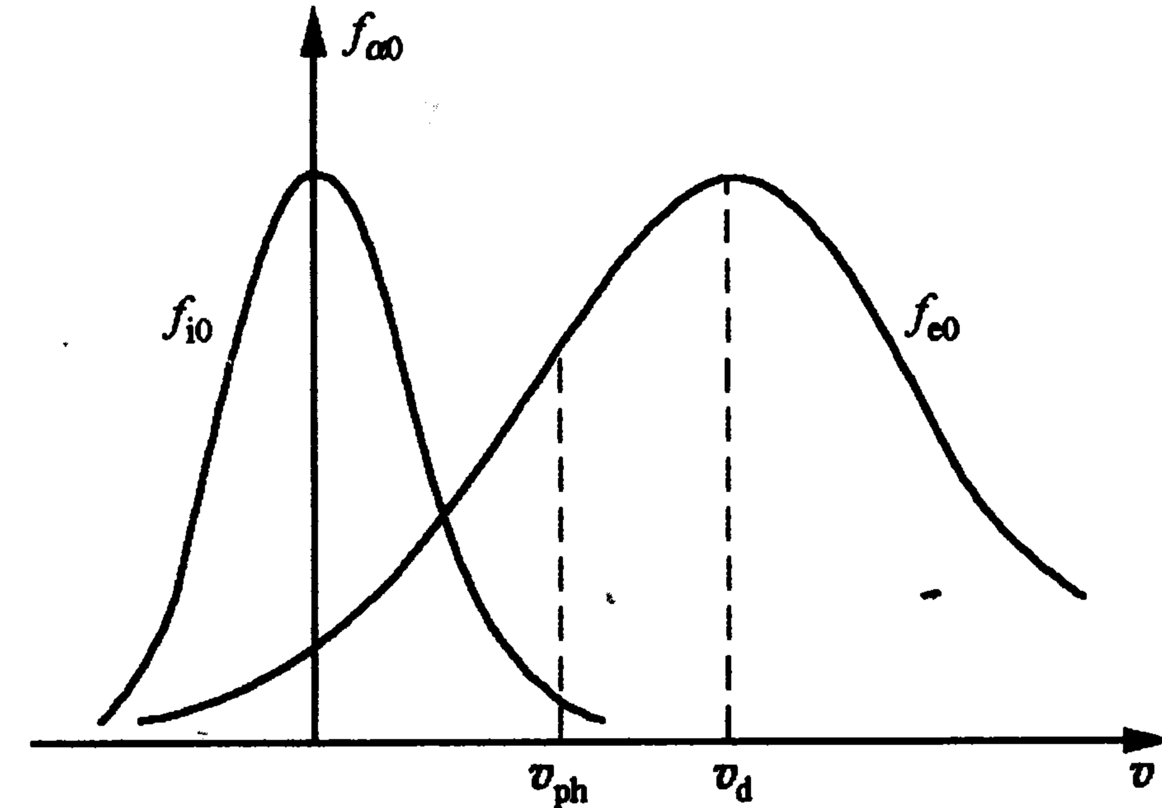


图 12.5　电场导致的平移粒子速度分布

度，而且两者的漂移方向相反(见图 12.5). 这时，由于在离子声波相速度处的电子速度分布有正的斜率，故电子系的响应对于此波是解稳的；而这相速度处的离子速度分布的斜率虽然是负的，但其斜率很小(在分布函数的尾部)，所以总的波-粒子相互作用的结果是驱使离子声波不稳定的发展. 下面来定量地描述这一现象. 假定电子和离子的分布函数分别是

$$f_e(v) = \frac{1}{(2\pi T_e/m_e)^{1/2}}\exp\left[-\frac{(v-v_d)^2}{2T_e/m_e}\right],$$

$$f_i(v) = \frac{1}{(2\pi T_i/m_i)^{1/2}}\exp\left[-\frac{v^2}{2T_i/m_i}\right].$$

利用速度空间各向同性的(非磁化、空间均匀)静电波色散关系

$$D = 1 + \sum_\alpha \chi_\alpha, \quad \alpha = e, i,$$

其中极化率为

$$\chi_\alpha = \frac{1}{k^2\lambda_D^2}(1+\xi_\alpha Z(\xi_\alpha)), \quad \xi_\alpha = \frac{\omega - kv_{\alpha d}}{kv_{\alpha t}} = \frac{\omega - kv_{\alpha d}}{k\sqrt{2T_\alpha/m_\alpha}}.$$

由上面的图像可知，当

$$v_{it} \equiv \sqrt{\frac{2T_i}{m_i}} \ll \frac{\omega}{k} \ll \sqrt{\frac{2T_e}{m_e}} + v_d \equiv v_{et} + v_d$$

时，有

$$\xi_i \gg 1,\quad \xi_e \ll 1.$$

故在 χ_α 中,对 $Z(\xi_e)$应取微扰展开,而对 $Z(\xi_i)$应取渐近展开.这样电子极化率中的

$$\xi_e Z(\xi_e) \approx -2\xi_e^2 + i\xi_e\sqrt{\pi}e^{-\xi_e^2} \sim i\sqrt{\pi}\xi_e,$$

$$\Rightarrow \chi_e \sim \frac{1}{k^2\lambda_{De}^2}(1 + i\sqrt{\pi}\xi_e),$$

其中用到了 $\xi_e \sim 0, \exp(-\xi_e^2) \approx 1$.而离子极化率中的

$$\xi_i Z(\xi_i) \approx -1 - \frac{1}{2\xi_i^2} + i\xi_i\sqrt{\pi}e^{-\xi_i^2},$$

$$\Rightarrow \chi_i \sim \frac{1}{k^2\lambda_{Di}^2}\left(-\frac{1}{2\xi_i^2} + i\sqrt{\pi}\xi_i e^{-\xi_i^2}\right)$$

$$= -\frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2} + i\frac{1}{k^2\lambda_{Di}^2}\sqrt{\pi}\xi_i e^{-\xi_i^2}.$$

代入色散方程后得

$$D(\omega,k) = 1 + \frac{1}{k^2\lambda_{De}^2} - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2} + i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{\omega - kv_d}{k^3\lambda_{De}^2\sqrt{T_e/m_e}} + i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{\omega}{k^3\lambda_{Di}^2\sqrt{T_i/m_i}}\exp\left[-\frac{\omega^2}{2k^2T_i/m_i}\right].$$

由色散方程的实部 $D_r(\omega_r,k)=0$ 可得色散关系

$$\omega_r(k) = \pm\frac{k\omega_{pi}}{\sqrt{k^2+\lambda_{De}^{-2}}} = \pm\frac{k\lambda_{De}\omega_{pi}}{\sqrt{1+k^2\lambda_{De}^2}} \approx \pm\frac{kC_s}{1+k^2\lambda_{De}^2} \equiv \pm kC_s'. \tag{12.11}$$

这显然是离子声波的色散关系,其中 $C_s=\sqrt{T_e/m_i}$.此波的不稳定增长率可以按耗散型本征模的公式,利用上式中的 D_i 来给出:

$$\gamma = -\sqrt{\frac{\pi}{8}}\frac{\omega_r^3}{k^3\omega_{pi}^2}\left\{\frac{\omega_r - kv_d}{\lambda_{De}^2\sqrt{T_e/m_e}} + \frac{\omega_r}{\lambda_{Di}^2\sqrt{T_i/m_i}}\exp\left[-\frac{\omega_r^2}{2k^2T_i/m_i}\right]\right\}. \tag{12.12}$$

从中可见两支离子声波中的一支 $\omega_r=-kC_s'$ 总是阻尼的;而另一支 $\omega_r=kC_s'$ 在 $\omega_r<kv_d$ 时可以出现不稳定.将这支波的色散关系代入上式后,可得

$$\gamma = -\sqrt{\frac{\pi}{8}}\sqrt{\frac{m_e}{m_i}}k\left[(C_s' - v_d) + C_s'\sqrt{\frac{m_iT_e^3}{m_eT_i^3}}e^{-T_e/(2T_i)}\right].$$

这就更清楚地表明:当 $T_e \gg T_i$ 时,离子的阻尼可以忽略,于是只要 $C_s'<v_d$ 就会使此波变成不稳定的.这也就是说,不稳定发生的必要条件是电子系的整体漂移速度要超过离子声速!正是这电子系的多余自由能驱动了离子声波的不稳.

12.4.3 由电流驱动的静电离子回旋不稳定性

在《等离子体物理导论》[6]的 5.5 节"三"中,曾用双流体方程讨论了静电离子回旋波.这是几乎垂直于磁场($\theta \lesssim 90°$)传播的静电波($\boldsymbol{k} \parallel \boldsymbol{E}_1$,图 12.6).由于电子这时可以沿磁力线很快运动,故可以保持电子系在传播方向上的热力学平衡,这样电子系在波场中的密度可以用玻尔兹曼分布来描述而不必通过解电子流体方程来得出.另一方面,离子系则需解完整的磁化流体方程组.最后得出的静电线性本征模色散关系是

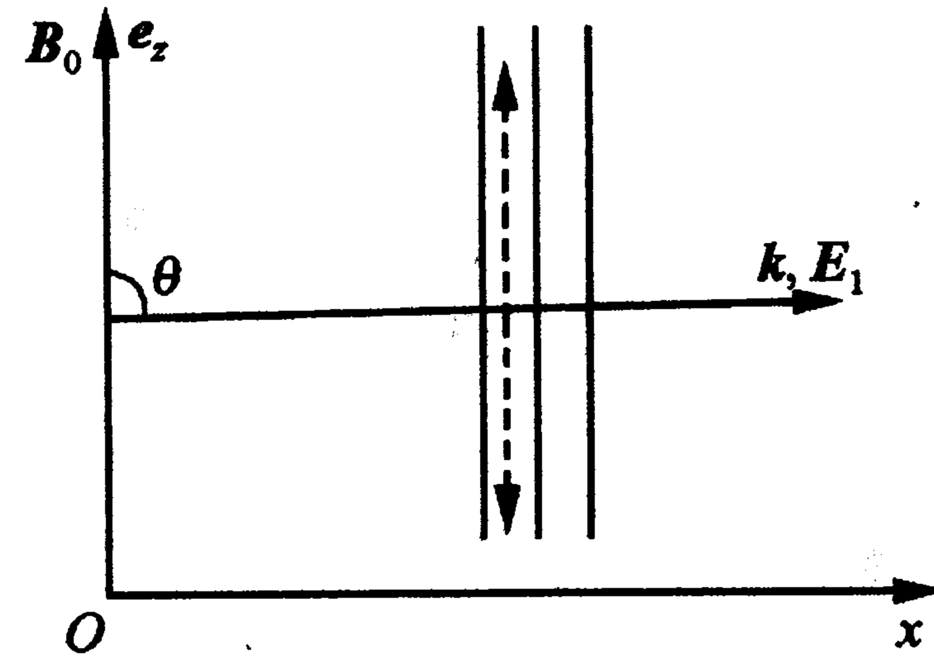


图 12.6 波矢、电场坐标图

$$\omega^2 = k^2c_s^2 + \omega_{ic}^2.$$

这被称为静电离子回旋波,它是由热运动和离子回旋运动的向心力联合驱动的.由于此波基本上只沿垂直于磁场的方向传播,故 $k_\parallel \ll k_\perp$;但又要求 $k_\parallel/k_\perp \gtrsim \sqrt{m_e/m_i}$.

这支波可以被沿磁力线方向流动的电子川(束)流解稳(此波

也可以被空间的电势解稳(Drummond, Rosenbluth, 1962). 但这里只介绍川(束)流解稳机制). 其物理图像如下,设电子和离子系处于具有漂移速度 v_{de}, v_{di}的热平衡分布(图12.7)

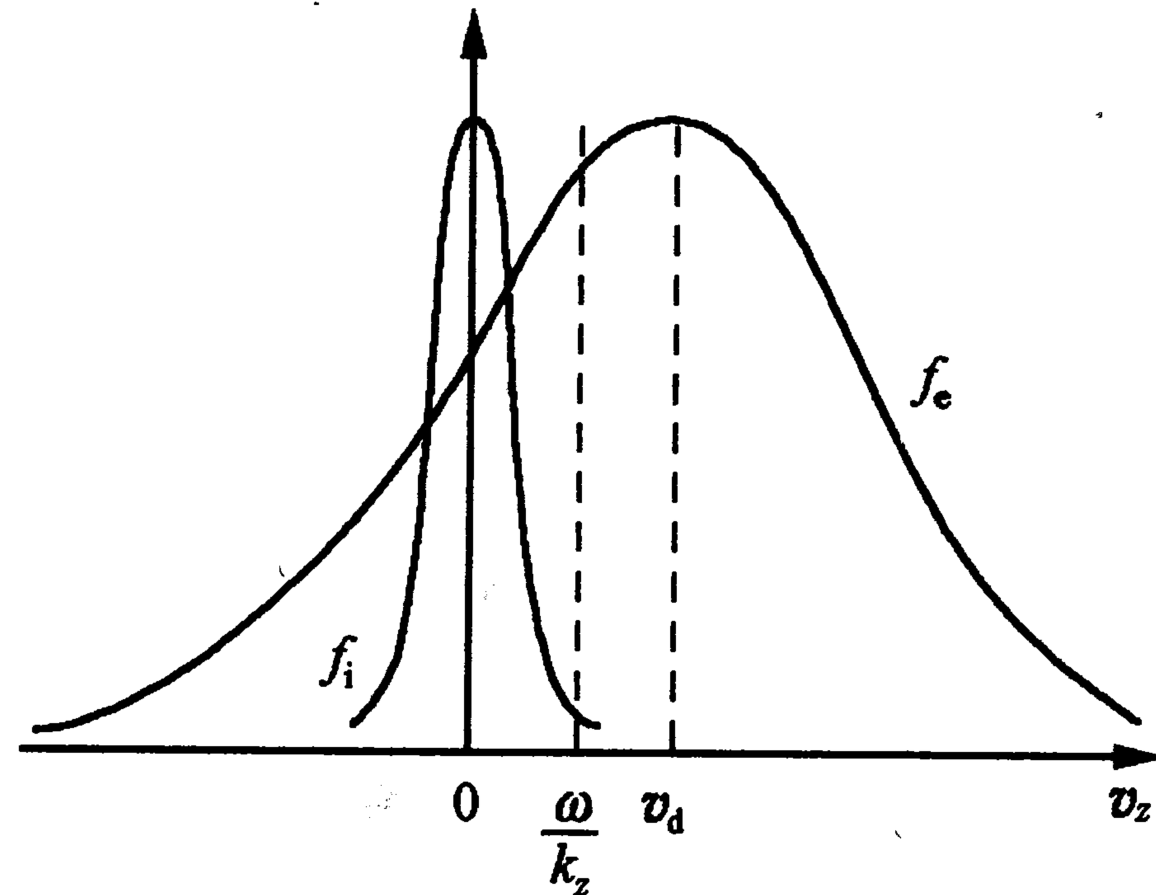


图 12.7 束流导致的平移粒子速度分布

$$f_{0e,i}(v) = \frac{n_0}{(\pi v_{e,i}^2)^{3/2}}\exp\left[-\frac{(v - v_{de,i})^2}{v_{e,i}^2}\right],$$

其中 $v_\alpha^2 = 2T_\alpha/m_\alpha(\alpha = e, i)$是热运动的速度. 这时低频静电离子回旋波的相速度可以正好落在电子速度分布函数的正斜率处,因而电子-波的共振相互作用会驱使此波不稳. 离子-波的共振相互作用虽然起阻尼作用,但此波相速度对应的离子速度分布函数是在比较平坦的尾部,其阻尼率很小,无法制止电子系的解稳作用. 下面的定量描述中,为了简单令$\boldsymbol{v}_{de} = v_d\boldsymbol{e}_z, v_{di} = 0$. 磁化热平衡等离子体的静电波色散方程是

$$k^2\lambda_{De}^2 D(\omega, \boldsymbol{k}) = k^2\lambda_{De}^2 + \sum_{\alpha,n}\frac{T_e}{T_\alpha}A_n(b_\alpha)$$
$$\times\left[1 + \left(\frac{\omega - k_\parallel v_{d\alpha}}{k_\parallel v_\alpha}\right)Z\left(\frac{\omega - k_\parallel v_{d\alpha}}{k_\parallel v_\alpha}\right)\right] = 0,$$

其中

$$A_n(b_\alpha) = \mathrm{I}_n(b_\alpha)e^{-b_\alpha}, \quad b_\alpha = k_\perp^2 r_\alpha^2, \quad r_\alpha = \frac{v_\alpha}{\sqrt{2}\,\omega_\alpha}.$$

下面来考虑 $\omega \ll \omega_{ec}$的低频波,其波长 $\lambda = 2\pi/k$ 的特征长度约为离子拉莫尔半径 r_{ic}的量级,于是有 $k\lambda_{De} \ll 1$ 及

$$b_e = k^2 r_e^2 \ll 1, \Rightarrow A_0(b_e) = 1, \quad A_{n\neq 0}(b_e) \approx 0.$$

在以上近似下,“色散函数”$D' \equiv (k\lambda_{De})^2 D(\omega, \boldsymbol{k})$可简化成

$$D'(\omega, \boldsymbol{k}) = 1 + \frac{\omega - k_\parallel v_d}{k_\parallel v_e}Z\left(\frac{\omega - k_\parallel v_d}{k_\parallel v_e}\right)$$
$$+ \frac{T_e}{T_i}\left[1 + \sum_n A_n(b_i)\frac{\omega}{k_\parallel v_i}Z\left(\frac{\omega - n\omega_{ic}}{k_\parallel v_i}\right)\right],$$

其中已用到

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n(b) = 1.$$

下面在对离子的贡献作详细讨论时,利用 $k_\parallel$ 足够小,有

$$\frac{\omega - n\omega_{ic}}{k_\parallel v_i} \gg 1,$$

因此可以对离子的等离子体色散函数 $Z(\zeta_i)$作渐近展开. 而对于电子因为有

$$\frac{v_d}{v_e} \ll 1 \text{ 及 } \frac{\omega}{k_\parallel v_e} \ll 1, \Rightarrow \frac{\omega - k_\parallel v_d}{k_\parallel v_e} \ll 1,$$

故可以对电子的 $Z(\zeta_e)$作微扰展开. 利用

$$\text{当 } |\zeta| \ll 1 \text{ 时,} \quad Z(\zeta) \approx -2\zeta\left(1 - \frac{2}{3}\zeta^2 + \cdots\right) + i\sqrt{\pi}e^{-\zeta^2},$$

$$\text{当 } |\zeta| \gg 1 \text{ 时,} \quad Z(\zeta) \approx -\zeta^{-1}\left(1 + \frac{1}{2}\zeta^{-2} + \cdots\right) + i\sqrt{\pi}e^{-\zeta^2}.$$

结果得(已略去了电子对色散关系的影响)

$$D_r(\omega_r, \boldsymbol{k}) = 1 + \frac{T_e}{T_i}\left(1 - \sum_n A_n(b_i)\frac{\omega}{\omega - n\omega_{ic}}\right),$$

以及

$$D_i(\omega_r, \boldsymbol{k}) = \sqrt{\pi}\left\{\frac{\omega - k_\parallel v_d}{k_\parallel v_e} + \frac{T_e}{T_i}\frac{\omega}{k_\parallel v_i}\right.$$
$$\left.\times\sum_n A_n(b_i)\exp\left[-\left(\frac{\omega - n\omega_{ic}}{k_\parallel v_i}\right)^2\right]\right\}.$$

在从 $D_r = 0$ 解出色散关系时,由于 $\omega_r \sim \omega_{ic}$,故在 D_r 中除了 $n=1$ 的

项外，其他求和各项中都可以取 $\omega=\omega_{ic}$，结果色散关系为

$$\omega_r=\omega_{ic}\left[1+\frac{A_1(b_i)}{T_i/T_e-G+1}\right]\equiv\omega_{ic}[1+\Delta(b_i,T_e/T_i)],\quad(12.13)$$

其中

$$G(b_i)\equiv A_1(b_i)+\sum_{n\neq1}\frac{A_n(b_i)}{1-n}\equiv A_1(b_i)+\frac{1-A_0(b_i)}{b_i},$$

可以看出 $0\leqslant G\leqslant1$. 当 $b_i\to0$ 时，$G\to1$，这时色散关系就趋向其流体描述时的表达式 $\omega_r^2=\omega_{ic}^2+k^2c_s^2$. 上式中最后一个等式的证明如下：因为 $A_n(x)=\mathrm{I}_n(x)\mathrm{e}^{-x}$，故这个等式等价于

$$\sum_{n\neq1}\frac{\mathrm{I}_n(x)}{1-n}=\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{I}_0(x)}{x}.$$

令 $m=n-1$ 并利用 $\mathrm{I}'_m(x)=\mathrm{I}_{m+1}(x)+m\mathrm{I}_m/x$，可得

$$\sum_{n\neq1}\frac{\mathrm{I}_n(x)}{1-n}=-\sum_{m\neq0}\frac{\mathrm{I}_{m+1}(x)}{m}=\sum_{m\neq0}\frac{\mathrm{I}_m(x)}{x}-\sum_{m\neq0}\frac{\mathrm{I}'_m(x)}{m}.$$

其中第一项就是我们要证明的结果，而第二项则可证为零. 因为第一项可化成

$$\sum_{m\neq0}\frac{\mathrm{I}_m(x)}{x}=\frac{1}{x}\sum_{m\neq0}\mathrm{I}_m(x)=\frac{1}{x}\left(\sum_m\mathrm{I}_m(x)-\mathrm{I}_0(x)\right)=\frac{1}{x}(\mathrm{e}^x-\mathrm{I}_0(x)),$$

其中用到了 $\sum_m\mathrm{I}_m(x)=\mathrm{e}^x$. 而第二项在把其中的求和展开后，可写作

$$\sum_{m\neq0}\frac{\mathrm{I}'_m(x)}{m}=\frac{1}{2}\sum_{m\neq0}\frac{1}{m}(\mathrm{I}_{m-1}+\mathrm{I}_{m+1})\quad(m=\pm1,\pm2,\pm3,\cdots)$$
$$=\frac{1}{2}\left[\left(\mathrm{I}_0-\mathrm{I}_{-2}+\frac{1}{2}\mathrm{I}_1-\frac{1}{2}\mathrm{I}_{-3}+\frac{1}{3}\mathrm{I}_2-\frac{1}{3}\mathrm{I}_{-4}+\cdots\right)+\left(\mathrm{I}_{-2}-\mathrm{I}_0+\frac{1}{2}\mathrm{I}_3-\frac{1}{2}\mathrm{I}_{-1}+\frac{1}{3}\mathrm{I}_4-\frac{1}{3}\mathrm{I}_{-2}+\cdots\right)\right]$$

（由 $\mathrm{I}_{-n}(x)=\mathrm{I}_n(x)$）$\equiv0$.

最后，来求此波的增长率. 在 D_i 的求和诸项中，只保留 $n=1$ 的项，其他项（因为所含的指数因子）在 $\omega_r\sim\omega_{ic}$ 时小得可以忽略. 于是可以由 $D_i=0$ 得出此波处在临界不稳定（即 $\gamma=0$）时应满足的条件

$$\frac{v_{dc}}{v_e}=\frac{\omega_r}{k_\parallel v_e}+\frac{T_e}{T_i}\frac{\omega_r}{k_\parallel v_i}A_1(b_i)\exp\left[-\left(\frac{\omega_r-\omega_{ic}}{k_\parallel v_i}\right)^2\right].$$

将 ω_r 的具体表达式代入后，上式又可写成

$$\frac{v_{dc}}{v_i}=\frac{1+\Delta(b_i)}{\Delta(b_i)}\zeta_i[1+C\exp(-\zeta_i^2)],$$

$$\zeta_i=\frac{\omega_r-\omega_{ic}}{k_\parallel v_i},\quad C=\left(\frac{T_e}{T_i}\right)^{3/2}\left(\frac{m_i}{m_e}\right)^{1/2}A_1.$$

其中 $\Delta(b_i)$ 的表达式见(12.13)，而 v_{dc} 是临界平衡时的电子漂移速度. 利用它可以把色散函数的虚部写成

$$D_i=\sqrt{\pi}\left(\frac{v_d}{v_e}-\frac{v_{dc}}{v_e}\right).$$

最后，不稳定增长率的表达式为

$$\gamma=-\frac{D_i}{\partial D_r/\partial\omega|_{\omega_r}}=\sqrt{\pi}\,\omega_{ic}A_1(b_i)\frac{v_d-v_{dc}}{v_e\frac{T_e}{T_i}\left(\frac{T_e}{T_i}+1-G\right)^2}.\quad(12.14)$$

因此当电子漂移速度 v_d 大于 v_{dc} 时，就会出现不稳定

$$v_d>v_{dc},\ \Longrightarrow\ \gamma>0.$$

由 v_{dc} 的表达式可以看到 $v_{dc}>\omega_r/k_\parallel$，也就是说此波不稳定时的相速度落入了电子速度分布函数的正斜率一边，因此电子-波共振相互作用的结果是驱动此波不稳. v_{dc} 表达式第二项代表的是离子朗道阻尼的贡献——其作用是提高了临界电子漂移速度的数值. 这种离子回旋波不稳定还可以扩展到高阶谐波 $\omega_r\sim n\omega_{ic}$ 中去. 这时只需在 D_r, D_i 的表达式中将 $n=m$ 的项像前面对 $n=1$ 的项一样来处理，又因为 $b_i<m^2$ 时，$G\sim1$，故可取 $G=1$. 这样得到的结果是

$$\omega_r=m\omega_{ic}\left[1+\frac{T_e}{T_i}A_m(b_i)\right],$$

$$\frac{v_{dc}}{v_i} = \frac{A_m + T_i/T_e}{A_m}\zeta_{im}[1 + C_m e^{-\zeta_{im}^2}],$$

$$\zeta_{im} = \frac{\omega_r - m\omega_{ic}}{k_\parallel v_i}\frac{m\omega_{ic}A_m T_e}{k_\parallel v_i T_i}, \quad C_m = \left(\frac{T_e}{T_i}\right)^{3/2}\left(\frac{m_i}{m_e}\right)^{1/2}A_m.$$

这类不稳定性在空间等离子体现象中扮演重要角色，有兴趣的读者可以参看文献[6].

12.4.4 不均匀等离子体中的低频漂移不稳定波

在磁化、非均匀(密度、温度、流速或磁场)的等离子体中，其中的电子、离子会既垂直于磁场又垂直于梯度方向作漂移运动，而且电子漂移流和离子漂移流的方向相反. 按照本章一开始的分析，就可能存在由电子漂移流驱动的低频($\omega \ll \omega_{ic}$或 $\omega \sim n\omega_{ic} \ll \omega_{ec}$)的不稳定波. 这些波的色散关系(实部)是由离子的极化率决定的，而其增长率(虚部)则由电子的逆朗道阻尼决定. 当然，原则上高频波($\omega \sim \omega_{ec}$或 $\omega \sim n\omega_{ec}$)也会因离子的逆朗道阻尼而不稳，但实现此种不稳定性的必要条件要远比低频波时严格. 因此这里不作讨论.

1. $\omega \ll \omega_{ic}$的离子静电漂移不稳定波

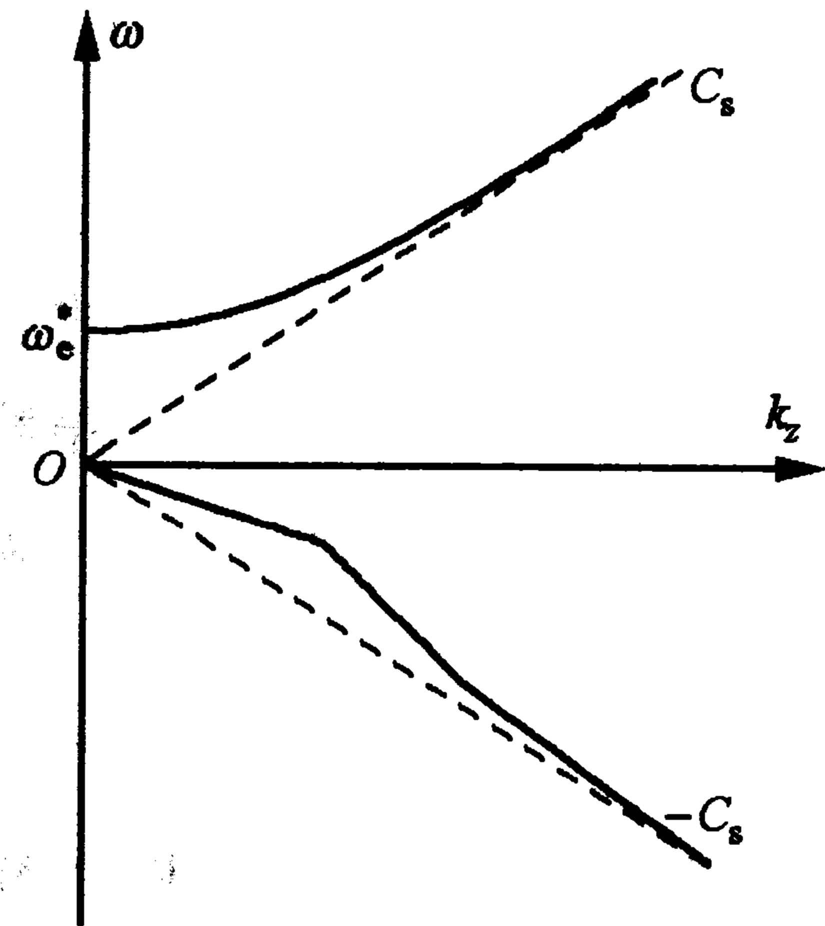


图 12.8 离子静电漂移波色散图

这时，由流体描述可知，当 $k_\parallel \gg k_\perp$ 时存在着两支离子声波，$\omega \approx \pm k_\parallel C_s$；而当 $k_\parallel \ll k_\perp = k_y$ 时(图 12.8)，则除了存在一支离子声波，还存在一支静电漂移波，$\omega_e^* \sim k_y v_{De}$. 这支漂移波在垂直于磁场($\boldsymbol{e}_z$)和梯度方向($\boldsymbol{e}_x$)上($\boldsymbol{e}_y$)传播. 由于 v_{De}和 v_{Di}都在 $\boldsymbol{e}_y$ 方向，故可以预期漂移流只能驱动静电漂移波不稳，而对离子声波无效.

于是，最不稳定的漂移波应当出现在

$$k_\parallel \ll k_y \quad (\text{即} \, k_\parallel C_s \ll k_y v_{de} = \omega_e^*)$$

及

$$\sqrt{\frac{T_i}{m_i}} \ll \frac{\omega}{k_\parallel} \ll \sqrt{\frac{T_e}{m_e}}$$

时，后者是为了使朗道阻尼减少到最低程度. 最后非均匀麦克斯韦分布等离子体中的静电波色散函数是

$$D(\omega,\boldsymbol{k}) = 1 + \sum_{e,i}\frac{1}{k^2\lambda_{D\alpha}^2} \times \left\{1 + (\omega - \omega_\alpha^*)\sum_n \frac{1}{\omega - n\omega_\alpha}\zeta_\alpha Z(\zeta_\alpha)e^{-b_\alpha}I_n(b_\alpha)\right\}.$$

其中 $b_\alpha = k_y^2 r_\alpha^2$，$r_\alpha$ 是拉莫尔半径. 在 $\omega \ll \omega_{ic}$和前述条件下，有

$$\lambda_\perp \gg r_i \gg r_e. \tag{12.15}$$

其中 $\lambda_\perp = 2\pi/k_y$ 是漂移波的波长. 因而 $b_\alpha \ll 1(\alpha = e,i)$，在色散函数中可取 $b_\alpha \sim 0$ 的极限. 这样，在求和号 $\sum_n$ 中只有 $n=0$ 的项存在，令 $\omega_e^* = k_y v_{De} > 0$，$\omega_i^* = k_y v_{Di} = -k_y v_{De} = -\omega_e^* < 0$，色散函数可简化成

$$D(\omega,\boldsymbol{k}) = 1 + \sum_{e,i}\frac{1}{k^2\lambda_{D\alpha}^2}\left\{1 + \frac{\omega - \omega_\alpha^*}{\omega}\zeta_\alpha Z(\zeta_\alpha)e^{-b_\alpha}I_0(b_\alpha)\right\}.$$

注意到其中

$$\zeta_\alpha = \sqrt{\frac{m_\alpha}{2T_\alpha}}\frac{\omega}{k_\parallel} = \frac{\omega}{k_\parallel v_{\alpha t}} \quad \text{以及} \quad v_{it} \ll \frac{\omega}{k_\parallel} \ll v_{et},$$

所以有 $\zeta_i \gg 1$，$\zeta_e \ll 1$. 因此

$$Z(\zeta_i) \sim -\frac{1}{\zeta_i} - \frac{1}{2\zeta_i^3}\cdots + i\sqrt{\pi}e^{-\zeta_i^2} \sim -\frac{1}{\zeta_i} - \frac{1}{2\zeta_i^3},$$

$$Z(\zeta_e) \sim -2\zeta_e\cdots + i\sqrt{\pi}e^{-\zeta_e^2} \sim i\sqrt{\pi}e^{-\zeta_e^2}.$$

而色散函数变成

$$D(\omega,\boldsymbol{k}) = 1 + \frac{1}{k^2\lambda_{De}^2}\left\{1 + \left(1 - \frac{\omega_e^*}{\omega}\right)\zeta_e i\sqrt{\pi}e^{-\zeta_e^2}\right\}$$

$$+\frac{1}{k^2\lambda_{Di}^2}\left\{1+\left(1-\frac{\omega_i^*}{\omega}\right)\zeta_i\left(-\frac{1}{\zeta_i}-\frac{1}{2\zeta_i^3}\right)e^{-b_i}I_0(b_i)\right\}$$

$$=1+\frac{1}{k^2\lambda_{De}^2}\left[1+i\sqrt{\frac{\pi m_e}{2T_e}}\frac{\omega-\omega_e^*}{k_\parallel}e^{-\zeta_e^2}\right]$$

$$+\frac{1}{k^2\lambda_{Di}^2}\left[1-\frac{\omega-\omega_i^*}{\omega}\left(1+\frac{k_\parallel^2}{\omega^2}\frac{T_i}{m_i}\right)e^{-b_i}I_0(b_i)\right].$$

考虑到 $k_\parallel \ll k_y, \omega \sim \omega_e^* = k_y v_{De}$，故 $k_\parallel^2 T_i/\omega^2 m_i = k_\parallel^2 v_{it}^2/\omega^2 \ll 1$. 于是色散方程为

$$D_r(\omega_r,\boldsymbol{k})=1+\frac{1}{k^2\lambda_{De}^2}+\frac{1}{k^2\lambda_{Di}^2}\left[1-\frac{\omega_r-\omega_i^*}{\omega_r}e^{-b_i}I_0(b_i)\right]=0. \quad (12.16)$$

由此可得动理学漂移静电波的色散关系(实部)

$$\omega_r=-\frac{\omega_i^* e^{-b_i}I_0(b_i)(T_i/T_e)}{(T_i/T_e)+1-e^{-b_i}I_0(b_i)+k_y^2\lambda_{Di}^2}. \quad (12.17)$$

在 $b_i=k_y^2 r_i^2=k_\perp^2 r_i^2 \ll 1$ 时，有 $e^{-b_i}I_0(b_i)\sim 1-b_i \sim 1$；而由于 $\lambda_{Di}^2 \ll r_i^2$，故 $k_y^2\lambda_{Di}^2 \ll 1$. 这样可以从上式推得流体漂移静电波的近似色散关系

$$\omega_r \gtrsim -\omega_i^* = \omega_e^* = k_y v_{De} > 0.$$

另一方面，从色散函数的虚部

$$D_i(\omega_r,\boldsymbol{k})=\sqrt{\frac{\pi m_e}{2T_e}}\frac{\omega-\omega_e^*}{k_\parallel}\frac{e^{-\zeta_e^2}}{k^2\lambda_{De}^2}, \quad (12.18)$$

及

$$\frac{\partial D_r(\omega_r,\boldsymbol{k})}{\partial\omega_r}=-\frac{1}{k^2\lambda_{Di}^2}\frac{\omega_i^*}{\omega_r^2}e^{-b_i}I_0(b_i)>0,$$

(上式意味着静电漂移波是正能波)可以得出漂移波的不稳定增长率

$$\gamma=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{\omega_r^2}{k_\parallel(T_e/m_e)^{1/2}}\frac{e^{-\zeta_e^2}}{I_0(b_i)e^{-b_i}}\frac{\omega_r-\omega_e^*}{\omega_i^*}. \quad (12.19)$$

因为 $\omega_r \gtrsim \omega_e^*$，且 $\omega_i^*<0$，故 $\gamma>0$.

这里所讨论的低频静电不稳定性是由于等离子体的密度不均匀引起的，实际上等离子体其他参数的不均匀也都可以引发不稳定的静电漂移波. 由于在绝大多数的自然界与实验室等离子体中都存在着不同种类和不同程度的不均匀性，所以这种低频静电不稳定波是普遍存在的——即这是一种普适的不稳定性.

在双流体描述中，静电漂移波并不会不稳定；这是因为电子和离子流在此静电波场中的电漂移($\boldsymbol{E}_1\times\boldsymbol{B}_0$)方向是相同的，粒子系和波场间不交换能量. 而在动理学(弗拉索夫)描述中，粒子的速度分布函数因不均匀性引起的漂移运动而位移. 电子系会通过逆朗道阻尼将平动(漂移)能转换到波场中去而使其不稳，而离子系则会由朗道阻尼吸收波场的能量而使波衰减；只是在前述的参数条件下不稳定超出了阻尼才使静电漂移波最终不稳. 所以关键是电子速度分布函数能否非麦克斯韦化，在磁约束聚变装置 tokamak 中引起电子速度分布函数偏离平衡分布的机制，除了等离子体中的各种不均匀造成的流体元整体漂移外，还可能有

——外加电场造成的角向电流(它引起了电子系和离子系在角向沿相反方向的漂移运动)，

——有限拉莫尔半径效应，

——约束电子与环行电子间的碰撞(它使垂直于磁场方向的速度分布函数偏离麦克斯韦分布形式)，等等.

在 tokamak 中，低频的静电漂移波的普适性曾从实验和理论上被广泛而深入地研究过，结果证实了这类不稳定波的确满足前面给出的三个基本特点：

(i) 低频($\omega \sim 100$ MHz $\ll \omega_{ic}$)，准垂直(于磁场方向)传播($k_\parallel \ll k_\perp$).

(ii) 中等相速：$v_{it} \ll \frac{\omega}{k_\parallel} \sim 10^4$ cm/s $\ll v_{et}$.

(iii) 长的波长：$k_\perp r_{ic} < 0.3 \ll 1$.

2. $\omega\sim\omega_{ic}$的离子漂移回旋不稳定波

这时，在垂直于磁场方向上传播的静电波，除了漂移波 $\omega=k_y v_{De}$外，还有离子伯恩斯坦波. 而存在于漂移波中的自由能也可以通过模耦合馈入伯恩斯坦波驱动其不稳. 假定

$$\omega\sim\omega_i,\ k_\parallel=0,\ k=k_y,\ \Rightarrow \zeta_\alpha\to\infty \text{ 及 } \zeta Z(\zeta)\sim -1,$$

这样色散函数就变成

$$D(\omega,\boldsymbol{k})=1+\sum_{e,i}\frac{1}{k^2\lambda_{D\alpha}^2}\left[1-(\omega-\omega_\alpha^*)\sum_n\frac{1}{\omega-n\omega_\alpha}e^{-b_\alpha}I_b(b_\alpha)\right],$$

其中 $b_\alpha=k^2r_\alpha^2$. 取 $b_e<1,b_i\gg1$ 下的近似

$$I_{n\neq0}(b_e)=0,\quad I_0(b_e)e^{-b_e}\sim1-b_e,$$

$$I_n(b_i)e^{-b_i}\sim\frac{1}{\sqrt{2\pi b_i}}\equiv\Delta\ll1.$$

进而由于 $\omega\sim\omega_i$，故在求和 $\sum\limits_n(1/\omega-n\omega_\alpha)\cdots$中，可只取 $n=1$ 的项（其他项均为小量、可略去）. 这样有

$$\begin{aligned}D(\omega,\boldsymbol{k})&=1+\frac{1}{k^2\lambda_{De}^2}\left[1+\frac{\omega_e^*}{\omega}-(1-b_e)\right]+\frac{1}{k^2\lambda_{Di}^2}\\&\quad\times\left[1-(\omega-\omega_i^*)\frac{\Delta}{\omega-\omega_i}\right]\\&=1+\frac{1}{k^2\lambda_{De}^2}\left(\frac{\omega_e^*}{\omega}+k^2r_e^2\right)+\frac{2}{k^2\lambda_{Di}^2}\left[1-\frac{\omega-\omega_i^*}{\omega-\omega_i}\Delta\right]\\&=0.\end{aligned}$$

于是色散方程为

$$1+k^2\lambda_{Di}^2+k^2r_e^2\frac{T_i}{T_e}-\frac{\omega_i^*}{\omega}\frac{T_i}{T_e}=\frac{\omega-\omega_i^*}{\omega-\omega_i}\Delta. \tag{12.20}$$

令

$$\lambda^2=\lambda_{Di}^2+r_e^2\sim\lambda_{Di}^2,$$

并取 $T_e\sim T_i$，则上式可写作

$$1+k^2\lambda^2-\frac{\omega_i^*}{\omega}=\frac{\omega-\omega_i^*}{\omega-\omega_i}\Delta. \tag{12.21}$$

在严格求解上述方程前，先对它作一定性讨论. 考虑到 $\Delta\ll1$，故当 $\omega\neq\omega_i$时

$$1+k^2\lambda^2-\frac{\omega_i^*}{\omega}=0,\ \Rightarrow\ \omega_1=\frac{\omega_i^*}{1+k^2\lambda^2}.$$

显然，这是一支（离子）漂移波. 另一方面，当 $\omega\sim\omega_i$ 时，由于 $\omega_i^*\ll\omega_i\sim\omega$，则有近似色散方程及解

$$1+k^2\lambda^2=\frac{\omega-\omega_i^*}{\omega-\omega_i}\Delta,\ \Rightarrow\ \omega_2=\omega_i\left(1+\frac{\Delta}{1+k^2\lambda^2}\right).$$

这是一支回旋波，也即伯恩斯坦波. 当 $\omega_1\sim\omega_2$ 时，这两支波间会有强耦合，能量将从漂移波中馈入回旋波而使其不稳. 问题在于，一般情况下 $\omega_1<\omega_i^*$，它能不能满足模耦合条件？为此，先来看 ω_1 的最大值. 当

$$k_{\max}\approx\frac{1}{\lambda_D},\ \Rightarrow\ \omega_{1\max}\approx k_{\max}v_{Di}=k_{\max}\frac{T_i}{m_i\omega_i}\frac{r_n^{-1}}{2}\sim\frac{1}{\lambda_{\min}}\frac{r_i^2\omega_i}{2}r_n^{-1},$$

于是在 $r_i\gg\lambda_{\min}\sim\lambda_D$ 时，有可能使 $\omega_{1\max}\sim\omega_i$.

现在来讨论色散方程(5.21)的严格解，这是一个关于 ω 的二次方程

$$(1+k^2\lambda^2-\Delta)\omega^2-[(1+k^2\lambda^2)\omega_i+(1-\Delta)\omega_i^*]\omega+\omega_i^*\omega_i=0. \tag{12.22}$$

它出现不稳定根（复根）的条件是

$$4\omega_i^*\omega_i(1+k^2\lambda^2-\Delta)>[(1+k^2\lambda^2)\omega_i+(1-\Delta)\omega_i^*]^2. \tag{12.23}$$

利用 ω_1 和 ω_2 的表达式，并展开到 Δ 的一阶后，上述条件变成

$$2k^2\lambda^2\omega_1(\omega_1+\omega_2)\Delta>(\omega_1-\omega_2)^2(1+k^2\lambda^2-2\Delta). \tag{12.24}$$

由上式也可以看到，由于 $\Delta\ll1$，故只有 $\omega_1\sim\omega_2$ 时，不稳定条件才能满足. 这时不稳定的模式是所谓的回旋漂移不稳定波，其频率为

$$\omega_r\sim\frac{1}{2}[(1+k^2\lambda^2)\omega_i+(1-\Delta)\omega_i^*]\sim\omega_i+\frac{1}{2}\omega_i^*. \tag{12.25}$$

参考文献

[1] Lui C S, Tripathi V K. Interaction of Electromagnetic Waves with Electron Beams and Plasmas. World Scientific, Singapore, 1994

[2] 陆全康,吴京生. 电子回旋激射不稳定性——一种射电机制. 上海:上海交通大学出版社,1991

[3] Tajiri M. J. Phys. Soc. Jpn. ,**22**(1967)1482

[4] Southwood D J, Kivelson M G. J. Geophys. Res. , **98**(1993)21313

[5] Kivelson M G, Southwood D J. J. Geophys. Res. , **101**(1996)17365

[6] Rasmussen J J, Schrittwieser R W. IEEE for Plasma Science, **19**(3)(1991)457

第十三章 湍动过程简介

线性不稳定理论描述的是等离子体偏离其平衡状态的初始阶段,这时偏离很小,但随时间指数型地增大. 这种微小的增长扰动可以是一种模式,也可以是多种模式. 对于等离子体而言(和中性多粒子系不同),实际上往往是许多不稳定的模式被同时激发. 但在线性不稳定发展阶段,不同模式之间互不干扰——它们各自按不同的线性增长率演化. 当这些不稳定模式增大到一定幅度后,情况就有了很大的变化,各式各样的不稳定模式(或者部分的稳定模)会渐渐地相互耦合,不但彼此间交换能量,而且还可以通过能量,动量的叠加(波频、波矢的相加或相减)而产生出新的不稳定波模式. 这样,不稳定波(集体运动)模的模式就不断增加,而且最后从分离的频率谱线变为连续的频谱. 当频谱宽度等于甚至大于频谱的特征频率(一般用其中心频率作代表)时,物理上就将其称为"湍流"或"强湍";与之对应地,由许多线谱所代表的不稳定状态,通常被称为"弱湍".

在中性流体中,一般当川流的速度超过某一马赫数时可以观察到流体湍流的发生. 湍流强弱往往和扰动能量有密切的关系,当湍动的能量较小(例如比相应的流体的无规热运动能 $k_B T$ 小)时,其对应频谱呈比较窄的线谱形式;而当湍流能量(和热能相比)较大时,其频谱也变成了很宽的连续谱. 根据这种物理图像,在数学上可以在线性不稳定分析(即微扰分析的最低阶近似)的基础上,用微扰论的二阶、三阶,等等高阶近似,乃至于重整化技巧来描述"弱湍"状态,而得出和实验相近的结果.

但等离子体中的湍流往往在其扰动能量(和其热能相比)很小

时，其频谱就是很宽的连续谱.这时扰动能虽然仍是一个微扰量，但这种“弱湍”状态中的不稳定模式之多、它们间的各种(多模参加的)相互作用之复杂，用高阶微扰甚至用重整化方法却是无法描述的.因此建立在上述逐阶微扰处理基础上的“等离子体弱湍理论”在多数情况下无法解释观察和实验的结果.“弱湍理论”中只有最低阶的近似——准线性理论被经常引用，因为它能从定性上描述等离子体的平衡态粒子速度分布(它提供了引发线性不稳定波的自由能和共振机制)在不稳定波发展起来后所受到的反作用.这种反作用，在弱湍理论的高阶描述中(如所谓的非线性朗道阻尼)也能提供，但在定量上却不能明显改善准线性描述的结果.因此，如果只满足于定性描述，有准线性理论也就足够了.弱湍理论的高阶描述，只有在定性上能提供比准线性描述更多物理现象时才有被引用的价值.即使如此，它能给出的结果也仍然只有定性上的准确性.所以，本章第二节中只将讲述不稳定静电波的准线性理论，而对更高阶的弱湍理论、只从物理图像上作简单的介绍.

由于等离子体中的湍流即使在体系轻微偏离平衡状态时也很容易被激发，并且在扰动能量处于很低水平时就呈现宽谱的“强湍”特征，这样无论在对自然界等离子体作观察中，还是在对实验室等离子体作诊断时，所得物理量的时间(或等价的空间)信号均会呈现出表面上的无规性.但是，在这些表面无序的下面却隐藏着反映等离子体内部有规则运动的大量信息.目前，虽然我们对这类湍流状态如何发生无法正确地描述，但是却有了一些比较系统的方法，可以从这些无序信号中，抽取反映等离子体参量及其演化过程的正确信息.在数学上，对这些表面无序信号的认识和描述属于“随机过程”的研究范畴.所以下面第一节就简单介绍随机过程的数学理论，其中不但有成熟的理论方法，也有近十年来新发展的一些理论描述法.这些新的分析方法，有的在别的应用领域已经被证明是十分成功的(如小波分析法)，有的在物理学以外的科学领域中可能具有潜力(如非线性动力学中常用的一些分析方法)，但它

们在等离子体湍流信息分析中的作用还有待于进一步的检验.

13.1 随机过程及其描述方法

本节为没有学过这方面内容的学生提供一个入门的向导.如欲深入，还可以参考任何一本关于“概率论”和“随机过程”的教科书或教学参考书.

13.1.1 随机变量及其描述

用$\{X\}$表示一组随机变量，它们又可以分为离散型和连续型两类.

1. 离散型

这时$\{X\}=\{x_1,x_2,\cdots,x_N\}$($N$为某一正整数)，每个随机数$x_i$在随机序列中出现的概率(归一化的次数)记为

$$p_i = P\{X = x_i\} \geqslant 0, \quad \sum_{i=1}^{N} p_i = 1.$$

定义分布函数

$$F(x) = \sum_i p_i.$$

2. 连续型

这时随机变量x是连续取值的$x\in\mathbf{R}^1$($\mathbf{R}^1$表示一维的实数集合)，对每一个x值，它出现的概率由概率密度表示

$$f(x) \geqslant 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1,$$

而分布函数为

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t.$$

以上几个量的示意图见图 13.1.

如果有二维连续分布的随机变量(X,Y)，$x,y\in\mathbf{R}^1$，可以有联

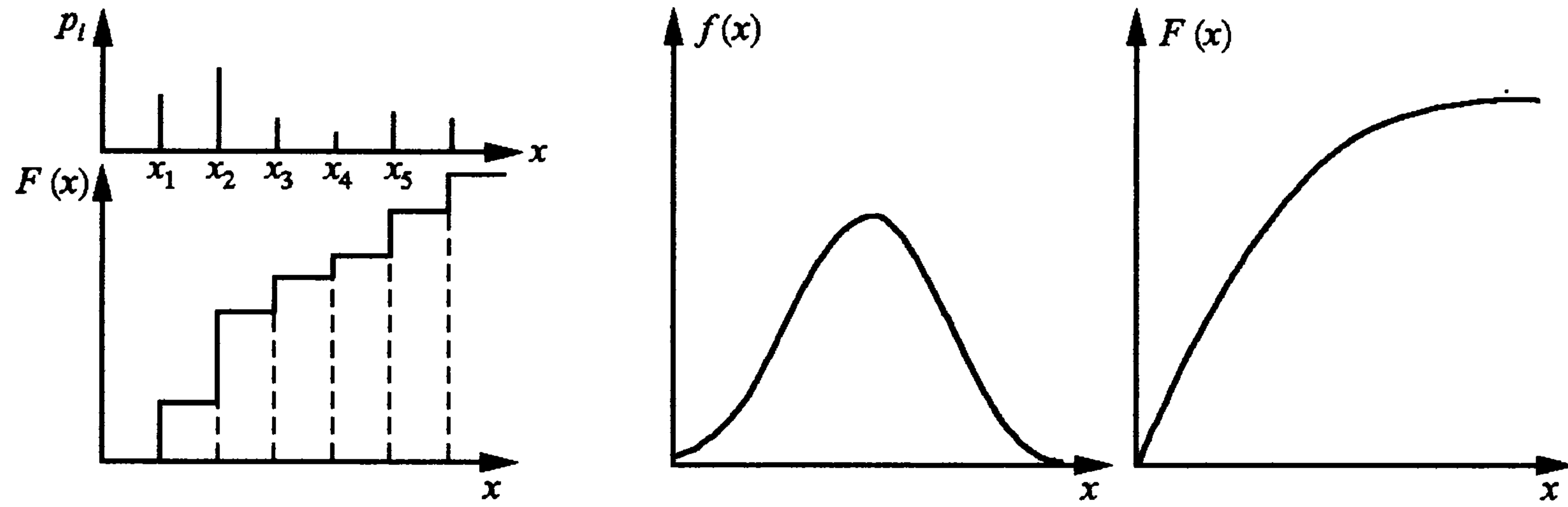


图 13.1 概率和分布函数示意图

合分布函数

$$F(x,y) = P(X \leqslant x, Y \leqslant y).$$

若存在

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v,$$

则称 $f(x,y)$为二维随机变量 x,y 的联合概率密度：

$$f(x,y) = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y}.$$

若 X,Y 是统计独立的，则有

$$F(x,y) = F_1(x)F_2(y),\quad F_1(x) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{\infty} f(u,v)\mathrm{d}v\mathrm{d}u,$$

$$f(x,y) = f_1(x)f_2(y),\quad f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\mathrm{d}y.$$

其中 $F_1(x)$和 $f_1(x)$分别称为边沿分布函数与边沿概率密度.

对随机变量，除了用分布函数或概率密度来描述外，还可以有下述的二类描述方法. 一类是所谓的数字特征描述法(在物理学中一般称为矩的描述法)，另一类是特征函数法(在物理学中通常称为傅里叶分析法或谱分析法). 为了便于和已有知识连接，下面我们采取物理学上的称呼.

3. 概率密度的各阶矩

对一维情况，概率密度的头二阶矩分别是其平均值和(均)方差

$$m \equiv \mathrm{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\mathrm{d}x,$$

$$\mathrm{D}[X] \equiv \mu_2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x-m)^2 f(x)\mathrm{d}x$$

$$= \mathrm{E}[X^2] - (\mathrm{E}[X])^2.$$

同样可以定义高于二阶的矩，如 k 阶的原点矩 γ_k 和中心矩 μ_k 分别是

$$\gamma_k = \mathrm{E}[X^k],\quad k = 1,2,\cdots,$$

$$\mu_k = \mathrm{E}\{(X - \mathrm{E}[X])^k\}.$$

而对二维情况，则可定义 $k+s$ 阶原点矩和中心矩

$$a_{k,s} = \mathrm{E}[X^k Y^s],\ \Rightarrow\ a_{1,0} = \mathrm{E}[X],\quad a_{0,1} = \mathrm{E}[Y],$$

$$\mu_{k,s} = \mathrm{E}\{[X - \mathrm{E}(X)]^k[Y - \mathrm{E}(Y)]^s\},\quad \mu_{1,1} = \mathrm{cov}(X,Y).$$

其中 $\mathrm{cov}(X,Y)$通常称为协方差(或相关矩).

4. 傅氏(谱)分析

对于随机变量，可定义

$$\phi(k) = \mathrm{E}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}kX}]$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx_j} p_j$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} f(x)\mathrm{d}x.$$

称 $\phi(k)$为 p_j(当随机变量是离散型时)和 $f(x)$(当随机变量是连续型时)的特征函数——也即傅氏变换(或 k 谱).

13.1.2 随机过程及其分类

1. 随机过程

定义随机过程为

$$\{X(t,e), t \in T, e \in E\} = \{X(t), t \in T\}.$$

它有以下性质(参考图 13.2)：

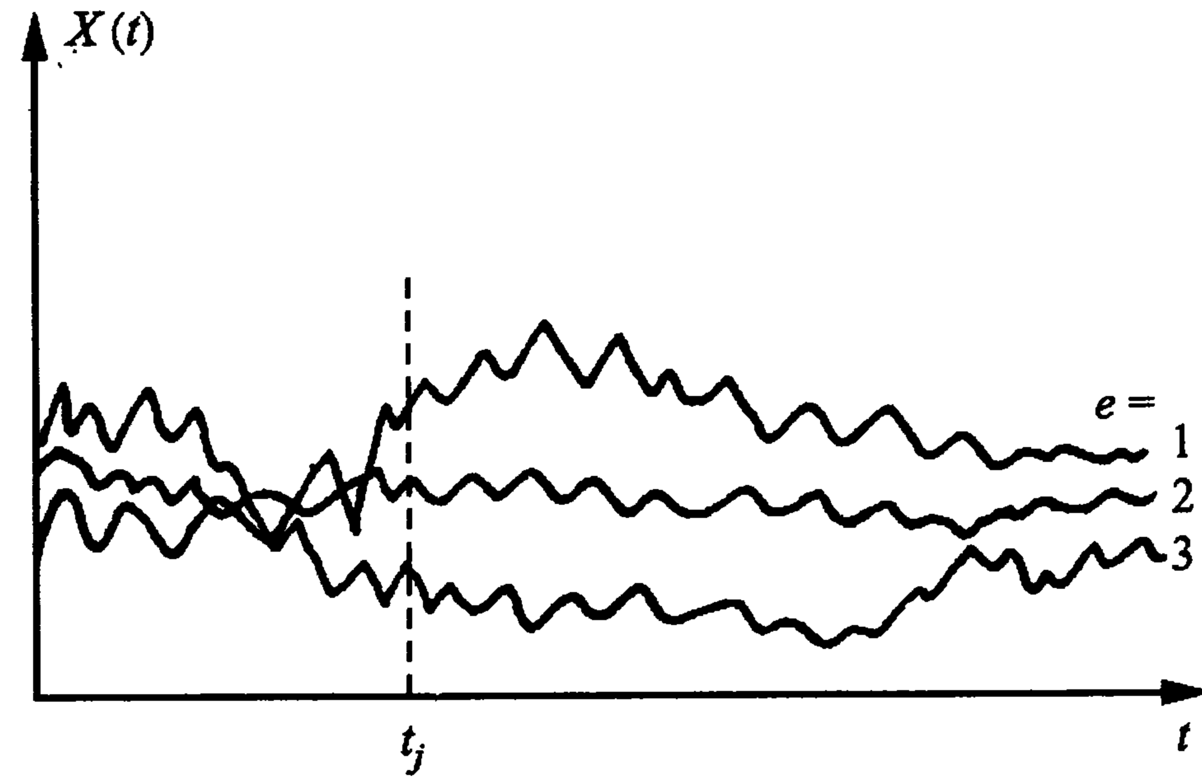


图 13.2 随机过程示意图

(i) 当 e 给定时，$X(t)$是一个时间上的随机样本函数(一次测量的纪录).

(ii) 当 $t=t_j$ 给定时，$X(t_j)$是一个随机变量.

(iii) 当 e 和 t 均为变量时，$X(t)$就被称为随机过程.

按照状态 $X(t)$和时间 t 取值的特征，可以将随机过程分成四类：

(i) 连续型随机过程——$X(t)$和 t 都是连续取值的.

(ii) 离散型随机过程——$X(t)$是离散取值，而 t 是连续取值的.

(iii) 连续型随机序列——$X(t_j)$是连续取值，而 t_j 是分立取值的.

(iv) 离散型随机序列——$X(t_j)$和 t_j 都是离散取值的.

2. 随机过程的数学描述

对一个随机过程也可以定义分布函数和概率密度

$$F(x,t)=P[X(t)\leqslant x],$$

$$f(x,t)=\frac{\partial F(x,t)}{\partial x}.$$

对一个随机过程的多个时刻可以定义高维的分布函数和概率密度. 例如对两个时刻，有

$$F(x_1,x_2;t_1,t_2)=P[X(t_1)\leqslant x_1,X(t_2)\leqslant x_2],$$

$$f(x_1,x_2;t_1,t_2)=\frac{\partial^2 F(x_1,x_2;t_1,t_2)}{\partial x_1\partial x_2}.$$

对随机过程也可以用一组数字特征——即矩来等价地描述，如(平)均值：

$$m(t)=\mathrm{E}[X(t)]=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x,t)\mathrm{d}x.$$

3. 均方值和方差

$$\psi_X^2(t)=\mathrm{E}[X^2(t)],$$

$$\sigma_X^2(t)=\mathrm{D}[X(t)]=\mathrm{E}\{[X(t)-m(t)]^2\}.$$

也可以有二维矩，如二阶原点矩——自相关函数：

$$R_X(t_1,t_2)=\mathrm{E}[X(t_1)X(t_2)]$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}x_1x_2f(x_1,x_2;t_1,t_2)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2,$$

以及二阶中心混合矩——协方差函数：

$$C_X(t_1,t_2)=\mathrm{E}\{[X(t_1)-m_X(t_1)][X(t_2)-m_X(t_2)]\}$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}[x_1-m_X(t_1)][x_2-m_X(t_2)]$$
$$\times f(x_1,x_2;t_1,t_2)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2$$
$$=R_X(t_1,t_2)-m_X(t_1)m_X(t_2).$$

可以看出，均方值就是同时刻的自相关，

$$\psi_X^2(t)=R_X(t,t).$$

方差就是同一时刻的协方差，

$$\sigma_X^2(t)=C_X(t,t)=R_X(t,t)-m_X^2(t).$$

对于两个随机过程 $X(t)$，$Y(t)$，存在互相关函数：

$$R_{XY}(t_1,t_2)=\mathrm{E}[X(t_1)Y(t_2)]$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xyf(x,t_1;y,t_2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

及互协方差函数：

$$C_{XY}(t_1,t_2)=\mathrm{E}\{[X(t_1)-m_X(t_1)][Y(t_2)-m_Y(t_2)]\}.$$

下面介绍几个常见的概念.

(i) 随机过程 $X(t)$和 $Y(t)$互相独立,指的是

$$f_{XY}(x,t_1;y,t_2)=f_X(x,t_1)f_Y(y,t_2),$$
$$R_{XY}(t_1,t_2)=m_X(t_1)m_Y(t_2),$$
$$C_{XY}(t_1,t_2)=0.$$

(ii) 随机过程 $X(t)$和 $Y(t)$互不相关,指的是

$$R_{XY}(t_1,t_2)=\text{常数},$$
$$C_{XY}(t_1,t_2)=0.$$

可以看出,互相独立则一定互不相关,反之则不一定成立.

(iii) 随机过程 $X(t)$和 $Y(t)$互相正交,指的是

$$R_{XY}(t_1,t_2)=0.$$

同样,正交不一定互不相关.

4. 随机过程的基本分类

随机过程复杂多变,并没有唯一或公认的分类方法;通常是根据随机过程的不同特征作各种不同的分类,因而同一个随机过程可以被用作不同的分类.下面把文献中常见的几种分类作简单扼要的介绍.对于一个任意的随机过程$\{X(t),t\in T\}$,$t_2<t_2<\cdots<t_n$,可以有以下的分类.

(1) 按其统计特性分成

(i) 平稳随机过程.

$$F_n(x_1,x_2,\cdots,x_n;t_1,t_2,\cdots,t_n)$$
$$=F_n(x_1,x_2,\cdots,x_n;t_1+\tau,t_2+\tau,\cdots,t_n+\tau),$$
$$n=1,2,\cdots.$$

(ii) 非平稳随机过程(不满足上述条件的随机过程).

(2) 按其记忆特性分成

(i) 纯粹随机过程(完全没有记忆的随机过程).

$$F_n(x_1,t_1;x_2,t_2;\cdots;x_n,t_n)=\prod_{j=1}^{n}F_1(x_j,t_j).$$

(ii) 马尔可夫过程.

一阶的马尔可夫过程(只保持对前一个时刻的记忆):

$$F_n(x_n,t_n|x_{n-1},t_{n-1};x_{n-2},t_{n-2};\cdots;x_1,t_1)=F_2(x_n,t_n|x_{n-1},t_{n-1}).$$

二阶的马尔可夫过程(对前两个时刻均能保持记忆):

$$F_n(x_n,t_n|x_{n-1},t_{n-1};x_{n-2},t_{n-2};\cdots;x_1,t_1)$$
$$=F_2(x_n,t_n|x_{n-1},t_{n-1};x_{n-2},t_{n-2}).$$

以及如此类推,可以有 k 阶的马尔可夫过程(对前 k 个时刻均能保持记忆).

(iii) 独立增量过程(维纳过程,布朗运动).

这是满足以下条件的马尔可夫过程:

对$\{X(t),t\geqslant 0\}$,用 $X(t_1,t_2)=X(t_1)-X(t_2)(0\leqslant t_1<t_2)$表示在$(t_1,t_2)$上的增量.如果对一切 $t_1<t_2<\cdots<t_n$,增量 $X(t_1,t_2)$,$X(t_2,t_3)$,$\cdots$,$X(t_{n-1},t_n)$都是互相独立的,就称$\{X(t),t\geqslant 0\}$为独立增量过程.

(3) 按其概率密度的函数形式分成

(i) 高斯分布:

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}\exp\left[-\frac{(x-m_X)^2}{2\sigma^2}\right],$$

其中 m_X,σ 分别是随机过程的(平)均值和方差.由于概率密度的函数表达式中只含有随机过程的一阶和二阶矩,所以高斯分布是一个由头两阶矩就能决定整个概率密度或者说其他全部高阶矩的分布.

(ii) 其他分布(如泊松分布、瑞利分布、二项式分布等等)

(4) 按其傅氏变换后的功率谱形状分类

这种分类只对一类特殊的随机过程——平稳随机过程才能进行.对于平稳随机过程,可以进行傅氏变换,它的自相关函数的傅氏变换称为功率谱

$$S(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}R(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau.$$

按 $S(\omega)$的函数形式可以将平稳随机过程分类成:

(i) 白(white)噪声.

$$S_0(\omega)=\frac{N_0}{2},\quad N_0=\text{常数},\quad \omega\in(-\infty,\infty).$$

(ii) 灰色(grey)噪声.

$$S(\omega)=\frac{1}{\omega}S_0.$$

这是一种在非线性科学中具有分数维数的曲线或分形结构的图形才会有的功率谱.

(iii) 布朗噪声.

$$S(\omega)=\frac{1}{\omega^2}S_0.$$

这是一阶马尔可夫过程对应的功率谱. 高阶马尔可夫过程的功率谱形为(以 k 阶为例)

$$S(\omega)\propto\frac{1}{\omega^{2k}}S_0.$$

13.1.3　平稳随机过程及傅氏分析

1. 严格的平稳过程

由前面的定义,平稳随机过程的概率密度满足以下条件

$$\begin{aligned}&f_n(x_1,x_2,\cdots,x_n;t_1,t_2,\cdots,t_n)\\&=f_n(x_1,x_2,\cdots,x_n;t_1+t_0,t_2+t_0,\cdots,t_n+t_0)\\&=f_n(x_1,x_2,\cdots,x_n;t_0),\quad n=1,2,\cdots.\end{aligned}$$

当 $n=1$(一维)时,$f_1(x,t)=f_1(x)$;它与时间无关.

当 $n=2$(二维)时,$f_2(x_1,x_2;t_1,t_2)=f_2(x_1,x_2;\tau)$;它只与时间差 $\tau=t_2-t_1$ 有关.

因此,平稳过程的均值和均方差都是与时间无关的常数:

$$\mathrm{E}[X(t)]=m_X,\quad \mathrm{D}[X(t)]=\mathrm{E}\{[X(t)-m_X]^2\}=\sigma^2.$$

而其自相关与协方差仅为时间差 τ 的函数:

$$\begin{aligned}R(t,t-\tau)&=\mathrm{E}[X(t)X(t-\tau)]=R(\tau),\\C(\tau)&=\mathrm{E}\{[X(t)-m_X][X(t-\tau)-m_X]\}\\&=R(\tau)-m_X^2,\\\Rightarrow C(0)&=R(0)-m_X^2=\sigma^2.\end{aligned}$$

可以证明,对于 $n=3,4,\cdots$ 的各高阶矩、高阶中心矩及相关函数,也都应该是常数或时间差 τ 的函数.

2. 广义的平稳过程

如果我们能证明一个随机过程的头二个阶矩满足

$$\mathrm{E}[X(t)]=\text{常数},$$

$$R(t_1,t_2)=\mathrm{E}[X(t)X(t-\tau)]=R(\tau),\quad \tau=t_2-t_1,$$

则称此过程为广义的平稳过程. 至于广义平稳过程的高阶矩,并未作规定. 对于广义平稳过程,有以下的定理:

——当 $X(t)$ 为高斯分布的广义平稳过程时,它一定也是严格平稳过程(反之亦然). 否则广义平稳过程不一定是严格的平稳过程.

——当 $X(t),Y(t)$ 均为广义平稳过程时,它们的联合分布也一定是广义平稳过程,并且其互相关函数仅是 τ 的函数

$$R_{XY}(\tau)=\mathrm{E}[X(t)Y(t-\tau)].$$

3. 相关系数和相关时间

定义相关系数为

$$r_X(\tau)=\frac{C_X(\tau)}{C_X(0)}=\frac{R_X(\tau)-m_X^2}{\sigma_X^2}.\tag{13.1}$$

当 $|r_X(\tau)|=1$ 时,称这两个时刻是完全相关的;而如果 $r_X(\tau)=0$ 则这两个时刻间是完全不相关的,而且总有 $r_X(0)=1$.

定义相关时间为

$$\tau_0=\int_0^\infty r_X(\tau)\mathrm{d}\tau,\ \Rightarrow\ \tau_0\cdot r_X(0)=\int_0^\infty r_X(\tau)\mathrm{d}\tau.\tag{13.2}$$

由此可见相关时间 τ_0 是一个等价的时间,即宽为 τ_0 高为 $r_X(0)$ 的矩形面积,等于曲线 $r_X(\tau)$ 下的总面积,如图 13.3. 在工程上,一般取相关时间为使 $|r_X(\tau_0)|\leqslant 0.05$ 时的时间长度 τ_0. 而在物理上,往往取使 $C_X(\tau)$ 或 $r_X(\tau)$ 产生显著变化的时间长度为相关时间: 例

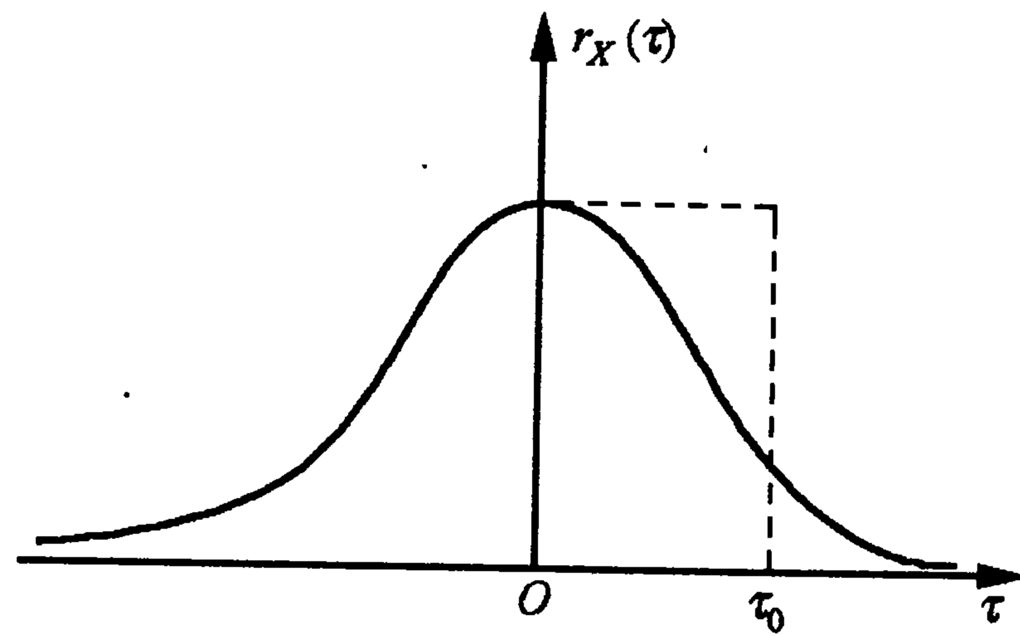


图 13.3 相关时间示意图

如使 $C_X(\tau)$ 下降到最大值一半 $C_X(\tau_0)=0.5C_X(0)$ 的时间；或下降到 1/e 的时间. 如当

$$C_X(\tau), r_X(\tau) \propto e^{-\lambda|\tau|}$$

时，取 $\tau_0=1/\lambda$. 习惯上通常把 τ_0 称为弛豫时间，而称 λ 为弛豫频率.

4. 时间平均与各态历经

前面讲的平均 E{…}指的是集平均，也即系综平均：

$$\mathrm{E}\{X(t)\} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i(t).$$

其中 $\{x_i\}$ 是在同一时刻、对同一体系的 N 个处在相同宏观条件下的样本作测量时，所得出的一组测量值.

另一种平均 $\overline{X(t)}$，是指对某一随机过程 $X(t)$ 的一个确定的样本 $x\in\{x_i\}$ 作长时间的测量，然后对它们作时间平均

$$\overline{X(t)} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x(t)\mathrm{d}t.$$

当一个随机过程具有各态历经性，则它的集平均将以概率 1 等于相应的时间平均. 因此，各态历经过程是平稳过程的一个子集. 如果以随机过程的数学特征来判断以上条件是否得到满足，这将要求此随机过程由时间平均得出的所有阶矩，都等于由集平均得出的相应阶矩. 但要对无穷阶矩（通过计算或测量）都作出等价的判断很困难，所以实际上往往采用一个比较宽松的限制条件. 即只要随机过程的头两个矩满足等价条件

$$\overline{X(t)} = \mathrm{E}[X(t)] = m_X,$$

$$\overline{X(t+\tau)X(t)} = \mathrm{E}[X(t+\tau)X(t)] = R_X(\tau),$$

就称这个随机过程为准各态历经过程.

5. 能谱、功率谱和互谱密度

通常所测量到的信号可以分成能量型（图 13.4(a)）和功率型

（图 13.4(b)）两种. 对于能量型信号 $S(t)$，其能量

$$W = \int_{-\infty}^{\infty} S^2(t)\mathrm{d}t < \infty.$$

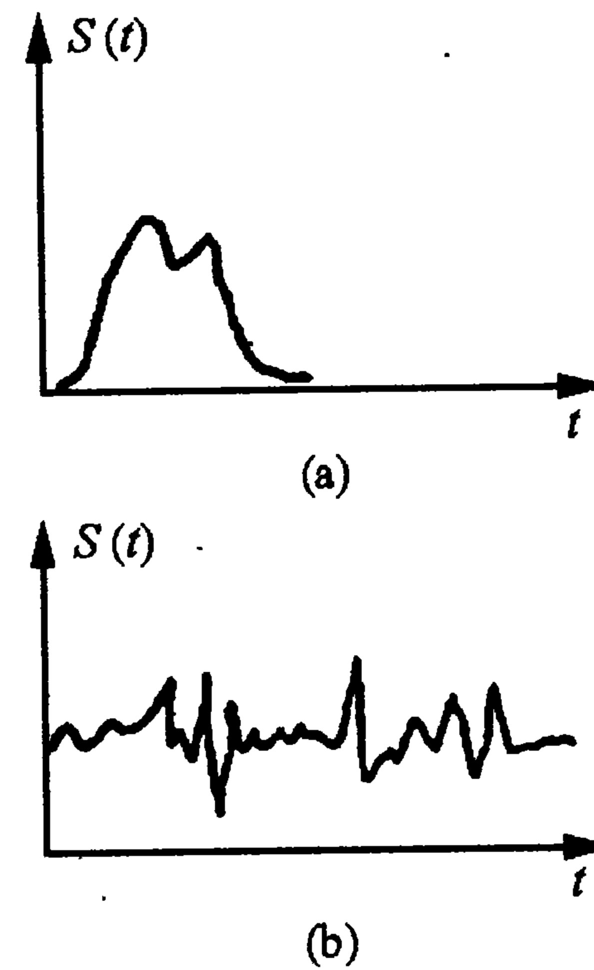


图 13.4 (a) 能量型信号和 (b) 功率型信号

按傅氏变换的理论，若 $\int_{-\infty}^{\infty}|S(t)|\mathrm{d}t<\infty$，则 $S(t)$ 的傅氏变换 $F(\omega)$ 存在，物理上称它为 $S(t)$ 的频谱，

$$S(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega t}\mathrm{d}\omega,$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} S(t)e^{-i\omega t}\mathrm{d}t. \quad (13.3)$$

由它可以定义能谱密度

$$E(\omega) = |F(\omega)|^2. \quad (13.4)$$

并有

$$W = \int_{-\infty}^{\infty} S^2(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} E(\omega)\mathrm{d}\omega. \quad (13.5)$$

上式可以通过将 $S(t)$ 的傅氏变换表达式(13.3)代入，并利用下面的 δ 函数公式而直接导出.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\omega_1+\omega_2)t}dt = 2\pi\delta(\omega_1+\omega_2).$$

对于能量型信号，其平均功率为零：$\lim\limits_{T\to\infty} W/T \to 0$.

对于功率型的信号（如正弦信号、平稳过程的样本函数等），当 $T\to\infty$ 时，虽然其能量是无限大；但其平均功率仍然是有限的，

$$P = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-\infty}^{\infty} S^2(t)\mathrm{d}t < \infty.$$

因此，可以先在一段有限（但足够）长的时间 $(-T)\to T$ 内，对信号作傅氏变换，并得到其（在有限时间中的）频谱

$$F(\omega, T) = \int_{-T}^{T} S(t)e^{-i\omega t}\mathrm{d}t. \quad (13.6)$$

然后，可以定义信号的功率谱密度

$$S(\omega)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}|F(\omega,T)|^2. \qquad (13.7)$$

有

$$P=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}S^2(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S(\omega)\mathrm{d}\omega. \qquad (13.8)$$

对平稳过程 $X(t)$，上面的 $S(t)$ 只是它的一个样本，故还应对上述的平均功率再作集平均，得

$$P_X=\lim_{T\to\infty}\mathrm{E}\left\{\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}X^2(t)\mathrm{d}t\right\}. \qquad (13.9)$$

由于平稳过程的均方值是常数 $(\sigma^2+m_X^2)$，故上式中的集平均 $\mathrm{E}\{\cdots\}$ 和时间积分 $\int_{-T}^{T}$ 可以互换次序，

$$P_X=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\mathrm{E}[X^2(t)]\mathrm{d}t$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\mathrm{E}\{|F_X(\omega,T)|^2\}\mathrm{d}\omega.$$

从上面的最后一个表达式，可以将集平均的功率谱密度定义成

$$S_X(\omega)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\mathrm{E}\{|F_X(\omega,T)|^2\}, \qquad (13.10)$$

有

$$P_X=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S_X(\omega)\mathrm{d}\omega.$$

由于在实验室中测量到的信号通常都是功率型的，故下面将把功率谱密度的下标略去. 为了应用的方便，这里将给出几个有用的定理.

可证：一个平稳随机过程的功率谱密度 $S_X(\omega)\equiv S(\omega)$ 和它的自相关函数 $R(\tau)$ 是傅氏变换中的一对共轭量

$$S(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}R(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\tau}\mathrm{d}\tau,$$

$$R(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\tau}\mathrm{d}\omega,$$

$$R(0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S(\omega)\mathrm{d}\omega.$$

若 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 是联合平稳的，则互谱密度有如下性质

$$S_{XY}(\omega)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\mathrm{E}\{F_X(\omega,T)F_Y(\omega,T)\}$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}R_{XY}(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\tau}\mathrm{d}\tau,$$

$$R_{XY}(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S_{XY}(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\tau}\mathrm{d}\omega,$$

$$S_{XY}(\omega)=S_{XY}^*(\omega)=S_{YX}(-\omega).$$

*例 1** 若 $X(t),Y(t),Z(t)$ 均为平稳过程，并有 $Z(t)=X(t)+Y(t)$，则有

$$R_Z(\tau)=R_X(\tau)+R_Y(\tau)+S_{XY}(\tau)+S_{YX}(\tau),$$
$$S_Z(\omega)=S_X(\omega)+S_Y(\omega)+2\mathrm{Re}[S_{XY}(\omega)].$$

例 2 白噪声. 这是一个平稳过程，故存在频谱. 其功率谱如图 13.5，为一常数，

$$S(\omega)=S(0)=\frac{N_0}{2}.$$

其对应的自关联函数为

$$R(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{N_0}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\tau}\mathrm{d}\omega=\frac{N_0}{2}\frac{1}{2\pi}2\pi\delta(\tau)$$
$$=\frac{N_0}{2}\delta(\tau).$$

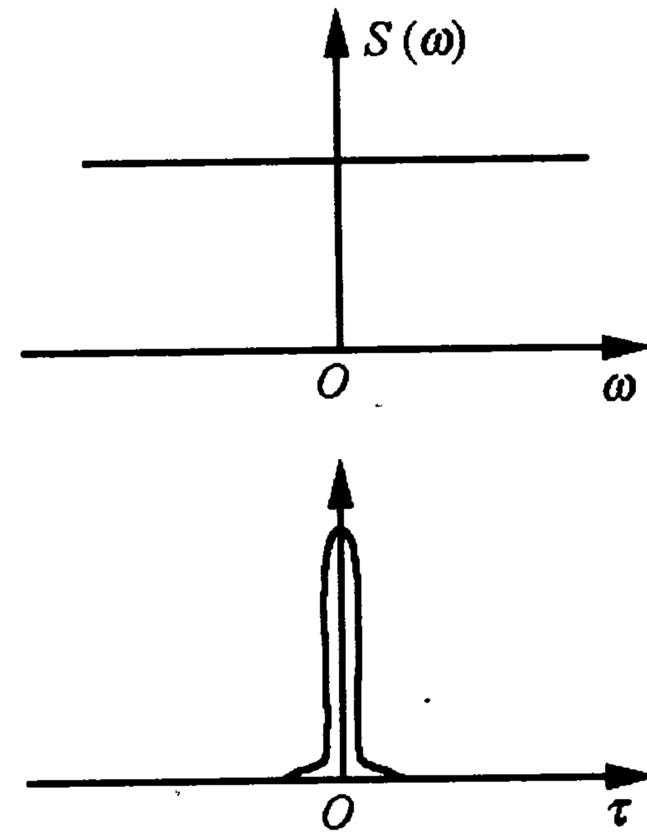


图 13.5 白噪声的图形

这实际上表明：白噪声信号是前后完全不相关的. 其相关系数 $r(0)=1,r(\tau\neq0)\equiv0$.

例 3 马尔可夫过程的功率谱.

一阶马尔可夫过程 $u(t)$ 可以用下面的朗之万方程来描述：

$$m\dot{u}t=-m\gamma u(t)+W(t),$$

其中 $W(t)$ 是白噪声信号，γ 是摩擦因数(常数). 对上述的常微分方程作傅氏展开，变成线性代数方程后可得

$$u(\omega)=\frac{1}{\mathrm{i}\omega+\gamma}\frac{W(\omega)}{m},$$

它就是$u(t)$的频谱.相应的功率谱为

$$S^{(1)}(\omega)=|u(\omega)|^2=\frac{1}{\omega^2+\gamma^2}\frac{S_W}{m^2},\quad S_W=|W(\omega)|^2=\text{常数}.$$

这就是说，一阶马尔可夫过程的功率谱对频率的依赖关系是$S^{(1)}(\omega)\propto\omega^{-2}$.而二阶马尔可夫过程可用二阶常微分方程来描述：

$$\frac{\mathrm{d}^2x(t)}{\mathrm{d}t^2}+\gamma\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}=\frac{W(t)}{m}.$$

如果引入辅助变量$u(t)=\mathrm{d}x(t)/\mathrm{d}t$，则可以把一个二阶微分方程改成二个一阶常微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}=u(t),$$

$$\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}+\gamma u(t)=\frac{W(t)}{m}.$$

对这个常微分方程组作傅氏变换后可得二阶马尔可夫过程的功率谱

$$S^{(2)}(\omega)=|x(\omega)|^2=\frac{1}{\omega^2(\omega^2+\gamma^2)}\frac{S_W}{m^2}.$$

这表明，二阶马尔可夫过程的功率谱$S^{(2)}(\omega)\propto\omega^{-4}$.通过类似的方法，可以得知$k$阶马尔可夫过程的功率谱与频率的依赖关系：

$$S^{(k)}(\omega)\propto\frac{1}{\omega^{2k}}.$$

从这样谱的形状可以看出，所有马尔可夫过程的功率谱对频率的依赖都是负偶次方幂的，不存在奇次方幂.之所以无奇次方幂的谱，是由于不存在1/2次幂的时间导数.因此如果一个随机过程的功率谱是频率的负一次方幂(如前面所说的灰色噪声)，而又想用朗之万型的微分方程来描述的话，它的“时间导数”就应该是0.5次，也即存在着“分数”的时间维数.这种用分数维时空来描述的随机过程在近二十年来被广泛研究的非线性动力学中被认为是所谓的混沌过程的特征.奇异吸引子的功率谱不但有(频率的)负奇数次幂，还有负分数次幂依赖的，因此无法通过朗之万型的微分方程来描述.

6. 高阶谱

上面讨论的都是傅氏变换的二阶(频率)谱，原则上还可以定义傅氏变换的更高阶(频率)谱.只是限于测量高阶谱的实验困难，在以往用得比较少.近年来，由于非线性过程研究的需要，已经发展了一些高阶谱的描述方法.例如，在湍动过程中，往往存在大量的扰动模式($\omega_{\min}<\omega<\omega_{\max}$).在实际研究时，常想知道其中某一个模式$\omega$究竟是原发的还是通过其他模式的非线性耦合而发展起来的.这一点现在可以通过傅氏变换的双谱来判断.下面将给出简明的介绍，有兴趣的读者请参考文献[1]和[2].

设有三个模式：ω,ω_1,ω_2，它们分别是随机过程$X(t)$傅氏变换

$$X_f\equiv X(f)=\int X(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t$$

的三个模式的频率.这时可以定义一系列三阶谱.首先有双谱

$$B(\omega_1,\omega_2)=\langle X_{f1}X_{f2}X_f^*\rangle\equiv\int_T X_{f1}(\tau)X_{f2}(\tau)X_f^*(\tau)\mathrm{d}\tau,\tag{13.11}$$

其中T表示样本的(时间)长度.其次有双相干谱

$$b(\omega_1,\omega_2)=\frac{|B(\omega_1,\omega_2)|}{\sqrt{\langle|X_{f1}X_{f2}|^2\rangle\langle X_fX_f^*\rangle}},\quad 0\leqslant b(\omega_1,\omega_2)\leqslant 1.\tag{13.12}$$

还有求和双相干谱

$$b^2(\omega)=\sum_{\omega_1,\omega_2}^{\omega_1+\omega_2=\omega}b^2(\omega_1,\omega_2)/S(\omega),\tag{13.13}$$

和总双相干谱

$$b^2=\sum_{\omega_1,\omega_2}^{\omega_1+\omega_2=\omega}b^2(\omega_1,\omega_2)/S,\tag{13.14}$$

其中$S(\omega)$和S分别是功率谱和总功率.

当模式ω是通过ω_1和ω_2的非线性耦合而得到时，应该满足能

量守恒条件 $\omega=\omega_1+\omega_2$. 这时 $b^2(\omega)$在 ω 处必须有极大值，同时 $B(\omega_1,\omega_2)$和 $b(\omega_1,\omega_2)$应当取大值；否则模式 ω 就不是通过 ω_1 和 ω_2 模式的非线性耦合而来的，它非常可能是原发性的不稳定模式. 辨认出湍动状态中原发性的不稳定模式，可以帮助我们对湍流进行科学的分类，研究其产生和发展的机制，并找到抑制它的有效方法. 随着对各种湍动过程的深入研究，其他类型的傅氏高阶谱也一定会被寻找出来.

从上面的讨论可以看出，前面我们对随机过程的分类及数学描述实际上只涉及很少一部分的随机过程. 迄今为止，我们对随机过程的认识还是十分有限和肤浅的，描述方法也非常贫乏. 下面我们将十分简单地介绍一些近 20 年来才出现的(对随机过程)新描述方法，以开拓读者的眼界.

13.1.4　非平稳随机过程的时(间)-频(率)分析

对于非平稳的随机过程，傅里叶变换原则上不能进行，因为不同时间段的信号所包含的过程信息并不相同，因而它们的频谱也不一样. 这时完整的描述应该包括分属过程所有特征时间段的频谱，通常简称为信号的时频表示，或信号的瞬态谱. 信号的时频表示又分成两大类：

线性时频表示：小波(wavelet)变换，短时傅里叶变换，Gabor 展开，等等.

非线性时频表示：目前常用的是二次(能量)型的时频表示，这类表示已有近 20 种，如 Wigner-Villey 分布、Cohen 分布、Richaczek 分布、Choi-Williams 分布，等等. 非二次型的时频表示则有径向自适应——高斯核分布、Cohen 非负分布，等等.

这里只简单地介绍两种最常用的时频表示：线性的小波变换和二次型的 Wigner-Villey变换，对它们的详细讨论，以及对其他时频表示的介绍请分别参考下面开列的文献.

1. 小波(wavelet)分析

目前有关于小波分析的参考书已经非常多了，有关其原理的参考文献请参见文献[3]—[6].

类比傅氏变换中的完备正交基 $\exp[-in\omega t]$，$n=\pm1,\pm2,\cdots$，这时取小波变换的完备正交基为

$$\psi_{a,b}(t)=a^{-1/2}\psi\left(\frac{t-b}{a}\right),\quad a,b\in\mathbf{R}^+. \tag{13.15}$$

其中 $\mathbf{R}^+$表示正实数集合，a 称为频率放(大)缩(小)因子，而 b/a 则代表(时间)平移因子. 例如 $\psi(t/2)$和 $\psi(t)$有相似的函数形式，但时间尺度缩小到一半，频率增倍；而 $\psi(t-t_0)$和 $\psi(t)$函数形状完全相同，只是在时间轴上(向右)平移了 t_0.

目前已经发展出了各式各样的小波函数基，不同的信号处理领域往往钟爱不同的小波函数基. 与傅氏变换不同的是，小波变换及其逆变换很少能通过解析方式进行. 在各种参考书以及网上往往可以查到进行小波变换的各种数值编程，这里就不介绍了.

定义信号的连续小波变换为

$$W_f(a,b)=\langle f,\psi_{a,b}\rangle\equiv|a|^{-1/2}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\psi^*\left(\frac{t-b}{a}\right)\mathrm{d}t. \tag{13.16}$$

它对应的逆变换为

$$f(t)=\frac{1}{C_\psi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}[W_f(b,a)]\psi_{b,a}(t)\,\frac{\mathrm{d}a}{a^2}\mathrm{d}b,$$

$$C_\psi=\int_{-\infty}^{\infty}|\Psi(\omega)|^2\,\frac{\mathrm{d}\omega}{|\omega|}<\infty, \tag{13.17}$$

其中 $\Psi(\omega)$是 $\psi(t)$的傅氏变换.

可以看出，小波变换的谱 $W_f(a,b)$是频率 a 和时间 b/a 依赖的，同样也可以给出时间分辨的功率谱，互谱，双谱，等等. 例如有

小波功率谱：

$$S(a,b)=|W_f(a,b)|^2.$$

又如，取某一个时间间隔 $\tau_0\leqslant\tau\leqslant\tau_1$，$T_0=\tau_1-\tau_0$ 后，可以定义

小波互谱 (cross-spectrum)：

$$C_{fg}^{W}(a)=\int_{T_0}W_f^*(a,\tau)W_g(a,\tau)\mathrm{d}\tau.$$

它是属于时间间隔(τ_0,τ_1)中的量;如取不同的时间间隔(τ_{i+1},τ_i),则可以得到属于不同特征时间间隔的小波互谱.

小波延迟互谱:

$$C_{fg}^{W}(a,\Delta\tau)=\int_T W_f^*(a,\tau)W_g(a,\tau+\Delta\tau)\mathrm{d}\tau. \tag{13.18}$$

归一化的小波互相干:

$$\gamma_{fg}^{W}(a,\Delta\tau)=\frac{|C_{fg}^{W}(a)|}{[P_f^W(a)P_g^W(a)]^{1/2}}. \tag{13.19}$$

其中$P_f^W(a)=C_{ff}^W(a)$是小波自功率谱.同样也有小波的高阶谱,如当

$$\frac{1}{a}=\frac{1}{a_1}\pm\frac{1}{a_2}\quad\left(\omega=\frac{1}{a},\omega=\omega_1\pm\omega_2\right)$$

时,有

小波双谱:

$$B_{fg}^{W}(a_1,a_2)=\int_T W_f^*(a,\tau)W_g(a_1,\tau)W_g(a_2,\tau)\mathrm{d}\tau. \tag{13.20}$$

小波自双谱:

$$B^W(a_1,a_2)=B_{ff}^W(a_1,a_2). \tag{13.21}$$

小波互双相干:

$$[b_{fg}^W(a_1,a_2)]^2=\frac{|B_{fg}^W(a_1,a_2)|^2}{\left[\int_T|W_g(a_1,\tau)W_g(a_2,\tau)|^2\mathrm{d}\tau\right]P_f^W(a)},$$

$$0<b_{fg}^W(a_1,a_2)<1. \tag{13.22}$$

小波自相干:

$$[b^W(a_1,a_2)]^2=[b_{ff}^W(a_1,a_2)]^2. \tag{13.23}$$

小波双相干:

$$[b^W(a)]^2=\frac{1}{S(a)}\sum_{a_1,a_2}^{a_1+a_2=a}[b^W(a_1,a_2)]^2. \tag{13.24}$$

小波总双相干:

$$[b^W]^2=\frac{1}{S}\sum_{a_1,a_2}^{a_1+a_2=a}[b^W(a_1,a_2)]^2. \tag{13.25}$$

从已发表的研究工作来看,与傅里叶双谱相比,小波双谱有以下优点:时间分辨好,在相同的数据序列下可以降低噪声.而缺点是牺牲了频率分辨率.

2. Wigner-Villey 变换[7],[8]

两个随机过程$f(t)$和$g(t)$的互WD(Wigner-Villey)变换定义成

$$W_{f,g}(t,\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\tau}f\left(t+\frac{\tau}{2}\right)g^*\left(t-\frac{\tau}{2}\right)\mathrm{d}\tau, \tag{13.26}$$

有

$$W_{f,g}(t,\omega)=W_{g,f}^*(t,\omega). \tag{13.27}$$

而一个信号$f(t)$的自WD变换定义为

$$W_f(t,\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\tau}f\left(t+\frac{\tau}{2}\right)f^*\left(t-\frac{\tau}{2}\right)\mathrm{d}\tau. \tag{13.28}$$

若将$f(t)$和$g(t)$的傅氏变换写成$F(\omega)$和$G(\omega)$,则有谱的WD变换

$$W_{F,G}(\omega,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi t}F\left(\omega+\frac{\xi}{2}\right)G^*\left(\omega-\frac{\xi}{2}\right)\mathrm{d}\xi. \tag{13.29}$$

可以证明信号的WD变换等于其傅氏谱的WD变换

$$W_{f,g}(t,\omega)=W_{F,G}(\omega,t). \tag{13.30}$$

对WD变换(和对傅氏变换一样)也可以通过它的各阶矩来作数学描述.不过由于WD变换同时是t和ω依赖的,所以它的矩也分成时间依赖(但对频率求平均)的矩和频率依赖(对时间求平均)的矩.还应该特别注意的是:$W_f(t)$并不一定总是正的,因此对它的各种矩作物理解释时要特别小心.

3. WD 变换的频率矩

它们又可以分成局部矩(只对频率求平均)和整体矩(对频率和时间都求平均).

(1) 局部矩

零阶矩(对频率的平均):

$$P_f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} W_f(t,\omega)\mathrm{d}\omega = |f(t)|^2. \tag{13.31}$$

因此 $P_f(t)$是信号 $f(t)$的瞬时功率，并且是非负的. 对于 $P_f(t)>0$ 的时刻 t，可以有 WD 变换的更高阶(频率)矩.

一阶矩：

$$\Omega_f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \omega W_f(t,\omega)\mathrm{d}\omega / P_f(t). \tag{13.32}$$

$\Omega_f(t)$可以解释成 t 时刻 WD 变换的平均频率(或瞬时频率). 可证

$$\Omega_f(t) = \mathrm{Im}\,\frac{f'(t)}{f(t)} = \mathrm{Im}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln f(t). \tag{13.33}$$

如把(复)信号写成

$$f(t) = A(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi(t)}, \tag{13.34}$$

则有

$$\Omega_f(t) = \phi'(t).$$

这表示信号的瞬时频率是其辐角对时间的一阶导数，而且当 $f(t)$ 是实信号时($\phi=0$)，$\Omega_f(t)=0$.

二阶矩：

$$m_f(t) = -\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}[\omega-\Omega_f(t)]^2 W_f(t,\omega)\mathrm{d}\omega / P_f(t). \tag{13.35}$$

由于 $W_f(t)$并不总为正，故 m_f 也不能保证是正的，因此不能将它简单解释为频率的方差. 同样可证

$$m_f(t) = -\frac{1}{2}\mathrm{Re}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{f'(t)}{f(t)}.$$

利用(13.34)式，有

$$m_f(t) = -\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{A'(t)}{A(t)} = -\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\ln|A(t)|.$$

则当 $|A(t)|=A_0\exp[\gamma t]$(A_0,γ=常数) 时，$m_f(t)=0$.

(2) 整体矩

整体零阶矩：

$$\overline{P_f} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} W_f(t,\omega)\mathrm{d}t\mathrm{d}\omega = \|f\|^2 = \|F\|^2. \tag{13.36}$$

只要信号存在、它总是正的，所以代表了信号的全部能量.

整体一阶矩：

$$\overline{\Omega_f} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \omega W_f(t,\omega)\mathrm{d}t\mathrm{d}\omega / \overline{P_f}$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \omega|F(\omega)|^2\mathrm{d}\omega / \|F\|^2$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \Omega_f|f(t)|^2\mathrm{d}t / \|f\|^2.$$

它代表的是 WD 变换的整体平均频率：即一方面等于信号谱的平均频率；另一方面等于信号的瞬时频率加权平均.

整体二阶矩：

$$\overline{m_f} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (\omega-\overline{\Omega_f})^2 W_f(t,\omega)\mathrm{d}t\mathrm{d}\omega / \overline{P_f}$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} (\omega-\overline{\Omega_f})^2|F(\omega)|^2\mathrm{d}\omega / \|F\|^2.$$

由于 $\overline{m_f}$的非负性，因此可以解释为信号谱的离散程度.

4. 时间矩

类似频率矩，它们也可分成局部矩和整体矩.

(1) 局部矩

零阶矩(对时间的平均)：

$$P_f(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} W_f(t,\omega)\mathrm{d}t = |F(\omega)|^2. \tag{13.37}$$

一阶矩：

$$T_f(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} tW_f(t,\omega)\mathrm{d}t / P_f(\omega), \tag{13.38}$$

它可以解释成信号的平均时间. 可证

$$T_f(\omega) = -\mathrm{Im}\,\frac{F'(\omega)}{F(\omega)} = -\mathrm{Im}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\ln F(\omega). \tag{13.39}$$

如把信号的傅氏谱写成

$$F(\omega) = A(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi(\omega)}, \tag{13.40}$$

则有

$$T_f(\omega) = -\psi'(\omega).$$

由于 $F(\omega)$有系统传递函数的意义,故 T_f 有系统"群延迟"的物理意义.

二阶矩:

$$M_f(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}[t-T_f(\omega)]^2W_f(t,\omega)\mathrm{d}t/P_f(\omega). \qquad (13.41)$$

同样可以有

$$M_f(\omega) = -\frac{1}{2}\mathrm{Re}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\frac{F'(\omega)}{F(\omega)} = -\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\omega^2}\ln|A(\omega)|.$$

(2) 整体矩

零阶整体矩即为 $\overline{P_f}$,见式(13.36).而一阶整体矩为

$$\overline{T_f} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}tW_f(t,\omega)\mathrm{d}t\mathrm{d}\omega/\overline{P_f}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}T_f(\omega)|F(\omega)|^2\mathrm{d}\omega/\|F(\omega)\|^2$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}t|f(t)|^2\mathrm{d}t/\|f\|^2.$$

它代表的是 WD 变换的整体平均时间:即一方面等于信号的平均时间;另一方面等于信号群延迟的加权平均,权函数则为能量密度谱.

二阶整体矩为

$$\overline{M_f} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(t-\overline{T_f})^2W_f(t,\omega)\mathrm{d}t\mathrm{d}\omega/\overline{P_f}$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}(t-\overline{T_f})^2|f(t)|^2\mathrm{d}t/\|f\|^2 > 0.$$

以上只是关于 WD 变换的粗浅介绍,但已经可以看出它可以描述非平稳随机过程的瞬时频谱特性.与小波分析相比,它的优点是所采取的完备正交基与傅氏变换相同,十分简单、成熟;它的缺点是由于变换函数对信号的依赖关系是非线性的,在作代数运算时不如小波变换简单.

13.1.5 非线性动力学的分析

在非线性动力学中,对于随机(无规)的时间信号序列发展了一系列的特征数值描述,如广义维、李雅普诺夫(Lyapunov)指数,等等.它们通常都是运用计算机对所提供的数据流直接作数值分析而得到的.事先对这些数据流的性质和质量并无特殊要求,因而是相当普适的分析方法.但在另一方面,这些数值特征都是宏观的、唯象的,没有时间分辨和模式分辨,形式上有点像 WD 变换的整体矩.而且迄今为止它们和(物理学上有意义的)可测量量之间尚无直接、可靠的关系.因此在许多定量化描述程度很高的物理学研究领域里并没有取得许多人原来期望的成功.相反,在一些定量化描述程度较低的物理学研究领域以及相当多的比物理学复杂得多的研究领域,由于原来连最起码的分析都难以开展,现在应用这些特征数值多少可以得出一些定性上的描述,进而帮助人们建立起唯象的图像,因此受到了广泛的重视.

这里,将对几种常用的数值特征量作最简明扼要的介绍.详细的讨论以及具体的计算程式请参考这方面的专著及文献.在汗牛充栋的非线性科学书籍中,文献[9]是作者认为的较为实用的好书,推荐读者参考.

1. 广义维

前面曾指出,存在着许多用普通解析方法(如微分和积分运算)无法描述的随机过程,因为如果对它们硬作傅氏变换后,会发现其频谱对应的随机微分方程中的时间导数应该是分数维的.这就是说,这类随机过程在其相空间中应该具有分数维数.由于目前尚无分数维空间的解析分析方法,所以在非线性动力学中发展了许多从随机信号 $f(t)$通过计算机计算其分数维数的数值方法.广义维就是最常用的一类表示吸引子(可看成一随机过程)在相空间中的几何结构(分数维数)的数值表征.

在定义广义维时，将 M 维相空间中奇异吸引子的时间演化 $f(t)$ 分离采样 N 点. 另外，把 M 维的相空间分成 $M(r)$ 个体积为 r^M 的小"M 方"盒子. 设在第 $k(k=1,2,\cdots,M(r))$ 个盒子中发现了 N_k 个采样点，则随机过程 $f(t)$ 在这个相空间元(小盒子)中的概率为

$$p_k = \lim_{N\to\infty} \frac{N_k}{N}.$$

由此可定义广义维为

$$D_q = \frac{1}{q-1} \lim_{r\to 0} \frac{\log\left(\sum_{k=1}^{M(r)} p_k^q\right)}{\log r}, \quad q > 0. \tag{13.42}$$

其中 q 是任一正实数. 在实际应用中，常用以下几种特殊 q 值时的分数维作为数值表征.

2. 豪斯多夫(Hausdorff)余维

当 $q\to 0$ 时，上式变成

$$D_0 = \lim_{r\to 0} \frac{\log M(r)}{\log|r|}. \tag{13.43}$$

这就是所谓的豪斯多夫余维.

3. 信息维(或科尔莫戈罗夫(Kolmogorov)熵)

当 $q\to 1$ 时，广义维的定义式变成

$$D_1 = \lim_{r\to 0} \frac{\sum_{k=1}^{M(r)} p_k \log p_k}{\log|r|}. \tag{13.44}$$

这就是所谓的信息(information)维，在许多文献中也称为科尔莫戈罗夫熵. 上式中的分子

$$s = \sum_{k=1}^{M(r)} p_k \log p_k, \tag{13.45}$$

有时也被用作描述随机过程的数值特征，称为信息熵.

科尔莫戈罗夫熵常被用来描述一个动力学体系的演化行为. 例如当一个随机过程 $f(t)$ 的 $D_1=0$ 时，可以判断此体系必定作周期运动；反过来当 $D_1=\infty$ 时，则可断定这是一个白噪声体系；而当 D_1 取有限值时，体系将处于不同程度的确定性混沌状态.

4. 相关维

当 $q=2$ 时，广义维的定义式变成

$$D_2 = \lim_{r\to 0} \frac{\log \sum_{k=1}^{M(r)} p_k^2}{\log|r|}, \tag{13.46}$$

它被称为相关维. 一般认为，系统(随机过程)的自由度(也即包容此分数维几何结构的最小相空间的正整数维数) D_{zz} 应该等于将 D_2 值取整(数)后再加 1. 因此，如果我们想要构造一个解析的数学模型来对此随机过程作进一步的定量描述时，至少应该取 D_{zz} 维的空间. 这种试图通常被称为对奇异吸引子(随机过程)的"动力学重构"，但目前还没有令人满意的成果.

5. 李雅普诺夫指数

一个动力学体系的演化过程可以用其在相空间中代表点的运动轨道来描述. 如果系统在相空间的轨道只是一点，并不随时间演化而运动，我们就称系统的演化行为为"不动点"，它表示系统处在静止状态. 随机演化过程的相空间轨道往往呈现出无规性，不但从一点出发的轨道以后不再回归这点，而且从不同但初始非常靠近的相点出发的轨道也会随时间而愈离愈远. 若在相空间的某个方向上初始相邻的轨道其间距不随时间而变，就可以认为在这个方向上系统的演化过程是周期性的. 而当相空间的某个方向上初始相邻的轨道其间距是随时间指数型地减少时，可以认为在这个方向上系统的演化过程是稳定的. 动力学体系在相空间某方向上各轨道间距的时间变化可以半定量地用一指数函数来描述

$$d(t) = d(0)e^{\gamma t}. \tag{13.47}$$

其中 γ 是表征轨道间距变化方向和快慢的特征量，称为李雅普诺夫指数(可证它也是信息维 D_1). 当李雅普诺夫指数为负($\gamma<0$)时，系统在这个方向上的演化就是稳定的；当李雅普诺夫指数为零

($\gamma=0$)时，系统在这个方向上的演化是周期性的；而当李雅普诺夫指数为正($\gamma>0$)时，系统在这个方向上的演化一定是混沌的. 系统在一个方向上往往有不止一个李雅普诺夫指数，但只要有一个为正，系统就出现混沌行为，并且正的李雅普诺夫指数个数愈多，系统的混沌程度就愈高.

以有 4 个李雅普诺夫指数($\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4$) 的相空间演化过程为例，当这 4 个李雅普诺夫指数依次为

(−，−，−，−)时，系统状态为定态(或不动点)；

(0，−，−，−)时，系统状态为周期振荡(或极限环)；

(0，0，−，−)或(0，0，0，−)时，系统状态为准周期振荡；

(+，0，−，−)时，系统状态为混沌态；

(+，+，0，−)时，系统状态为超混沌态.

还可以证明所有李雅普诺夫正指数之和总大于科尔莫戈罗夫熵，

$$\sum_i \gamma_i^+ \geqslant D_1.$$

由以上的介绍可以看出，非线性动力学的数学特征量只能给出体系随机程度的定性或至多是半定量的整体描述. 从它目前的发展水平来看，还不能满足描述等离子体湍动过程的要求.

13.2　准线性过程及弱湍理论简介

13.2.1　概　　述

现在回到弗拉索夫理论，对无碰撞的等离子体体系，其分布函数的演化由弗拉索夫方程描述：

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\boldsymbol{v}\cdot\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{r}}+\boldsymbol{F}\cdot\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{p}}=0.$$

其中 $\boldsymbol{p}=m\boldsymbol{v}$ 是粒子的动量，$\boldsymbol{F}=q(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}/c)$是洛伦兹力，而电、磁场 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 则满足麦克斯韦电磁方程组(从略). 这里与线性理论

不同的是，f 和 $\boldsymbol{F}$ 都是平稳随机过程，而不是单频的扰动过程. 下面来给出弱湍理论对此问题的解决方法. 令

$$f=f^{(0)}+\tilde{f},\quad f^{(0)}=\langle f\rangle,\quad \langle\tilde{f}\rangle=0;$$

$$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}^{(0)}+\tilde{\boldsymbol{F}},\quad \boldsymbol{F}^{(0)}=\langle\boldsymbol{F}\rangle,\quad \langle\tilde{\boldsymbol{F}}\rangle=0.$$

其中⟨…⟩表示取集平均，对各态历经或准各态历经的平稳过程来说，也可以是(对宏观短而微观长的一段)时间平均. 在实际上往往无法确切地判断一个随机过程是否是平稳过程，更不用说准各态历经了. 因此物理上常常是先假定所讨论的过程是平稳过程，甚至是准各态历经的，然后用适用于这类特定过程的数学方法去描述，最后将分析的结果与实验结果作比较. 如果能有不同程度的符合，就表明所研究过程在不同程度上接近平稳过程乃至于准各态历经过程；否则的话，再改用其他方法. 在许多教科书和文献中都将上述平均视为对时间的平均，因此平均量 $f^{(0)}=\langle f\rangle$，$\boldsymbol{E}^{(0)}=\langle\boldsymbol{E}\rangle$，…也是时间上的慢变量；而扰动量 $\tilde{f}$，$\tilde{\boldsymbol{E}}$，$\tilde{\boldsymbol{B}}$，…则是时间快变量. 对弗拉索夫方程通过取平均可得出慢变的分布函数 $f^{(0)}$随时间慢变的方程

$$\frac{\partial f^{(0)}}{\partial t}+\boldsymbol{v}\cdot\frac{\partial f^{(0)}}{\partial \boldsymbol{r}}+\boldsymbol{F}^{(0)}\cdot\frac{\partial f^{(0)}}{\partial \boldsymbol{p}}+\langle\tilde{\boldsymbol{F}}\cdot\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \boldsymbol{p}}\rangle=0.$$

其中最后一项是两个扰动(随机)过程的互关联函数，也可以看成是由两个快变过程经过相干而变成的慢变项. 从原来的弗拉索夫方程减去上一个方程后，可得快变分布函数 $\tilde{f}$ 所满足的(时间快变)方程

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial t}+\boldsymbol{v}\cdot\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \boldsymbol{r}}+\tilde{\boldsymbol{F}}\cdot\frac{\partial f^{(0)}}{\partial \boldsymbol{p}}+\boldsymbol{F}^{(0)}\cdot\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \boldsymbol{p}}$$

$$+\tilde{\boldsymbol{F}}\cdot\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \boldsymbol{p}}-\langle\tilde{\boldsymbol{F}}\cdot\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \boldsymbol{p}}\rangle=0.$$

同样，对相应的麦克斯韦方程组也作类似的分解. 可以看出，上面时间快、慢变化的两组方程是相互耦合的，而快变量的方程又很难解出. 在弱湍理论中是通过微扰论的方法来把后一个方程通过逐

级近似来求解的. 即假定

$$\tilde{f} = \sum_{i=1}^{\infty} f^{(i)}, \quad \tilde{\boldsymbol{F}} = \boldsymbol{F}^{(1)}, \quad f^{(j+1)}/f^{(j)} \approx \varepsilon \ll 1,$$

$$j = 0,1,\cdots. \tag{13.48}$$

这表明与平均、慢变量 $f^{(0)}$,$\boldsymbol{F}^{(0)}$相比,扰动、快变量 $f^{(1)}$,$\tilde{\boldsymbol{F}}=\boldsymbol{F}^{(1)}$是一阶小量,而扰动分布函数 $f^{(2)}$,$f^{(3)}$是二阶、三阶的高阶小量. 在快变分布函数 $\tilde{f}$ 所满足的方程中代入上式,再按不同的(小量)阶数来写开,就可以得到各微扰阶的分布函数 $f^{(i)}(i=1,2,\cdots)$所满足的快变方程. 对于最低阶(1 阶),我们有线性方程组

$$\frac{\partial f^{(1)}}{\partial t}+\boldsymbol{v}\cdot\frac{\partial f^{(1)}}{\partial \boldsymbol{r}}+\boldsymbol{F}^{(1)}\cdot\frac{\partial f^{(0)}}{\partial \boldsymbol{p}}+\boldsymbol{F}^{(0)}\cdot\frac{\partial f^{(1)}}{\partial \boldsymbol{p}}=0, \tag{13.49}$$

[关于 $\boldsymbol{E}^{(1)}$和 $\boldsymbol{B}^{(1)}$的麦克斯韦方程组].　　(13.50)

它们和慢变的分布函数 $f^{(0)}$所满足的准线性方程

$$\frac{\partial f^{(0)}}{\partial t}+\boldsymbol{v}\cdot\frac{\partial f^{(0)}}{\partial \boldsymbol{r}}+\boldsymbol{F}^{(0)}\cdot\frac{\partial f^{(0)}}{\partial \boldsymbol{p}} = -\left\langle \boldsymbol{F}^{(1)}\cdot\frac{\partial f^{(1)}}{\partial \boldsymbol{p}}\right\rangle \tag{13.51}$$

构成了一个封闭的联立方程组. 一般先取零阶分布函数 $f^{(0)}$为待定参量,联立求解一阶微扰分布 $f^{(1)}$的线性方程和扰动电磁场的线性麦克斯韦方程组. 解法可以参考第二、三、四章中所介绍的各种方法(如沿未扰动轨道积分法、沿未扰动导心轨道积分法,等等). 然后将求出的 $f^{(1)}$(其中包含着作为待定参量的 $f^{(0)}$)代入准线性方程,总可以得出下列形式的速度空间扩散方程

$$\frac{\partial f^{(0)}}{\partial t}+\boldsymbol{v}\cdot\frac{\partial f^{(0)}}{\partial \boldsymbol{r}}+\boldsymbol{F}^{(0)}\cdot\frac{\partial f^{(0)}}{\partial \boldsymbol{p}}=\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{p}}\cdot\overset{\leftrightarrow}{D}_w\cdot\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{p}}f^{(0)}, \tag{13.52}$$

其中 $\overset{\leftrightarrow}{D}_w$ 是速度空间的扩散系数,它和外加电、磁场 $\boldsymbol{E}^{(0)}$,$\boldsymbol{B}^{(0)}$以及等离子体中线性本征模 $\boldsymbol{E}^{(1)}$,$\boldsymbol{B}^{(1)}$的关联函数有关(详见后面的介绍). 最后通过这个方程(通常称为准线性的弗拉索夫方程)来解出经过湍动修正的慢变(平衡)粒子分布函数 $f^{(0)}$.

在下一小节,我们将以无外场时等离子体的静电波湍动体系为例,来作仔细讨论;对有均匀外磁场的电磁波湍动体系只给出扩散系数 $\overset{\leftrightarrow}{D}_w$ 的最后表达式,而不作任何推导.

13.2.2　准线性方程(无外场静电湍动)

对无外场时的静电湍动,有 $\boldsymbol{E}_0=\boldsymbol{B}_0=0$ 及 $\tilde{\boldsymbol{B}}=0$,因而相应的准线性方程组可写成

$$\frac{\partial f_\alpha^{(0)}}{\partial t}+\boldsymbol{v}\cdot\frac{\partial f_\alpha^{(0)}}{\partial \boldsymbol{r}}=-\frac{q_\alpha}{m_\alpha}\left\langle\tilde{\boldsymbol{E}}\cdot\frac{\partial f_\alpha^{(1)}}{\partial \boldsymbol{v}}\right\rangle, \tag{13.53}$$

$$\frac{\partial f_\alpha^{(1)}}{\partial t}+\boldsymbol{v}\cdot\frac{\partial f_\alpha^{(1)}}{\partial \boldsymbol{r}}=-\frac{q_\alpha}{m_\alpha}\tilde{\boldsymbol{E}}\cdot\frac{\partial f_\alpha^{(0)}}{\partial \boldsymbol{v}}, \tag{13.54}$$

$$\nabla\cdot\tilde{\boldsymbol{E}} = 4\pi\sum_\alpha n_{\alpha0}q_\alpha\int f_\alpha^{(1)}(\boldsymbol{v})\mathrm{d}\boldsymbol{v}. \tag{13.55}$$

先对线性方程组(13.54)、(13.55)中的快变空间、时间作傅氏变换(其中的零阶分布函数是时间慢变量,在作傅氏变换时可当成不变的参量)

$$(f_\alpha^{(1)},\tilde{\boldsymbol{E}}) = \int(f_k,\boldsymbol{E}_k)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t+\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\mathrm{d}\omega\mathrm{d}\boldsymbol{k}.$$

按第九章线性弗拉索夫理论的推导,可得(下面为了简单,略去下标 α)

$$f_k=\frac{1}{\mathrm{i}(\omega-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v})}\frac{q}{m}\boldsymbol{E}_k\cdot\frac{\partial f^{(0)}}{\partial \boldsymbol{v}}.$$

将上式代入(13.53)式后,得

$$\frac{\mathrm{d}f^{(0)}}{\mathrm{d}t}\equiv\frac{\partial f^{(0)}}{\partial t}+\boldsymbol{v}\cdot\frac{\partial f^{(0)}}{\partial \boldsymbol{r}}$$

$$=-\frac{q}{m}\int\left\langle\boldsymbol{E}_{k'}\cdot\frac{\partial f_k}{\partial \boldsymbol{v}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}+\boldsymbol{k}'\boldsymbol{r})-\mathrm{i}(\omega t+\omega' t)}\right\rangle\mathrm{d}\boldsymbol{k}\mathrm{d}\boldsymbol{k}'\mathrm{d}\omega\mathrm{d}\omega'$$

$$=\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{v}}\cdot\left[-\frac{q^2}{m^2}\int\left\langle\frac{\boldsymbol{E}_{k'}\boldsymbol{E}_k}{\mathrm{i}(\omega-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v})}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k}')\cdot\boldsymbol{r}-\mathrm{i}(\omega+\omega')t}\right\rangle\right.$$

$$\times \mathrm{d}\boldsymbol{k}\mathrm{d}\boldsymbol{k}'\mathrm{d}\omega\mathrm{d}\omega'\Big] \cdot \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{v}} f^{(0)}$$

$$= \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{v}} \cdot \overset{\leftrightarrow}{D}_w \cdot \frac{\partial f^{(0)}}{\partial \boldsymbol{v}}.$$

上式中的 $\overset{\leftrightarrow}{D}_w$ 为速度空间的扩散张量，有

$$\overset{\leftrightarrow}{D}_w = \mathrm{i}\,\frac{q^2}{m^2}\int \frac{\boldsymbol{E}_{k'}\boldsymbol{E}_k}{\omega - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}} \langle \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k}')\cdot\boldsymbol{r} - \mathrm{i}(\omega t+\omega' t)} \rangle \mathrm{d}\boldsymbol{k}\mathrm{d}\boldsymbol{k}'\mathrm{d}\omega\mathrm{d}\omega'.$$

上式中的〈…〉代表对宏观小而微观大的空间尺度与时间尺度作平均. 具体来说，在本问题中微观的空间尺度可以取为静电湍动的特征波长 $(2\pi/k)$，而微观的时间尺度则可取湍动的特征周期 $(2\pi/\omega)$. 这种平均会将快变量消掉，只留下慢变量，即

$$\langle \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}+\boldsymbol{k}'\boldsymbol{r})} \rangle = \delta(\boldsymbol{k} + \boldsymbol{k}'),$$

$$\langle \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega t+\omega' t)} \rangle = \delta(\omega + \omega').$$

故有

$$\overset{\leftrightarrow}{D}_w = \mathrm{i}\,\frac{q^2}{m^2}\int \frac{\boldsymbol{E}_{-k}\boldsymbol{E}_k}{\omega - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}} \mathrm{d}\boldsymbol{k}\mathrm{d}\omega.$$

由于 $\boldsymbol{E}_{-k} = \boldsymbol{E}_k^*$，所以有

$$\boldsymbol{E}_{-k}\boldsymbol{E}_k = \boldsymbol{E}_k^*\boldsymbol{E}_k = 8\pi\overset{\leftrightarrow}{\mathscr{E}}_k = 8\pi\,\frac{\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}}{k^2}\mathscr{E}_k, \quad \mathscr{E}_k = \frac{1}{8\pi}|E_k|^2,$$

其中 $\mathscr{E}_k(t)$ 是静电场的能量，在准线性理论中，它是一个由于波-粒子共振相互作用而随时间慢变的量，服从波能变化方程

$$\frac{\mathrm{d}\mathscr{E}_k(t)}{\mathrm{d}t} = 2\gamma_k(t)\mathscr{E}_k(t), \implies \mathscr{E}_k(t) = \mathscr{E}_k(0)\mathrm{e}^{2\gamma_k(t)t}. \tag{13.56}$$

这个方程和弗拉索夫线性理论的波能方程相似，但其中的增长率（或阻尼率）$\gamma_k(t)$ 现在（即在湍动波场中）是时间的慢变函数而不是（如线性波中的）常数. 这是准线性理论与线性理论的一个主要区别. 从物理上来看，增长率与零阶分布函数的梯度 $\partial f^{(0)}/\partial \boldsymbol{v}$ 有关，在线性波理论中零阶分布函数是由平衡的弗拉索夫方程给定的不随时间变化的量，因此相应的波能增长率也是不随时间变的；而在准线性理论中零阶分布函数是时间的慢变量，是由（时间慢变的）准线性方程确定其变化的，所以相应的波能增长率也随时间慢变. 利用静电波能的演化方程，可以把扩散张量写成

$$\overset{\leftrightarrow}{D}_w(\boldsymbol{v}) = \mathrm{i}\,\frac{8\pi q^2}{m^2}\int \frac{\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}}{k^2}\,\frac{\mathscr{E}_k}{\omega - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}}\mathrm{d}\boldsymbol{k}\mathrm{d}\omega \tag{13.57}$$

$$\approx \mathrm{i}\,\frac{8\pi q^2}{m^2}\int \frac{\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}}{k^2}\,\frac{\mathscr{E}_{kM}}{\omega_M - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}}\mathrm{d}\boldsymbol{k}, \tag{13.58}$$

$$\text{当 } t \to \infty, \quad \omega_M = \omega_{max} = \omega_{Mr} + \mathrm{i}\gamma_M. \tag{13.59}$$

导出最后一个等式时考虑到，在一个微观长的时间后，在静电湍动的所有模式中只有增长率最大的一支 ω_{max} 显露了出来，被我们所探测到. 因此，在上一式中对所有频率的积分就只挑出了这一支模式. 最后可以得出无外场时静电湍动的准线性方程组

$$\frac{\partial f^{(0)}}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\frac{\partial f^{(0)}}{\partial \boldsymbol{r}} = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{v}}\cdot\overset{\leftrightarrow}{D}_w\cdot\frac{\partial f^{(0)}}{\partial \boldsymbol{v}}, \tag{13.60}$$

$$\overset{\leftrightarrow}{D}_w(\boldsymbol{v}) = \frac{\mathrm{i}8\pi q^2}{m^2}\int \frac{\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}}{k^2}\,\frac{\mathscr{E}_{kM}}{\omega_M - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}}\mathrm{d}\boldsymbol{k}, \tag{13.61}$$

$$\frac{\mathrm{d}\mathscr{E}_{kM}(t)}{\mathrm{d}t} = 2\gamma_{kM}(t)\mathscr{E}_{kM}(t), \tag{13.62}$$

其中 $\gamma_{kM}(t)$ 是各耗散型本征模增长率

$$\gamma(\boldsymbol{k}) = -\frac{D_i(\omega,\boldsymbol{k})}{\partial D_r(\omega,\boldsymbol{k})/\partial\omega} \propto -\left.\frac{\partial f^{(0)}}{\partial \boldsymbol{v}}\right|_{v=\omega/k}$$

中最大的那个（在下面的表达式中，将这支模标记成 $\omega_0 + \mathrm{i}\gamma_0$）. 如果将这支模的传播方向取成某一坐标轴的方向，则静电湍动的准线性方程可化为一维的偏微分方程组. 例如令

$$\boldsymbol{k} = k\boldsymbol{e}_x, \quad \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v} = ku.$$

则准线性方程组可简写成

$$\frac{\partial f^{(0)}}{\partial t} + u\,\frac{\partial f^{(0)}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial u}\Big[\mathrm{Re}(D_w)\,\frac{\partial}{\partial u} f^{(0)}\Big], \tag{13.63}$$

其中 $\mathrm{Re}(D_w)$ 指的是速度空间扩散系数的实部. 因为方程中其他项都是实的，而 D_w 一般是复函数

$$D_w = \frac{\mathrm{i}8\pi q^2}{m^2}\int \frac{\mathscr{E}_k(t)}{\omega_0 - ku + \mathrm{i}\gamma_0}\mathrm{d}k,$$

当 $\gamma_0 \ll \omega_0$ 时,有

$$\frac{1}{\omega_0 - ku + \mathrm{i}\gamma_0} = \frac{\mathscr{P}}{\omega_0 - ku} - \mathrm{i}\pi\delta(\omega_0 - ku).$$

故其实部为

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}(D_w) &= \frac{8\pi^2 q^2}{m^2}\int \mathscr{E}_k(t)\delta(\omega_0 - ku)\mathrm{d}k \\ &= \frac{8\pi^2 q^2}{m^2}\int \frac{\mathscr{E}_k(t)}{u}\delta\left(k - \frac{\omega_0}{u}\right)\mathrm{d}k \\ &= \frac{2\pi\omega_p^2 \mathscr{E}_k}{mn_0\ u}\bigg|_{k=\omega_0/u}, \\ \mathscr{E}_k(t) &= \frac{|E_{k,\omega_0}(0)|^2}{8\pi}\mathrm{e}^{2\gamma_0(t)t}.\end{aligned}$$

这个表达式在下面将多次用到.

13.2.3 准线性方程(均匀外磁场中的电磁湍动)

这时,取直角坐标系,令 $\boldsymbol{B} = B_0\boldsymbol{e}_\parallel = B_0\boldsymbol{e}_z$ (B_0 = 常数),$\boldsymbol{E}_1 \neq 0$,$\boldsymbol{B}_1 \neq 0$. 下面不作推导地给出其准线性方程组,详细的过程请参考文献[10].

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_{\alpha 0}(p_\parallel, \boldsymbol{p}_\perp, t)}{\partial t} &= \lim_{V\to\infty}\pi q_\alpha^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty}\int \frac{\mathrm{d}^3 k}{V}\hat{L}p_\perp\,\delta(\omega_{kr} - k_\parallel v_\parallel - n\omega_c) \\ &\quad |\psi_{n,k}|^2 p_\perp\,\hat{L}f_{\alpha 0}, \\ \hat{L} &= \left(1 - \frac{k_\parallel v_\parallel}{\omega_{kr}}\right)\frac{1}{p_\perp}\frac{\partial}{\partial p_\perp} + \frac{k_\parallel v_\perp}{\omega_{kr}}\frac{1}{p_\perp}\frac{\partial}{\partial p_\parallel}, \\ \psi_{n,k} &= \frac{1}{2}(\boldsymbol{E}_{kx} + \mathrm{i}\boldsymbol{E}_{ky})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\mathrm{J}_{n-1}(z) \\ &\quad + \frac{1}{2}(\boldsymbol{E}_{kx} - \mathrm{i}\boldsymbol{E}_{ky})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{J}_{n+1}(z) + \frac{p_\parallel}{p_\perp}E_{kz}\mathrm{J}_n(z), \\ z &= \frac{k_\perp v_\perp}{\omega_c}, \quad \boldsymbol{k} = k_\perp\cos\theta\boldsymbol{e}_x + k_\perp\sin\theta\boldsymbol{e}_y + k_\parallel\boldsymbol{e}_z,\end{aligned}$$

其中 θ 是 $\boldsymbol{k}_\perp$ 与 $\boldsymbol{e}_x$ 的夹角.

上面给出的公式,是在直角坐标系中的表达式. 但在应用中往往需要在一般的正交坐标系(如柱坐标系,球坐标系,等等)中讨论问题,在任意正交坐标系中的准线性方程组的表达式在参考书[11]中有详细介绍.

例如,在正交坐标系

$$\{\boldsymbol{e}_\alpha, \boldsymbol{e}_\beta, \boldsymbol{e}_\gamma\}, \quad |\mathrm{d}^3\rho|^2 = (h_\alpha \mathrm{d}\alpha)^2 + (h_\beta \mathrm{d}\beta)^2 + (h_\gamma \mathrm{d}\gamma)^2$$

中,无外场静电湍动的准线性方程组为

$$\frac{\mathrm{d}f^{(0)}}{\mathrm{d}t} = \sum_{\lambda,\mu}\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left\{\frac{\sqrt{g}}{h_\lambda h_\mu}D_{\lambda,\mu}\frac{\partial f^{(0)}}{\partial\mu}\right\},$$

$$\sqrt{g} = h_\alpha h_\beta h_\gamma, \quad \lambda,\mu = \{\alpha,\beta,\gamma\}.$$

13.2.4 准线性方程的一般性质

1. 守恒性

利用上面得出的静电湍动准线性方程组(一维)

$$\frac{\mathrm{d}f_{\alpha 0}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial}{\partial u}\left[D_w\frac{\partial}{\partial u}f^{(0)}\right], \tag{13.64}$$

$$D_w = \mathrm{i}\frac{2\omega_{p\alpha}^2}{m_\alpha n_{\alpha 0}}\int\frac{\mathscr{E}_k(t)}{\omega - ku}\mathrm{d}k, \tag{13.65}$$

$$\frac{\mathrm{d}\mathscr{E}_k(t)}{\mathrm{d}t} = 2\gamma_k(t)\mathscr{E}_k(t), \tag{13.66}$$

及色散方程

$$D(\omega,k) = 1 + \sum_\alpha\frac{\omega_{p\alpha}^2}{k}\int\frac{1}{\omega - ku}\frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial u}\mathrm{d}u = 0,$$

可以一般性地(不必对 f_0 和 $\mathscr{E}_k$ 作特殊的假定)证明,处在静电湍动状态的等离子体满足下列的守恒律:

(1) 粒子数守恒

$$\frac{\mathrm{d}n_{\alpha 0}(t)}{\mathrm{d}t} = 0, \quad n_{\alpha 0}(t) = n_{\alpha 0}\int f_{\alpha 0}(\boldsymbol{v}, t)\mathrm{d}\boldsymbol{v}. \tag{13.67}$$

上式中没有指出空间坐标,这是因为这些守恒律都只涉及分布函

数的速度空间矩. 当等离子体是空间均匀的，它们的速度分布函数就和坐标无关. 而当等离子体是空间不均匀的时候，分布函数是坐标依赖的，同时速度空间各阶矩的守恒也是坐标依赖的，即这些守恒律都是空间局域的守恒律. 不过因为坐标在下面的推导过程中只是一个不变参量，故为了表达简单，把它省略了. 下面是利用准线性方程对粒子数守恒的证明过程.

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}n_{\alpha0}(t) &\equiv \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int n_{\alpha0}f_{\alpha0}(t)\mathrm{d}\boldsymbol{v}\\ &= n_{\alpha0}\int \mathrm{d}\boldsymbol{v}\,\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{v}}\cdot\overleftrightarrow{D}_w\cdot\frac{\partial f^{(0)}}{\partial \boldsymbol{v}}\\ &= n_{\alpha0}\sum_{i,j}D_{ij}\frac{\partial f_{\alpha0}}{\partial v_j}\Big|_{v_i=-\infty}^{v_i=\infty}\\ &= 0.\end{aligned}$$

在上面的证明过程中用到了时、空平均了的粒子数密度 $n_{\alpha0}$ = 常数，以及速度为无穷大时的分布函数为零这一物理要求.

(2) 动量守恒

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\sum_\alpha n_{\alpha0}(t)\boldsymbol{P}_{\alpha0}(t)\Big) = 0. \qquad (13.68)$$

证明如下：

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\sum_\alpha n_{\alpha0}(t)\boldsymbol{P}_{\alpha0}(t)\Big) &\equiv \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_\alpha\int m_\alpha n_{\alpha0}\,\boldsymbol{v}f_{\alpha0}(t)\mathrm{d}\boldsymbol{v}\\ &= \sum_\alpha m_\alpha n_{\alpha0}\int u\frac{\partial}{\partial u}D_w\frac{\partial f_{\alpha0}}{\partial u}\mathrm{d}u\\ &= -\sum_\alpha m_\alpha n_{\alpha0}\int D_w\frac{\partial f_{\alpha0}}{\partial u}\mathrm{d}u\\ &= -\mathrm{i}2\int \mathrm{d}k\mathscr{E}_k(t)\Big(\sum_\alpha \omega_{\mathrm{p}\alpha}^2\int \mathrm{d}u\,\frac{1}{\omega-ku}\frac{\partial f_{\alpha0}}{\partial u}\Big).\end{aligned}$$

其中用到了准线性方程(13.64)及 D_w 的一维表达式(13.65). 在把括号中的项用静电波的色散方程变成 $-k$ 后，上式成为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\sum_\alpha n_{\alpha0}(t)\boldsymbol{P}_{\alpha0}(t)\Big) = \mathrm{i}2\int k\mathscr{E}_k\mathrm{d}k = 0.$$

而最后一步则利用了被积函数 $k\mathscr{E}_k$ 是奇函数，它在 k 的对称域上积分为零. 于是动量守恒得证.

(3) 能量守恒

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\sum_\alpha \frac{1}{2}n_{\alpha0}(t)m_\alpha\boldsymbol{V}^2(t) + \mathscr{E}(t)\Big) = 0. \qquad (13.69)$$

证明如下：先从第一部分(粒子系动能)开始，

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\sum_\alpha \frac{1}{2}n_{\alpha0}(t)m_\alpha\boldsymbol{V}^2(t)\Big) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\sum_\alpha \frac{1}{2}n_{\alpha0}m_\alpha\int v^2 f_{\alpha0}\mathrm{d}\,\boldsymbol{v}\Big)\\ &= \sum_\alpha \frac{1}{2}m_\alpha n_{\alpha0}\int u^2\frac{\partial}{\partial u}\Big(D_w\frac{\partial f_{\alpha0}}{\partial u}\Big)\mathrm{d}u\\ &= \sum_\alpha \frac{1}{2}m_\alpha n_{\alpha0}\Big(-2\int uD_w\frac{\partial f_{\alpha0}}{\partial u}\mathrm{d}u\Big)\\ &= -\mathrm{i}2\sum_\alpha \omega_{\mathrm{p}\alpha}^2\int \mathrm{d}k\mathscr{E}_k\int\frac{u}{\omega-ku}\frac{\partial f_{\alpha0}}{\partial u}\mathrm{d}u.\end{aligned}$$

再利用等式

$$\frac{u}{\omega-ku} = \frac{1}{k}\Big(\frac{ku-\omega}{\omega-ku}+\frac{\omega}{\omega-ku}\Big) = \frac{\omega}{k}\frac{1}{\omega-ku}-\frac{1}{k}.$$

上式的最后一项在代入积分 $\int\mathrm{d}u\cdots$ 后，积分为零；故速度空间的积分只剩下一项，

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\sum_\alpha \frac{1}{2}n_{\alpha0}(t)m_\alpha\boldsymbol{V}^2(t)\Big) &= -\mathrm{i}2\int\mathrm{d}k\mathscr{E}_k\frac{\omega}{k}\Big(\sum_\alpha \omega_{\mathrm{p}\alpha}^2\int\frac{1}{\omega-ku}\frac{\partial f_{\alpha0}}{\partial u}\mathrm{d}u\Big)\\ (\text{再用一次色散方程}) &= -\mathrm{i}2\int\mathrm{d}k\mathscr{E}_k\frac{\omega}{k}(-k)\\ &= \mathrm{i}2\int\mathrm{d}k(\omega_r+\mathrm{i}\gamma_k)\mathscr{E}_k\\ (\text{只取实部}) &= -\int 2\gamma_k\mathscr{E}_k\mathrm{d}k\\ &= -\frac{\partial}{\partial t}\int\mathscr{E}_k\mathrm{d}k\\ &= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathscr{E}(t).\end{aligned}$$

在导出上式时还用到了波能变化率方程. 将上式方程的右面项移到左面,就证明了总体系(粒子系与波系)的能量守恒(13.69)式. 这时在粒子系和波系间虽然可以交换能量,但总能量并不改变.

2. 波的朗道阻尼和逆阻尼(不稳定性)

为简单,只考虑均匀等离子体中无磁场高频静电波情况,这时只需计入电子的响应. 仍使用一维公式

$$\frac{\partial f_{e0}}{\partial t}=\frac{8\pi^2e^2}{m_e^2}\frac{d}{du}\left(\frac{1}{u}\mathscr{E}_k|_{k=\omega/u}\frac{df_{e0}}{du}\right),$$

$$\frac{d\mathscr{E}_k}{dt}=2\gamma\mathscr{E}_k.$$

假定 $\mathscr{E}_k$=常数,则准线性方程可进一步写成

$$\frac{\partial f_{e0}}{\partial t}\propto\mathscr{E}_k\left(\frac{1}{u}\frac{d^2f_{e0}}{du^2}+\frac{d}{du}\left(\frac{1}{u}\right)\frac{df_{e0}}{du}\right).$$

对朗道阻尼($\gamma, d\mathscr{E}_k/dt<0$)情况下的电子分布函数(见图 13.6(a)),假定共振波的相速处在分布函数的拐点之下,则有

$$\left.\frac{df_{e0}}{du}\right|_{u=\omega/k}<0,\quad \left.\frac{d^2f_{e0}}{du^2}\right|_{u=\omega/k}>0,\ \Rightarrow\ \frac{d}{du}\left(\frac{1}{u}\right)\frac{df_{e0}}{du}>0.$$

因此一定有

$$\frac{df_{e0}}{dt}>0.$$

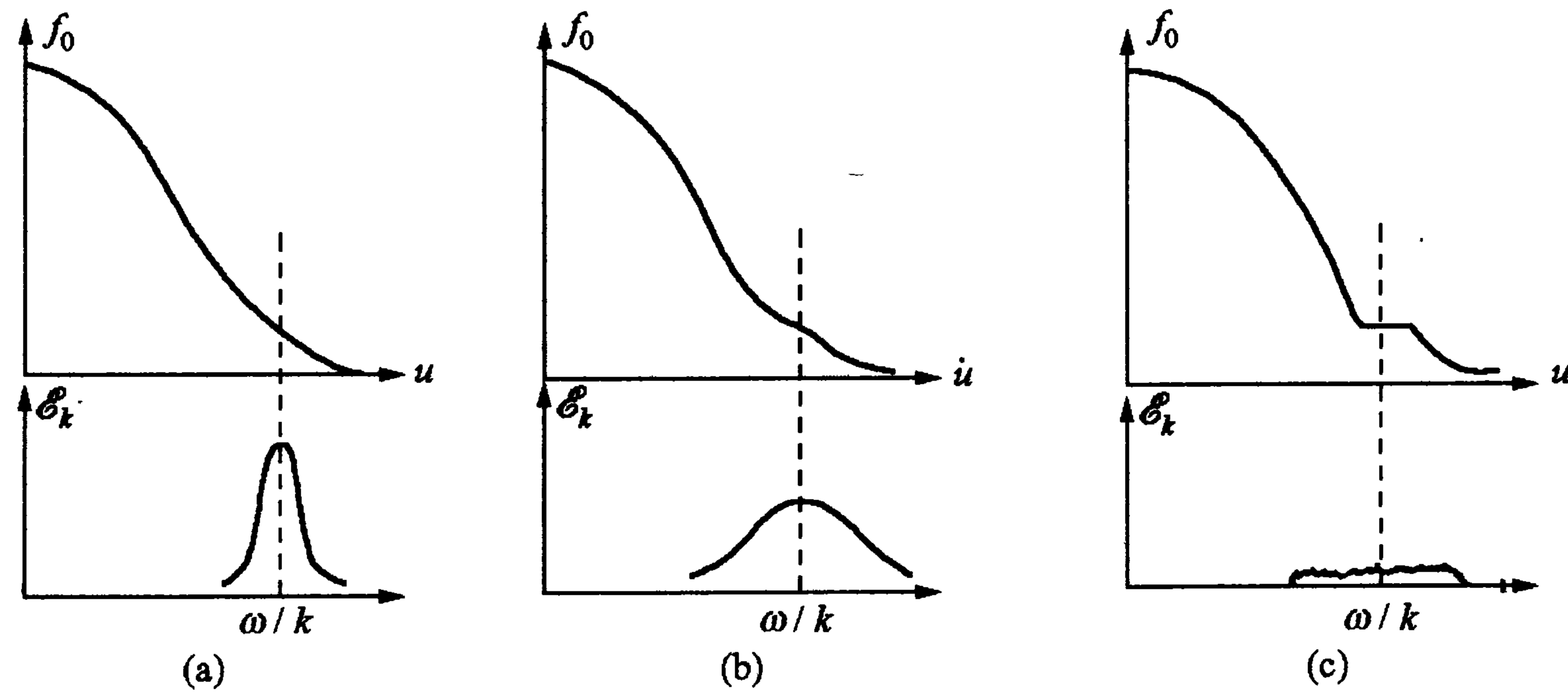


图 13.6 朗道阻尼的准线性演化

这表明在共振点处的电子分布函数将增大,而且只要这一点的 $\partial f_{e0}/\partial u<0$,这种增长就不会停止(见图 13.6(b)). 于是分布函数 f_{e0} 的准线性演化最终就是使共振点处的分布"变平"(如图 13.6(c)).

对于不稳定($\gamma, d\mathscr{E}_k/dt>0$)情况(见图 13.7(a)),在拐点之后,有

$$\left.\frac{df_{e0}}{du}\right|_{u=\omega/k}>0,\quad \left.\frac{d^2f_{e0}}{du^2}\right|_{u=\omega/k}<0,\ \Rightarrow\ \frac{d}{du}\left(\frac{1}{u}\right)\frac{df_{e0}}{du}<0.$$

这表明在共振点处的电子分布函数将减少,而且只要这一点的 $\partial f_{e0}/\partial u>0$,这种降低就不会停止(见图 13.7(b)). 于是分布函数 f_{e0} 的准线性演化最终也是使共振点处的分布"变平"(如图 13.7(c)).

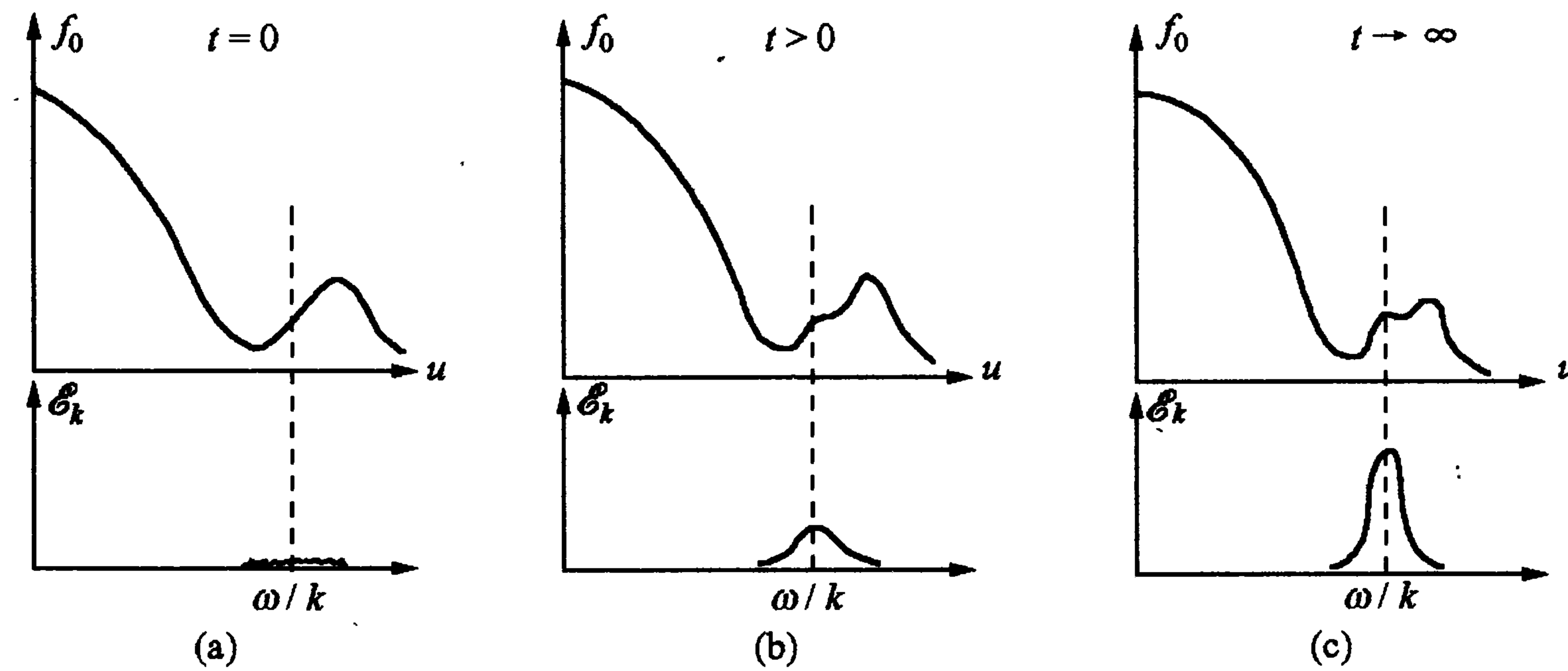


图 13.7 不稳定性的准线性演化

因此无论如何,准线性方程都是使波-粒子共振处的分布函数变平;同时也使 $\gamma(t\to\infty)\to0$. 这就是准线性方程的物理图像.

13.2.5 弱湍理论的高阶微扰展开

如果用准粒子的概念,把等离子体中的波当成量子化的波子(即所谓的 plasmon),则准线性相互作用可以表示成费恩曼型的图(图 13.8). 图中的实线代表粒子,弯线代表等离子体波子,而顶点代表波-粒子相互作用. 相互作用要满足能量守恒条件:

$$\omega_k-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}=0.$$

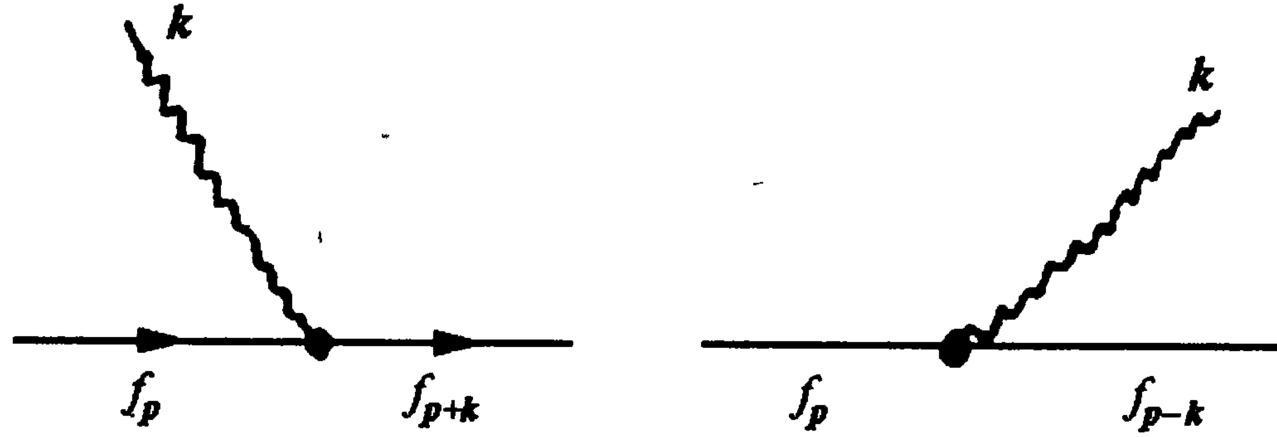


图 13.8 准线性相互作用的费恩曼图

可以看出，准线性过程相当于粒子吸收一个波子(阻尼)或发出一个波子(不稳定性)的相互作用过程，而粒子的能量及动量也相应增加或减少一个波子的能量及动量. 只是波子的能量在弱湍理论中远比粒子的动能小，因此粒子在准线性过程中能量的变化不明显，而其动量的改变却十分明显——这使得准线性过程看上去更像粒子在速度空间的散射过程，可以用速度空间的扩散方程来描述. 对于等离子体波子体系来说，其能量的改变不能忽略，须用能量变化率方程来描述. 这就是准线性方程组

$$\frac{\mathrm{d}f^{(0)}(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{p}} \cdot \overset{\Rightarrow}{D}_w \cdot \frac{\partial f^{(0)}(t)}{\partial \boldsymbol{p}}, \quad \frac{\mathrm{d}\mathscr{E}_k}{\mathrm{d}t} = 2\gamma_k(t)\mathscr{E}_k(t).$$

如果将弱湍展开进行到二阶时，即

$$\frac{\mathrm{d}f^{(2)}}{\mathrm{d}t} + \boldsymbol{v} \cdot \frac{\mathrm{d}f^{(2)}}{\mathrm{d}\boldsymbol{r}} + \widetilde{\boldsymbol{F}} \cdot \frac{\mathrm{d}f^{(1)}}{\mathrm{d}\boldsymbol{p}} + \boldsymbol{F}^{(0)} \cdot \frac{\mathrm{d}f^{(2)}}{\mathrm{d}\boldsymbol{p}} = \langle \widetilde{\boldsymbol{F}} \cdot \frac{\partial f^{(1)}}{\partial \boldsymbol{p}} \rangle.$$

这时会发生两类弱湍的非线性过程：

(i) 波-粒子的非线性朗道阻尼(图 13.9).

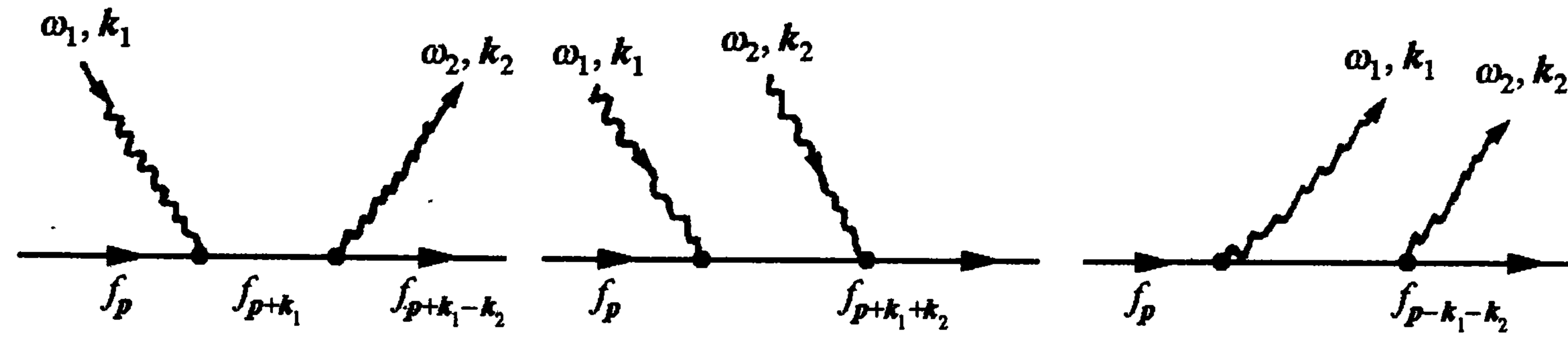


图 13.9 二阶波-粒子相互作用的费恩曼图

这时图中含有两个顶点，即发生两次波-粒子相互作用，整个过程也要满足能量守恒条件：

$$\omega_1 - \omega_2 = (\boldsymbol{k}_1 - \boldsymbol{k}_2) \cdot \boldsymbol{v}.$$

这样的过程有三种，分别对应于粒子吸收一个波子并发出一个波子、吸收两个波子，以及发出两个波子. 其结果对于粒子系来说仍相当于速度空间的扩散，而对等离子体波系来说相当于自发辐射引起的波能变化

$$\frac{\mathrm{d}f^{(0)\prime}(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{p}} \cdot \overset{\Rightarrow}{D}_w \cdot \frac{\mathrm{d}f^{(0)\prime}(t)}{\mathrm{d}\boldsymbol{p}},$$

$$\overset{\Rightarrow}{D}{}'_w \propto \int \frac{\boldsymbol{k}_1\boldsymbol{k}_2}{(\omega_1 - \boldsymbol{k}_1 \cdot \boldsymbol{v}_1)(\omega_2 - \boldsymbol{k}_2 \cdot \boldsymbol{v}_2)},$$

$$\frac{\mathrm{d}\mathscr{E}'_k}{\mathrm{d}t} = \mathscr{E}'_k \int v_{kk_1} \mathscr{E}_{k_1} \mathrm{d}\boldsymbol{k}_1.$$

(ii) 三波相互作用(图 13.10).

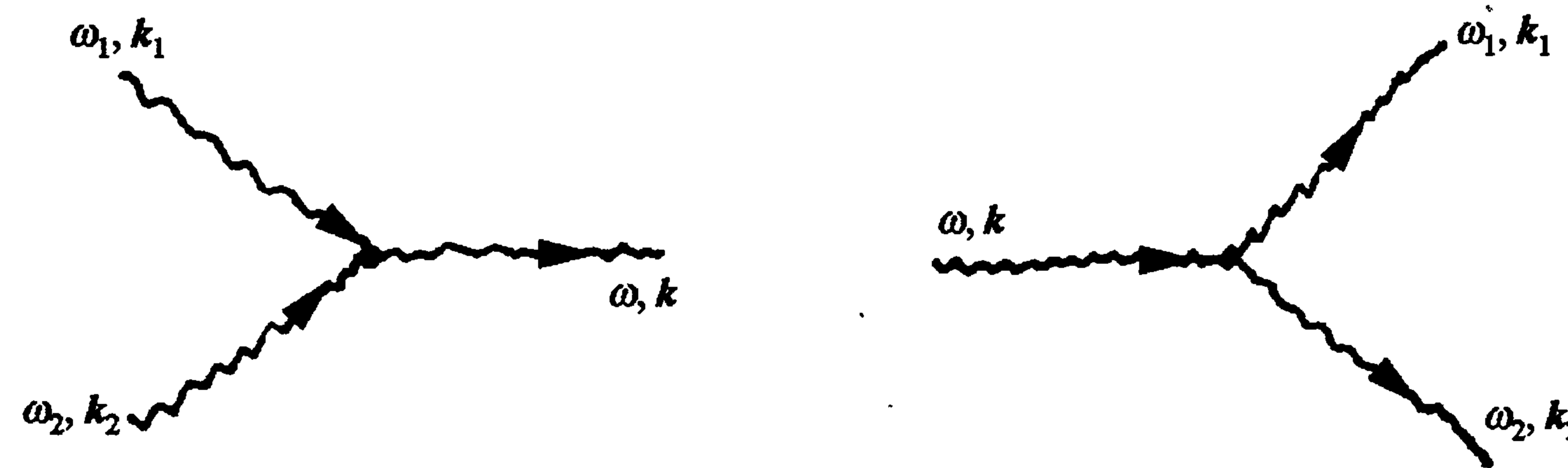


图 13.10 三波相互作用的费恩曼图

这相当于两波耦合成一支新波或一支波分成两支波的过程，满足能量、动量守恒定律

$$\omega_1 + \omega_2 = \omega, \quad \boldsymbol{k}_1 + \boldsymbol{k}_2 = \boldsymbol{k}.$$

从物理上来看，这相当于波能除了因自发辐射损失能量外，还由于受激辐射而损失能量的过程(或者相反地，使能量增大的不稳定过程)

$$\frac{\mathrm{d}\mathscr{E}''_k}{\mathrm{d}t} = \mathscr{E}''_k \int v_{kk_1} \mathscr{E}_{k_1} \mathrm{d}\boldsymbol{k}_1 + \int w_{k_1k_2} \mathscr{E}_{k_1} \mathscr{E}_{k_2} \mathrm{d}\boldsymbol{k}_1 \mathrm{d}\boldsymbol{k}_2.$$

当三支波中有一支波是比较强的外加电磁波时，这样的波相互作用过程又称为参量过程. 它们可以用动理学方法描述，也可以用双流体方程描述. 请参考本书第七章中的介绍.

弱湍的更高阶微扰展开，也可以用类似的(高阶)费恩曼图、速

度分布函数的准线性方程及波能变化方程来描述.有兴趣的读者可以参看两本专著,见文献[12],[13].

参考文献

[1] Kinmetal Y C. Phys. Fluids, **21**(1978)1452; **23**(1980)258

[2] Ritzitetal Ch P. Phys. Fluids, **B1**(1989)153

[3] Van Milligenetal B P. Phys. Plasmas, **2**(8)(1995)3017

[4] Meneveauetal C. J. Fluid Mech., **232**(1991)469

[5] Hudginetal L. Phys. Rev. Lett., **71**(1993)3279

[6] 〔美〕崔永泰.小波分析导论.西安:西安交通大学出版社,1995

[7] 张贤达.现代信号处理.北京:清华大学出版社,1995

[8] 郑治真,张少芬.瞬态谱估计理论及其应用.北京:地震出版社,1993

[9] Parker T S, Chua L O. Practical Numerical Algorithms for Chaotic Systems. Springer-Verlag and World Publishing Corp., 1989

[10] Stix T H. Waves in Plasmas. American Institute of Physics, 1992. 494—498

[11] Melrose D B. Plasma Astrophysics: Nonthermal Processes in Diffuse Magnetized Plasmas, Vol. 1: The Emission, Absorption and Transfer of Waves in Plasma. Gordon & Breach Science Publishers, 1980

[12] Tsytovich V N. Theory of Turbulent Plasma. Consultants Bureau, New York, 1977

[13] Davidson R C. Methods in Nonlinear Plasma Theory. Academic Press, New York, 1972

第四部分

碰撞和输运

第十四章　碰撞和输运引论

碰撞是指粒子间一种激烈的相互作用过程，在相互作用前后粒子的空间位置基本不改变，但速度和动能却产生了巨大的变化. 对带电粒子来说，碰撞是指粒子间距小于德拜长度时，在屏蔽库仑势场中的“近程”相互作用过程. 而带电粒子间距大于德拜半径时的“远程”相互作用过程则用等离子体集体运动（自洽场或等离子体波）来描述. 弹性碰撞是指在碰撞过程中粒子的种类及内能不改变，只有动量、动能发生改变的碰撞过程；而非弹性碰撞则是相撞粒子种类、内能及动能都发生变化的碰撞（如原子和离子中的电子被激发、被电离，离子和电子复合成低电荷离子或原子并同时发射出光辐射，等等）. 本课程只讨论弹性碰撞的动理学描述. 由于弹性碰撞过程和粒子（在相互作用的前后）的速度密切相关，所以仅在坐标空间来描述它是不够的，还必须在速度空间进行描述. 在历史上，正是描述中性粒子间碰撞的需要，才产生了动理学，进而发展成在坐标和速度联合组成的“相空间”描述多粒子体系的“统计物理学”. 在等离子体物理学发展的历史上，也是先有描述带电粒子碰撞的动理学描述（朗道碰撞方程，1936），后有描述带电粒子无碰撞集体运动（自洽场或等离子体波）的弗拉索夫理论（1937）. 等离子体的碰撞理论是从中性粒子的碰撞理论发展而来的，借鉴了许多中性气体碰撞理论的成功处理方法. 但今天的等离子体碰撞理论已经有了完整的、有自己特色的理论体系. 本课程的这一部分就是比较系统而又简单地介绍这一理论体系；在其中较后部分还将介绍当等离子体中碰撞和波同时起作用时的动理学处理方法.

14.1 自扩散和集体输运

弹性碰撞理论分成两大部分：自扩散和集体输运.

自扩散又称试探粒子近似或弛豫过程；它描写一群特指的粒子(即试探粒子)与等离子体背景粒子间碰撞后，试探粒子所受到的影响.在这种描述中，既不考虑试探粒子间的碰撞，也不考虑背景粒子在(和试探粒子)碰撞中受到的反作用.这时碰撞的结果就是：试探粒子本身的动量、能量在变化，而其他粒子的变化均被忽略.这通常出现在数密度比较小的电子束或离子束射入密度比较大的等离子体中时的物理问题中.

如果我们讨论的是两群或多群数密度相近的带电粒子间由碰撞而产生的物理问题，则不但粒子群间的作用和反作用均不能忽略，就是同种粒子之间的碰撞也不可忽略.描述这类过程的弹性碰撞理论比较复杂，称为集体输运.

无论是自扩散过程还是集体输运过程，都可以用带碰撞项的动理学方程来描述

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t}+\boldsymbol{v}\cdot\nabla f_\alpha+\frac{\boldsymbol{F}_\alpha}{m_\alpha}\cdot\nabla_v f_\alpha=\left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial t}\right)_c,\quad f_\alpha\equiv f_\alpha(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v},t). \tag{14.1}$$

方程的右面就是(总)碰撞项，它可以写成各种粒子($\alpha,\beta=\mathrm{e},\mathrm{i},\cdots$)间的碰撞项之和

$$\left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial t}\right)_c=\sum_\beta C_{\alpha\beta}(f_\alpha,f_\beta). \tag{14.2}$$

由于粒子间的弹性碰撞只在相撞粒子间交换动量和动能，所以保持整个相撞粒子系的粒子数、动量和动能不变(守恒).对同类粒子(例如同是电子或离子)系来说有

$$\int C_{\alpha\alpha}\mathrm{d}\boldsymbol{v}=0, \tag{14.3}$$

$$\int m_\alpha \boldsymbol{v} C_{\alpha\alpha}\mathrm{d}\boldsymbol{v}=0, \tag{14.4}$$

$$\int \frac{1}{2}m_\alpha v^2 C_{\alpha\alpha}\mathrm{d}\boldsymbol{v}=0. \tag{14.5}$$

而对于不同种粒子所组成的相撞粒子系来说，在弹性碰撞过程中应有

$$\int m_\alpha \boldsymbol{v} C_{\alpha\beta}\mathrm{d}\boldsymbol{v}+\int m_\beta \boldsymbol{v} C_{\beta\alpha}\mathrm{d}\boldsymbol{v}=0\quad(\boldsymbol{R}_{\alpha\beta}+\boldsymbol{R}_{\beta\alpha}=0), \tag{14.6}$$

$$\int \frac{1}{2}m_\alpha v^2 C_{\alpha\beta}\mathrm{d}\boldsymbol{v}+\int \frac{1}{2}m_\beta v^2 C_{\beta\alpha}\mathrm{d}\boldsymbol{v}=0. \tag{14.7}$$

其中 $\boldsymbol{R}_{\alpha\beta}$ 是第 α 种粒子在和第 β 种粒子碰撞时由于动量改变所受到的摩擦力或拖曳力，这样(14.6)式就表示碰撞过程中作用力和反作用力平衡.

在流体描述中，自扩散和集体输运有较大差别，下面来分别讨论.

14.2 自 扩 散

这时的粒子速度分布函数可以用 δ 函数描述

$$f_\alpha(\boldsymbol{v},t=0)=\delta(\boldsymbol{v}_\alpha-\boldsymbol{u}).$$

由带碰撞项的动理学方程，通过求各阶速度矩的方法可以得到相应的流体方程.其中零阶矩是试探粒子数守恒，没有特别的意思.一阶矩描述的是试探粒子平行(于入射方向的)动量的慢化过程

$$\frac{\mathrm{d}p_\parallel}{\mathrm{d}t}=-\frac{p_\parallel}{\tau_s}=-\nu_s p_\parallel. \tag{14.8}$$

其中 τ_s 是所谓的动量慢化时间，而 ν_s 是相应的慢化频率.这时，入射试探粒子由于和背景粒子的碰撞，受到一拖曳(摩擦)力，因而减速.二阶矩分成平行方向的能量衰减方程

$$\frac{\mathrm{d}\varepsilon_\parallel}{\mathrm{d}t}=-\frac{\varepsilon_\parallel}{\tau_\parallel}=-\nu_\parallel\varepsilon_\parallel, \tag{14.9}$$

和垂直(于入射)方向的能量增大方程

$$\frac{\mathrm{d}\varepsilon_{\perp}}{\mathrm{d}t}=\frac{\varepsilon_{\perp}}{\tau_{\perp}}=\nu_{\perp}\varepsilon_{\perp}. \tag{14.10}$$

试探粒子原先在垂直方向上既无动量也无能量,经历了碰撞后,这些粒子被随机地散射到空间的各个方向.它们在垂直方向上的总(或平均)动量虽然仍为零,但总(或平均)动能却不为零,而且不断增大(同时平行能量在不断减少).在上面三个方程中的各种碰撞频率可以通过解动理学方程而得到(见 15.5 节).

14.3 输运方程组

集体碰撞的最明显物理后果是:带电粒子流体元的数密度、动量和能量分别从密度、速度及温度高的区域"输运"到这些参量值比较低的区域中去.这在流体描述中是分别通过各输运(矩)方程来表示的(详细的推导请参考本书 16.1.2 小节或文献[1]).

14.3.1 零阶矩,连续性(粒子输运)方程

$$\frac{\partial n_\alpha(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}+\nabla\cdot[n_\alpha(\boldsymbol{r},t)\boldsymbol{u}_\alpha(\boldsymbol{r},t)]=\left(\frac{\delta n_\alpha}{\delta t}\right),\quad \alpha=\mathrm{e},\mathrm{i},\cdots, \tag{14.11}$$

其中

$$n_\alpha(\boldsymbol{r},t)=n_{\alpha0}\int f_\alpha(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v},t)\mathrm{d}\boldsymbol{v},$$

$$n_\alpha(\boldsymbol{r},t)\boldsymbol{u}_\alpha(\boldsymbol{r},t)=n_{\alpha0}\int \boldsymbol{v}f_\alpha(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v},t)\mathrm{d}\boldsymbol{v}.$$

方程右边的$(\delta n_\alpha/\delta t)$是由于非弹性碰撞过程而导致的粒子产生(或复合、消失)速率.还可以定义粒子(输运)流为

$$\boldsymbol{\Gamma}_\alpha=n_\alpha(\boldsymbol{r},t)\boldsymbol{u}_\alpha(\boldsymbol{r},t).$$

14.3.2 一阶矩,动量(运动)方程

$$m_\alpha n_\alpha\frac{\partial \boldsymbol{u}_\alpha(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}+m_\alpha n_\alpha\boldsymbol{u}_\alpha\cdot\nabla\boldsymbol{u}_\alpha=n_\alpha e_\alpha(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{u}_\alpha\times\boldsymbol{B})-\nabla P_\alpha-\nabla\cdot\overleftrightarrow{\Pi}_\alpha+\boldsymbol{R}_\alpha. \tag{14.12}$$

方程的右边依次是:电磁力,热压力,黏性力,碰撞摩擦力.有的文献上把热压力和黏性力合写作

$$-\nabla P_\alpha-\nabla\cdot\overleftrightarrow{\Pi}_\alpha=-\nabla\cdot\overleftrightarrow{P}_\alpha,\quad \overleftrightarrow{P}_\alpha=P_\alpha\overleftrightarrow{I}+\overleftrightarrow{\Pi}_\alpha.$$

而$\overleftrightarrow{\Pi}_\alpha$,$\overleftrightarrow{P}_\alpha$则分别称为黏性张量和压强张量.第 α 种粒子的碰撞摩擦力等于它与其他种类粒子的碰撞摩擦力之和(同种粒子间的碰撞由于动量守恒而为零)

$$\boldsymbol{R}_\alpha=\sum_{\alpha\neq\beta}\boldsymbol{R}_{\alpha\beta},$$

而

$$\boldsymbol{R}_{\alpha\beta}=-m_\alpha n_\alpha(\boldsymbol{u}_\alpha-\boldsymbol{u}_\beta)\nu_{\alpha\beta},\quad \boldsymbol{R}_{\alpha\beta}=-\boldsymbol{R}_{\beta\alpha}.$$

对一种特殊的情况,即静态、无外力、无对流的带电粒子系,其动量方程可写成

$$-\nabla P_\alpha+\boldsymbol{R}_\alpha=0,\quad\Rightarrow\quad -T_\alpha\nabla n_\alpha\approx m_\alpha n_\alpha\boldsymbol{u}_\alpha\nu_\alpha.$$

由上式求出 $\boldsymbol{u}_\alpha$ 后,代入粒子流定义式,得

$$\boldsymbol{\Gamma}_\alpha=n_\alpha\boldsymbol{u}_\alpha=-\frac{T_\alpha}{m_\alpha\nu_\alpha}\nabla n_\alpha\equiv-D_\alpha\nabla n_\alpha.$$

这样,连续性方程和上述静态的动量平衡方程就约化成粒子数密度的扩散型方程

$$\frac{\partial n_\alpha}{\partial t}=\nabla(D_\alpha\nabla n_\alpha).$$

许多实验室的等离子体都可以近似当成无快速宏观流动的流体,这时唯一存在的粒子流是由碰撞而引起的缓慢"扩散流".对这类等离子体来说,输运方程就只包括上面的粒子扩散方程和下面的能量平衡方程.

14.3.3 二阶矩，能量平衡方程

定义每个 α 粒子的平均总能量（动能与热能之和）

$$K_\alpha = \frac{1}{2}m_\alpha u_\alpha^2 + \frac{3}{2}T_\alpha,$$

和总能流（动能流，热能流，压力、黏性力作功，及碰撞造成的热流之和）

$$\boldsymbol{Q}_\alpha = \frac{1}{2}m_\alpha u_\alpha^2\boldsymbol{u}_\alpha + \frac{3}{2}T_\alpha\boldsymbol{u}_\alpha + \overset{\Rightarrow}{P}_\alpha\cdot\boldsymbol{u}_\alpha + \boldsymbol{q}_\alpha,$$

于是能量守恒方程可写作

$$\frac{\partial n_\alpha(\boldsymbol{r},t)K_\alpha(\boldsymbol{r},t)}{\partial t} = -\nabla\cdot\boldsymbol{Q}_\alpha + n_\alpha q_\alpha\boldsymbol{u}_\alpha\cdot\boldsymbol{E} + \boldsymbol{R}_\alpha\cdot\boldsymbol{u}_\alpha + Q_\alpha. \tag{14.13}$$

或者

$$\frac{3}{2}n_\alpha\frac{\mathrm{d}T_\alpha}{\mathrm{d}t} \equiv \frac{3}{2}n_\alpha\frac{\partial T_\alpha}{\partial t} + \frac{3}{2}n_\alpha(\boldsymbol{u}_\alpha\cdot\nabla)T_\alpha$$

$$= -(\overset{\Rightarrow}{P}_\alpha\cdot\nabla)\cdot\boldsymbol{u}_\alpha - \nabla\cdot\boldsymbol{q}_\alpha + Q_\alpha,$$

其中 Q_α 是不同种粒子间由于碰撞而交换的能量，

$$Q_\alpha = \sum_{\beta\neq\alpha}Q_{\alpha\beta}. \tag{14.14}$$

由弹性碰撞保持相撞粒子总体系的能量守恒(14.7)式，可证

$$Q_{\alpha\beta} = -Q_{\beta\alpha} - (\boldsymbol{u}_\alpha - \boldsymbol{u}_\beta)\cdot\boldsymbol{R}_{\alpha\beta}. \tag{14.15}$$

当 $\alpha=\mathrm{e}$，$\beta=\mathrm{i}$ 时，可以从动理学方程求得

$$Q_{\mathrm{ie}} = \frac{3}{2}\frac{n_\mathrm{i}(T_\mathrm{e} - T_\mathrm{i})}{\tau_{\mathrm{ie}}^T},$$

$$Q_{\mathrm{ei}} = -Q_{\mathrm{ie}} - (\boldsymbol{u}_\mathrm{e} - \boldsymbol{u}_\mathrm{i})\cdot\boldsymbol{R}_{\mathrm{ei}}$$

$$\left(\text{由 } \boldsymbol{R}_{\mathrm{ei}} = \frac{m_\mathrm{e}}{e}\frac{\boldsymbol{j}}{\tau_{\mathrm{ei}}},\ (\boldsymbol{u}_\mathrm{e} - \boldsymbol{u}_\mathrm{i}) = -\frac{\boldsymbol{j}}{n_\mathrm{e}e}\right) = -Q_{\mathrm{ie}} + \frac{j^2}{\sigma}$$

$$\left(\text{由 } \sigma = \eta^{-1} = \frac{n_\mathrm{e}e^2}{m_\mathrm{e}\nu_{\mathrm{ei}}}\right) \equiv -Q_{\mathrm{ie}} + \eta j^2.$$

其中 τ_{ie}^T 是离子和电子间（由于弹性碰撞）的温度平衡特征时间，可以从动理学理论求出（例如参考《等离子体物理原理》[1]，166—168页）. 在 Q_{ei} 表达式中的第二项是外电场对电子的欧姆加热，而第一项则是被加热的电子通过弹性碰撞传给离子的能（热）量.

14.3.4 使输运方程封闭的输运定律

在前面给出的由速度的头三个矩组成的输运方程组中，有两个高阶矩 $\boldsymbol{q}_\alpha$，$\overset{\Rightarrow}{\Pi}_\alpha$ 还是未知的. 为了使方程组封闭，通常的办法是利用线性非平衡热力学的输运定律来把这两个高阶矩通过低阶矩的空间梯度表示出来. 第一个输运定律是傅里叶热传导定律：

$$\boldsymbol{q}_\alpha = -\kappa_\alpha\nabla T_\alpha, \tag{14.16}$$

其中 κ_α 称为热传导系数. 第二个是牛顿黏性定律：

$$\overset{\Rightarrow}{\Pi}_\alpha = -\zeta_\alpha\left(\overset{\Rightarrow}{\Lambda} - \frac{2}{3}\overset{\Rightarrow}{I}\nabla\cdot\boldsymbol{u}\right) - \gamma_\alpha\overset{\Rightarrow}{I}(\nabla\cdot\boldsymbol{u}), \tag{14.17}$$

$$\Lambda_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \quad (i,j = 1,2,3), \tag{14.18}$$

其中 ζ_α，γ_α 分别是剪切黏性系数和体黏性系数. 在本书的第五章中曾对这些黏性系数作过系统介绍，因此这里就不再重复了. 这些输运系数可以从实验测出，也可以由动理学理论求得. 本课程将给出用动理学理论导出这些系数的具体过程.

参考文献

[1] 马腾才，胡希伟，陈银华. 等离子体物理原理. 合肥：中国科学技术大学出版社，1988

[2] Landau, Lifshitz. Fluid Mechanics, 2nd Edition. Pergamon Press, 1987. 44—47

第十五章 碰撞算子

动理学方程

$$\frac{\mathrm{d}f(\boldsymbol{r}(t),\boldsymbol{v}(t),t)}{\mathrm{d}t}\equiv\frac{\partial f}{\partial t}+\boldsymbol{v}\cdot\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{r}}+\frac{\boldsymbol{F}}{m}\cdot\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{v}}=\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\mathrm{c}}.$$

右边的项代表碰撞引起的速度分布函数的变化率，通常称为碰撞积分或碰撞(微分或积分)算子. 碰撞项可以通过多种途径导出. 例如可以从各种碰撞模型(Krook，玻尔兹曼，福克尔-普朗克)得出，也可以从刘维方程经 BBGKY 途径或克利蒙托维奇(Klimontovich)途径导出. 为了和推导碰撞项的模型方法相区别，后者也称为碰撞算子的数学理论. 本章介绍的是各种碰撞模型，尤其以福克尔-普朗克碰撞项为重点.

15.1 Krook 碰撞项

这碰撞项又称 BGK (P. L. Bhatnagar，E. P. Gross and M. Krook，Physical Review，94(1954)511)碰撞项，可以根据量纲分析直截了当地把动理学方程右边的碰撞项简写成

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\mathrm{c}}=-\frac{f}{\tau_{\mathrm{c}}}.$$

其中 τ_{c} 是一个有时间量纲的特征常数，通常取成平均的碰撞时间. 这量也可以看成初始处在热力学线性非平衡态的速度分布函数 f 趋向热力学平衡态 f_0 的弛豫时间. 因为线性(偏离平衡态不远)非平衡的分布函数可以写成

$$f=f_0+f_1,$$

其中 f_1 就是对平衡的偏离量. 由于有

$$\frac{\mathrm{d}f_0(\boldsymbol{r}(t),\boldsymbol{v}(t),t)}{\mathrm{d}t}\equiv\frac{\partial f_0}{\partial t}+\boldsymbol{v}\cdot\frac{\partial f_0}{\partial \boldsymbol{r}}+\frac{\boldsymbol{F}}{m}\cdot\frac{\partial f_0}{\partial \boldsymbol{v}}=\left(\frac{\partial f_0}{\partial t}\right)_{\mathrm{c}}=0, \tag{15.1}$$

于是碰撞项可写成

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\mathrm{c}}=\left(\frac{\partial f_1}{\partial t}\right)_{\mathrm{c}}=-\frac{f_1}{\tau_{\mathrm{c}}}\equiv-\nu_{\mathrm{c}}f_1.$$

此方程的解为

$$f_1(t)=f_1(0)\mathrm{e}^{-\nu_{\mathrm{c}}t}.$$

由这个方程可以明显看出 τ_{c} 具有弛豫时间的物理意义，相应的 ν_{c} 称为碰撞频率. 一般来说，碰撞时间(频率)不仅是速度的函数，而且是 f_α 的函数. 但这里则取 $\tau_{\mathrm{c}}(\nu_{\mathrm{c}})$ 为常数，这明显是一种近似——所以也把 Krook(BGK)碰撞项称为(对碰撞项的)弛豫时间近似. 这样，只要知道了平衡方程(15.1)的解 $f_{\alpha0}$，线性动理学方程

$$\frac{\partial f_1}{\partial t}+\boldsymbol{v}\cdot\frac{\partial f_1}{\partial \boldsymbol{r}}+\frac{\boldsymbol{F}}{m}\cdot\frac{\partial f_1}{\partial \boldsymbol{v}}=-\nu_{\mathrm{c}}f_1 \tag{15.2}$$

就可以容易地求解. 局部热力学平衡的速度分布函数为

$$f_{\alpha0}(n_\alpha(\boldsymbol{r}),\boldsymbol{u}_\alpha(\boldsymbol{r}),T_\alpha(\boldsymbol{r}))=n_\alpha(\boldsymbol{r})\left(\frac{m_\alpha}{2\pi T_\alpha(\boldsymbol{r})}\right)^{3/2}\exp\left[-\frac{m_\alpha(\boldsymbol{v}_\alpha-\boldsymbol{u}_\alpha(\boldsymbol{r}))^2}{2T_\alpha(\boldsymbol{r})}\right]. \tag{15.3}$$

15.2 玻尔兹曼碰撞积分

这是历史最久、最负盛名的一个动理学碰撞模型

$$\left(\frac{\partial f_1}{\partial t}\right)_{\mathrm{c}}=\int[f_i(1')f_j(2')-f_i(1)f_j(2)]\,|\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_2|\,\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\mathrm{d}\Omega\mathrm{d}\boldsymbol{v}, \tag{15.4}$$

其中 1,2 分别是两个相碰粒子在撞前的速度，而 $1',2'$ 则分别是两个相碰粒子在撞后的速度. 在导出玻尔兹曼方程时，曾作了三个基

本假定：(i) 所有的碰撞都是两体碰撞. (ii) 相撞粒子在碰撞前后均作自由运动. (iii) 分子混沌假说：两类粒子间的碰撞次数只和两粒子分布函数 $f_{ij}=f_if_j+P_{ij}$中的 f_if_j 有关,而和两粒子关联函数 P_{ij}无关.

1936 年朗道从玻尔兹曼方程出发,再加上了一个进一步的假定(两粒子间的相互作用是库仑相互作用)和一个近似(小角散射近似),导出了适用于带电粒子间碰撞的朗道碰撞积分,相应的动理学方程就称为朗道方程(详见 15.4.2 小节). 这是第一个(描述碰撞的)等离子体的动理学方程,比无碰撞的弗拉索夫动理学方程还要早一年.

15.3　福克尔-普朗克碰撞算子

这是 20 世纪初,在研究布朗粒子运动时导出的碰撞项. 布朗粒子由于质量大,在经受流体分子碰撞时,每个时刻的速度改变都很小 $\Delta \boldsymbol{v} \ll \boldsymbol{v}$,因而可以用它作为小量来对布朗粒子的速度分布函数作泰勒展开. 这样得到的碰撞项呈微分算子的形式,通常称为福克尔-普朗克碰撞项. 它的推导过程如下：

从碰撞项的定义

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_c = \frac{f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v},t) - f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v},t-\Delta t)}{\Delta t}$$

出发,假定每次碰撞(不一定是两体碰撞)使被碰的粒子速度产生一个变化 $\boldsymbol{v} \to \boldsymbol{v}+\Delta\boldsymbol{v}$,则有

$$f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v},t) = \int \mathrm{d}(\Delta\boldsymbol{v}) f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v}-\Delta\boldsymbol{v},t-\Delta t) \cdot \psi(\boldsymbol{v}-\Delta\boldsymbol{v},\Delta\boldsymbol{v},t-\Delta t).$$

其中 $\psi(\boldsymbol{v}-\Delta\boldsymbol{v},\Delta\boldsymbol{v},t-\Delta t)$是转移概率,一般来说 ψ 是时间的函数,但在下面我们进一步假定

(i) ψ 和时间无关,即 $\psi=\psi(\boldsymbol{v}-\Delta\boldsymbol{v},\Delta\boldsymbol{v})$. 并且有归一条件

$$\int \psi(\boldsymbol{v}-\Delta\boldsymbol{v},\Delta\boldsymbol{v})\mathrm{d}(\Delta\boldsymbol{v}) = 1. \tag{15.5}$$

这称为马尔可夫近似. 物理上意味着碰撞使状态(这里是粒子分布函数)发生变化的概率和历史无关. 因此这个近似和玻尔兹曼的分子混沌假说有同等作用.

(ii) 每次碰撞引起的粒子速度改变 $\Delta\boldsymbol{v}$ 足够小,可以用它作为小量来展开 f 和 ψ. 在物理上来看,由于带电粒子间的相互作用是库仑长程作用,所以(和传统的中性粒子间的刚性碰撞相比)在相隔很远时就开始发生"碰撞",但碰撞"强度"较弱,因此两粒子间的一次碰撞可以当成一系列速度空间中小角度碰撞之和. 这就是等离子体碰撞理论中对小角散射特别青睐的原因.

通常小的散射角也对应于小的速度变化 $\Delta\boldsymbol{v}$ (见图 15.2),但在瞄准距离非常小的情况下,这两者并不等同. 这时正确的作法是严格按小角而不是按小的 $\Delta\boldsymbol{v}$ 来展开. 最后按小角展开得出的库仑对数将会比按小 $\Delta\boldsymbol{v}$ 展开得到的结果大一倍左右. 但按小 $\Delta\boldsymbol{v}$ 展开的作法比较简单,而且对速度分布函数的具体形式没有要求(目前按小角展开来作的推导,只能对麦克斯韦型的分布函数才能进行到底). 因此本书介绍的仍是按 $\Delta\boldsymbol{v}$ 来展开的推导过程.

这样,当取到泰勒展开的第二阶时,有

$$\begin{aligned}
f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v},t) &= \int \mathrm{d}(\Delta\boldsymbol{v})\left[f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v},t-\Delta t) + (-\Delta\boldsymbol{v})\cdot\left.\frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{v}}\right|_{\Delta\boldsymbol{v}=0} + \frac{1}{2}(\Delta\boldsymbol{v}\Delta\boldsymbol{v}):\left.\frac{\partial^2 f}{\partial\boldsymbol{v}\partial\boldsymbol{v}}\right|_{\Delta\boldsymbol{v}=0} + \cdots\right] \\
&\quad \times\left[\psi(\boldsymbol{v},\Delta\boldsymbol{v}) + (-\Delta\boldsymbol{v})\cdot\left.\frac{\partial\psi}{\partial\boldsymbol{v}}\right|_{\Delta\boldsymbol{v}=0} + \frac{1}{2}(\Delta\boldsymbol{v}\Delta\boldsymbol{v}):\left.\frac{\partial^2\psi}{\partial\boldsymbol{v}\partial\boldsymbol{v}}\right|_{\Delta\boldsymbol{v}=0} + \cdots\right] \\
&= \int \mathrm{d}(\Delta\boldsymbol{v})\left[f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v},t-\Delta t)\psi(\boldsymbol{v},\Delta\boldsymbol{v}) - \left.\frac{\partial(f\psi)}{\partial\boldsymbol{v}}\right|_{\Delta\boldsymbol{v}=0}\cdot(\Delta\boldsymbol{v})\right.
\end{aligned}$$

$$+\frac{1}{2}\frac{\partial^2(f\psi)}{\partial \boldsymbol{v}\partial \boldsymbol{v}}\bigg|_{\Delta\boldsymbol{v}=0} : (\Delta\boldsymbol{v}\Delta\boldsymbol{v})\bigg].$$

考虑到转移概率 ψ 的归一条件(15.5)式,又注意到 $f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v},t-\Delta t)$, $\partial f/\partial \boldsymbol{v}|_{\Delta\boldsymbol{v}=0}$, $\partial^2 f/\partial \boldsymbol{v}^2|_{\Delta\boldsymbol{v}=0}$和积分无关,可以移出积分号,结果有

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v},t) - f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v},t-\Delta t) &= -\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{v}}\cdot\left[f(t-\Delta t)\int \mathrm{d}(\Delta\boldsymbol{v})\psi\Delta\boldsymbol{v}\right] \\ &\quad + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial\boldsymbol{v}\partial\boldsymbol{v}} : \left[f(t-\Delta t)\int \mathrm{d}(\Delta\boldsymbol{v})\psi\Delta\boldsymbol{v}\Delta\boldsymbol{v}\right]. \end{aligned}$$

定义

$$\langle\Delta\boldsymbol{v}\rangle = \frac{1}{\Delta t}\int\psi\Delta\boldsymbol{v}\mathrm{d}(\Delta\boldsymbol{v}),$$

$$\langle\Delta\boldsymbol{v}\Delta\boldsymbol{v}\rangle = \frac{1}{\Delta t}\int\psi\Delta\boldsymbol{v}\Delta\boldsymbol{v}\mathrm{d}(\Delta\boldsymbol{v}),$$

最后可得福克尔-普朗克方程(碰撞项)

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)\bigg|_c = -\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{v}}\cdot(f\langle\Delta\boldsymbol{v}\rangle) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial\boldsymbol{v}\partial\boldsymbol{v}} : (f\langle\Delta\boldsymbol{v}\Delta\boldsymbol{v}\rangle). \tag{15.6}$$

通常称$\langle\Delta\boldsymbol{v}\rangle$为动理学(速度空间)的摩擦系数,表示碰撞使粒子系的平均速度(因摩擦力而导致的)减慢;而$\langle\Delta\boldsymbol{v}\Delta\boldsymbol{v}\rangle$被称为(速度空间)扩散系数,表示速度分布函数因碰撞而在速度空间弥漫.这点可以通过取分布函数为 δ 函数(单能粒子束)来说明(见图15.1).

在直角坐标系$(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)$中,令

$$f(t=0) = \delta(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{U}),\quad \boldsymbol{u}(t=0) = \boldsymbol{U} = U\boldsymbol{e}_3,$$

则下一个时刻的分布函数 $f(t)$可以从福克尔-普朗克方程解出:

$$\frac{\partial f(t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{v}}\cdot(\delta(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{U})\langle\Delta\boldsymbol{v}\rangle) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial\boldsymbol{v}\partial\boldsymbol{v}} : (\delta(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{U})\langle\Delta\boldsymbol{v}\Delta\boldsymbol{v}\rangle).$$

图 15.1 试探粒子因碰撞而在速度空间减速和扩散

它的一阶矩方程为

$$\begin{aligned}\int\boldsymbol{v}\frac{\partial f(t)}{\partial t}\mathrm{d}\boldsymbol{v} &= -\int\boldsymbol{v}\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{v}}\cdot(\delta(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{U})\langle\Delta\boldsymbol{v}\rangle)\mathrm{d}\boldsymbol{v} \\ &\quad + \frac{1}{2}\int\boldsymbol{v}\frac{\partial^2}{\partial\boldsymbol{v}\partial\boldsymbol{v}} : (\delta(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{U})\langle\Delta\boldsymbol{v}\Delta\boldsymbol{v}\rangle)\mathrm{d}\boldsymbol{v}.\end{aligned}$$

分部积分后得

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\int\boldsymbol{v}f(t)\mathrm{d}\boldsymbol{v} &= \int\delta(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{U})\langle\Delta\boldsymbol{v}\rangle\mathrm{d}\boldsymbol{v} \\ &\quad - \frac{1}{2}[\delta(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{U})\langle\Delta\boldsymbol{v}\Delta\boldsymbol{v}\rangle]\Big|_{\boldsymbol{v}=-\infty}^{\boldsymbol{v}=\infty},\end{aligned}$$

$$\frac{\partial\boldsymbol{u}(t)}{\partial t} = \langle\Delta\boldsymbol{v}\rangle\Big|_{\boldsymbol{v}=\boldsymbol{U}} \equiv -\frac{\boldsymbol{U}}{\tau_s}.$$

其中 τ_s 是慢化(特征)时间.一阶矩方程也就是(速度空间)“力”方程,有解

$$\boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{u}(0)\mathrm{e}^{-t/\tau_c} \equiv \boldsymbol{U}\mathrm{e}^{-t/\tau_c}.$$

由此可知$\langle\Delta\boldsymbol{v}\rangle|_{\boldsymbol{v}=\boldsymbol{U}}$具有(速度空间的)摩擦力的物理意义.

令 $w_k = v_k - u_k (k=1,2)$，则有关于横向(垂直于初始束速度方向 $\boldsymbol{e}_3$)热速度 w_k 的二阶矩方程

$$\int w_k^2 \frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}\boldsymbol{v} = -\int w_k^2 \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{v}} \cdot (\delta(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{U})\langle \Delta \boldsymbol{v} \rangle)\mathrm{d}\boldsymbol{v} + \frac{1}{2}\int w_k^2 \frac{\partial^2}{\partial \boldsymbol{v}\partial \boldsymbol{v}} : (\delta(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{U})\langle \Delta\boldsymbol{v}\Delta\boldsymbol{v} \rangle)\mathrm{d}\boldsymbol{v},$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}W_k^2}{\mathrm{d}t} &= 2\int w_k \langle \Delta v_k\rangle \delta(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{U})\mathrm{d}\boldsymbol{v} + \int \delta(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{U})\langle \Delta v_k \Delta v_k\rangle \mathrm{d}\boldsymbol{v} \\ &= 2(w_k\langle \Delta v_k\rangle)|_{v_k=U_k} + \langle \Delta v_k \Delta v_k\rangle|_{v_k=U_k} \\ &= \langle \Delta U_k \Delta U_k\rangle.\end{aligned}$$

在最后一步，用到了 $w_k|_{v_k=U_k}=0$. 这个方程表示的是束粒子的动能在与背景等离子体粒子碰撞后，扩散到垂直入射方向去的速率. 为了能对扩散系数的物理意义看得更清楚，可以将上式写成

$$\frac{\mathrm{d}W_k^2}{\mathrm{d}t} = \frac{U^2}{\tau_D}, \quad \tau_D \equiv \frac{U^2}{\langle \Delta U_k \Delta U_k\rangle},$$

其中 $\tau_D \propto \langle \Delta U_k \Delta U_k\rangle^{-1}$ 就是前面提到的试探粒子近似下的(垂直方向)能量扩散特征时间. 可见福克尔-普朗克算子中的扩散系数 $\langle \Delta U_k \Delta U_k\rangle$ 和能量扩散特征频率成正比.

应该注意到，虽然在一开始，由福克尔-普朗克方程描述的束粒子的输运过程和用试探粒子近似描写的弛豫过程非常相似，但是接下来的演化就开始不一样了：在试探粒子近似下，束粒子一直保持 δ 型的速度分布函数不变，它们在入射方向上的慢化速率和垂直入射方向上的能量扩散速率也保持不变；而在福克尔-普朗克方程描述中，束粒子下一时刻的速度分布函数会因慢化和扩散而不再是 δ 型的函数了，相应的矩(输运)方程也会和试探粒子近似下的弛豫方程不同. 从物理上来看，在束粒子时间演化的以后时刻，它们的等价慢化速率和扩散速率都将比一开始时刻的相应值降低，也就是说比试探粒子近似下的相应特征速率低. 显然，福克尔-普朗克方程的描述更准确.

15.4 用 Rosenbluth 势表达的福克尔-普朗克碰撞项

15.4.1 Rosenbluth 势的推导

和玻尔兹曼碰撞积分相比，福克尔-普朗克碰撞项是微分算子，相应的动理学方程是微分方程，这使它比玻尔兹曼方程(微分—积分方程)更容易解. 但要用福克尔-普朗克碰撞项描述带电粒子间的碰撞，首先要知道转移概率的具体表达式. 目前在等离子体动理学中，只能在自由两体碰撞的假设下写出它的明显表达式.

在两体碰撞的假定下，可以按导出玻尔兹曼碰撞项的同样程序来写出 $\psi(\boldsymbol{v}, \Delta\boldsymbol{v})$. 当一个 $f_1(\boldsymbol{v}_1)$ 中的粒子与一个 $f_2(\boldsymbol{v}_2)$ 中的粒子相撞时，第一个粒子被散射到立体角元 $\mathrm{d}\Omega$ 中的几率可表示为

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\mathrm{d}\Omega, \quad \mathrm{d}\Omega = \sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi,$$

其中 $\mathrm{d}\sigma$ 是弹性碰撞的微分散射截面. 而如果一个 $f_1(\boldsymbol{v}_1)$ 中的粒子和一群速度在 $\boldsymbol{v}_2 \to \boldsymbol{v}_2 + \mathrm{d}\boldsymbol{v}_2$ 间的 $f_2(\boldsymbol{v}_2)$ 粒子相碰，则单位时间内第一个粒子散射后落入立体角元 $\mathrm{d}\Omega$ 中的转移几率为

$$\frac{1}{\Delta t}\psi(\boldsymbol{v}_1, \Delta\boldsymbol{v}_1)\mathrm{d}(\Delta\boldsymbol{v}_1) = u\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\mathrm{d}\Omega\, f_2(\boldsymbol{v}_2)\mathrm{d}\boldsymbol{v}_2,$$

其中 $\Delta\boldsymbol{v}_1$ 是和散射角 $\mathrm{d}\Omega$ 对应的速度突变量(见图 15.2)，而 $u = |\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2|$ 是相撞时的相对速度.

这样福克尔-普朗克碰撞项中的两个系数就可以明显写出

$$\langle \Delta\boldsymbol{v}_1\rangle = \int \mathrm{d}\boldsymbol{v}_2 f(\boldsymbol{v}_2) u \int \mathrm{d}\Omega (\Delta\boldsymbol{v}_1)\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega},$$

$$\langle \Delta\boldsymbol{v}_1 \Delta\boldsymbol{v}_1\rangle = \int \mathrm{d}\boldsymbol{v}_2 f(\boldsymbol{v}_2) u \int \mathrm{d}\Omega (\Delta\boldsymbol{v}_1 \Delta\boldsymbol{v}_1)\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}.$$

其中涉及两类积分，对于立体角的积分可以首先进行. 在弹性碰撞

中，有以下的运动学关系

$$\Delta \boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_1' - \boldsymbol{v}_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\Delta \boldsymbol{u}. \tag{15.7}$$

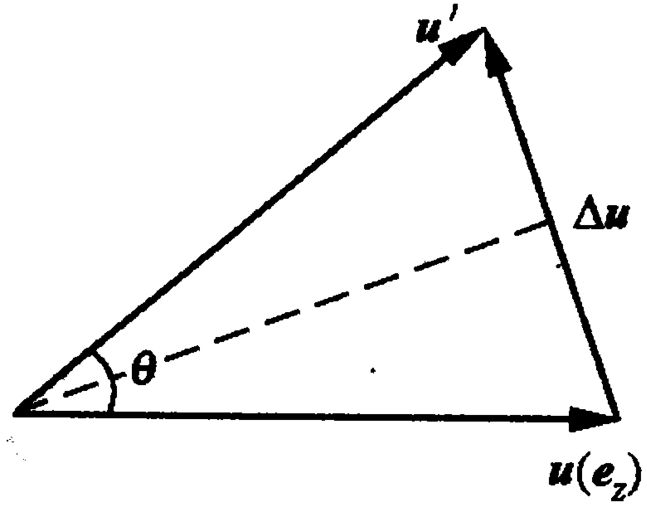


图15.2 散射角与速度变化量关系示意图

而按图 15.2，在以相对速度方向 $\boldsymbol{e}_z$ 为对称轴的球坐标系中，有

$$\Delta u_z = -2u\sin^2\frac{\theta}{2},$$

$$\Delta u_x = 2u\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cos\phi,$$

$$\Delta u_y = 2u\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\sin\phi.$$

再利用屏蔽库仑势场中弹性碰撞的微分截面表达式(参考《等离子体物理原理》[2]，138 页)

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{q_\alpha q_\beta}{2\mu u^2}\right)^2 \frac{1}{(\sin^2(\theta/2) + \varepsilon^2)^2},$$

$$\varepsilon = \frac{\xi_\perp}{\lambda_D}, \quad \xi_\perp = \left(\frac{q_\alpha q_\beta}{\mu u^2}\right)^2, \tag{15.8}$$

其中 $\xi_\perp$ 是 90°的瞄准距离. 将它们代入前面关于立体角的积分后，可以得出(《等离子体物理原理》[2]，147—149 页)

$$\langle \Delta \boldsymbol{v}_1 \rangle = -\Gamma_1\left(\frac{q_2}{q_1}\right)^2 \frac{m_1 + m_2}{m_2}\int d\boldsymbol{v}_2 f(\boldsymbol{v}_2)\frac{\boldsymbol{e}_z}{u^2},$$

$$\langle \Delta \boldsymbol{v}_1 \Delta \boldsymbol{v}_1 \rangle = \Gamma_1\left(\frac{q_2}{q_1}\right)^2 \int d\boldsymbol{v}_2 f(\boldsymbol{v}_2)\frac{\boldsymbol{e}_x\boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_y\boldsymbol{e}_y}{u},$$

其中

$$\Gamma_1 = \frac{4\pi q_1^2 q_2^2}{m_1^2}\ln\Lambda.$$

而 $\ln\Lambda$ 是所谓的库仑对数. 上面的表达式还依赖于实验室直角坐标系的选择，仍有一定的局限性. 下面，利用

$$\boldsymbol{e}_z = \frac{\boldsymbol{u}}{u}, \quad \boldsymbol{e}_x\boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_y\boldsymbol{e}_y = \frac{u^2\overleftrightarrow{I} - \boldsymbol{u}\boldsymbol{u}}{u^2}, \quad \overleftrightarrow{I} \equiv \boldsymbol{e}_x\boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_y\boldsymbol{e}_y + \boldsymbol{e}_z\boldsymbol{e}_z,$$

可以把福克尔-普朗克碰撞算子中的两个系数写成与具体坐标系无关的形式

$$\langle \Delta \boldsymbol{v}_1 \rangle = -\Gamma_1\left(\frac{q_2}{q_1}\right)^2 \frac{m_1 + m_2}{m_2}\int d\boldsymbol{v}_2 f(\boldsymbol{v}_2)\frac{\boldsymbol{u}}{u^3}, \tag{15.9}$$

$$\langle \Delta \boldsymbol{v}_1 \Delta \boldsymbol{v}_1 \rangle = \Gamma_1\left(\frac{q_2}{q_1}\right)^2 \int d\boldsymbol{v}_2 f(\boldsymbol{v}_2)\frac{u^2\overleftrightarrow{I} - \boldsymbol{u}\boldsymbol{u}}{u^3}. \tag{15.10}$$

再利用

$$\frac{\boldsymbol{u}}{u^3} = -\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{v}_1}\frac{1}{u}, \quad \frac{u^2\overleftrightarrow{I} - \boldsymbol{u}\boldsymbol{u}}{u^3} = \frac{\partial^2 u}{\partial \boldsymbol{v}_1 \partial \boldsymbol{v}_1}, \tag{15.11}$$

并引进两个速度的函数(Rosenbluth 势)

$$H(\boldsymbol{v}_1) = \left(\frac{q_2}{q_1}\right)^2 \frac{m_1 + m_2}{m_2}\int d\boldsymbol{v}_2 \frac{f(\boldsymbol{v}_2)}{|\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2|}, \tag{15.12}$$

$$G(\boldsymbol{v}_1) = \left(\frac{q_2}{q_1}\right)^2 \int d\boldsymbol{v}_2 f(\boldsymbol{v}_2)|\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2|, \quad |\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2| = u, \tag{15.13}$$

来简化两个福克尔-普朗克系数的表达式

$$\langle \Delta \boldsymbol{v}_1 \rangle = \Gamma_1 \frac{\partial H(\boldsymbol{v}_1)}{\partial \boldsymbol{v}_1}, \tag{15.14}$$

$$\langle \Delta \boldsymbol{v}_1 \Delta \boldsymbol{v}_1 \rangle = \Gamma_1 \frac{\partial^2 G(\boldsymbol{v}_1)}{\partial \boldsymbol{v}_1 \partial \boldsymbol{v}_1}. \tag{15.15}$$

最后得到用 Rosenbluth 势表示的福克尔-普朗克碰撞算子

$$\left(\frac{\partial f(\boldsymbol{v}_1)}{\partial t}\right)_c = \Gamma_1\left\{-\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{v}_1}\cdot\left[f(\boldsymbol{v}_1)\frac{\partial H(\boldsymbol{v}_1)}{\partial \boldsymbol{v}_1}\right] + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial \boldsymbol{v}_1 \partial \boldsymbol{v}_1} : \left[f(\boldsymbol{v}_1)\frac{\partial^2 G(\boldsymbol{v}_1)}{\partial \boldsymbol{v}_1 \partial \boldsymbol{v}_1}\right]\right\}. \tag{15.16}$$

速度的函数 $H(\boldsymbol{v}_1)$ 和 $G(\boldsymbol{v}_1)$ 之所以被称为"势"函数，是因为它们满足速度空间的"泊松方程"，和坐标空间的静电势在形式上等价. 为此，首先注意到这两个积分被积函数中的 $1/|\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2|$ 和 $|\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2| = u$ 分别满足以下泊松型微分方程

$$\nabla_{\boldsymbol{v}_1}^2 \frac{1}{u} = -4\pi\delta(\boldsymbol{u}), \quad u = |\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2|,$$

$$\nabla^2_{v_1}\nabla^2_{v_1}u=\nabla^2_{v_1}\frac{2}{u}=-8\pi\delta(u).$$

因此,$1/u$,u 具有这两个微分方程的格林函数的意义,将上两式乘上相应因子并对$\int\cdots f(\boldsymbol{v}_2)\mathrm{d}\boldsymbol{v}_2$求积分后,有

$$\nabla^2_{v_1}H(\boldsymbol{v}_1)=-4\pi\left[\left(\frac{q_2}{q_1}\right)^2\frac{m_1+m_2}{m_2}f(\boldsymbol{v}_1)\right],\quad(15.17)$$

$$\nabla^2_{v_1}\nabla^2_{v_1}G(\boldsymbol{v}_1)=\nabla^2_{v_1}2\frac{2m_2}{m_1+m_2}H(\boldsymbol{v}_1)$$
$$=-8\pi\left[\left(\frac{q_2}{q_1}\right)^2f(\boldsymbol{v}_1)\right].\quad(15.18)$$

这两个方程都有静电势在坐标空间的泊松方程的形式,只不过现在是在速度空间而已,故把它们简称为 Rosenbluth 势函数.

15.4.2 朗道碰撞项

带 Rosenbluth 势函数的碰撞项还可以从玻尔兹曼方程导出.朗道于 1936 年在取库仑势场中的微分散射截面并对玻尔兹曼碰撞积分作小 $\Delta\boldsymbol{v}$ 展开到二阶后,得到了有名的朗道碰撞项

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial t}\right)_c=\frac{\Gamma_i}{2}\sum_j\left(\frac{e_j}{e_i}\right)^2m_i\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{v}_i}\cdot\int\frac{\partial^2|\boldsymbol{v}_i-\boldsymbol{v}_j|}{\partial\boldsymbol{v}_i\partial\boldsymbol{v}_i}$$
$$\cdot\left[\frac{f_j(\boldsymbol{v}_j)}{m_i}\frac{\partial f_i(\boldsymbol{v}_i)}{\partial\boldsymbol{v}_i}-\frac{f_i(\boldsymbol{v}_i)}{m_j}\frac{\partial f_j(\boldsymbol{v}_j)}{\partial\boldsymbol{v}_j}\right]\mathrm{d}\boldsymbol{v}_j,\quad(15.19)$$

其中被积函数第一项也可以按(15.11)的第二式,用相对速度组成的二阶张量写出.而表达式中一开始的常数与库仑对数有关:

$$\Gamma_i=\frac{4\pi q_i^4}{m_i^2}\ln\Lambda.$$

显然,朗道碰撞项具有微分算子的形式,而不再是积分算子了.

可证,具有 Rosenbluth 势的福克尔-普朗克算子和朗道碰撞算子是完全等价的.首先可以从物理上来看出它们的等价性:

在导出具有 Rosenbluth 势的福克尔-普朗克算子时,用到了以下的基本假定:

(i) 马尔可夫近似,(ii) 小 $\Delta\boldsymbol{v}$ 展开,(iii) 库仑相互作用,(iv) 两体碰撞.其中,前两个用于导出福克尔-普朗克碰撞项,后两个则用于进一步导出 Rosenbluth 势.

而在导出朗道碰撞算子时,用到了下列基本假定:

(i) 分子混沌假定,(ii) 两体碰撞,(iii) 库仑相互作用,(iv) 小 $\Delta\boldsymbol{v}$ 展开.其中,前两项用于导出玻尔兹曼碰撞项,后两个则是进而推导朗道碰撞算子所用到的.

从上面的描述可以看出,由于在统计物理学上马尔可夫近似等价于分子混沌假定,故在最终导出两个碰撞算子时,所用的基本假定是完全相同的,只是使用的先后次序有些不同而已.下面具体从朗道碰撞算子出发来导出含 Rosenbluth 势的福克尔-普朗克碰撞项.由(15.19)等式右端的积分开始,并利用 $|\boldsymbol{v}_i-\boldsymbol{v}_j|=u$,$\partial u/\partial\boldsymbol{v}_j=-\partial u/\partial\boldsymbol{v}_i$ 以及分部积分,有

$$\int\frac{\partial^2|\boldsymbol{v}_i-\boldsymbol{v}_j|}{\partial\boldsymbol{v}_i\partial\boldsymbol{v}_i}\cdot\left[\frac{f_j(\boldsymbol{v}_j)}{m_i}\frac{\partial f_i(\boldsymbol{v}_i)}{\partial\boldsymbol{v}_i}-\frac{f_i(\boldsymbol{v}_i)}{m_j}\frac{\partial f_j(\boldsymbol{v}_j)}{\partial\boldsymbol{v}_j}\right]\mathrm{d}\boldsymbol{v}_j$$
$$=\frac{1}{m_i}\frac{\partial f_i(\boldsymbol{v}_i)}{\partial\boldsymbol{v}_i}\cdot\frac{\partial^2}{\partial\boldsymbol{v}_i\partial\boldsymbol{v}_i}\int uf_j(\boldsymbol{v}_j)\mathrm{d}\boldsymbol{v}_j$$
$$+\frac{1}{m_j}f_i(\boldsymbol{v}_i)\int\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{v}_j}\cdot\frac{\partial^2u}{\partial\boldsymbol{v}_i\partial\boldsymbol{v}_i}f_j(\boldsymbol{v}_j)\mathrm{d}\boldsymbol{v}_j$$
$$=\frac{1}{m_i}\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{v}_i}\cdot\left(f_i\frac{\partial^2}{\partial\boldsymbol{v}_i\partial\boldsymbol{v}_i}\int uf_j(\boldsymbol{v}_j)\mathrm{d}\boldsymbol{v}_j\right)$$
$$-\frac{1}{m_i}f_i\frac{\partial^3}{\partial\boldsymbol{v}_i\partial\boldsymbol{v}_i^2}\int uf_j(\boldsymbol{v}_j)\mathrm{d}\boldsymbol{v}_j-\frac{1}{m_j}f_i\frac{\partial^3}{\partial\boldsymbol{v}_i\partial\boldsymbol{v}_i^2}\int uf_j(\boldsymbol{v}_j)\mathrm{d}\boldsymbol{v}_j$$
$$=\frac{1}{m_i}\left(\frac{q_i}{q_j}\right)^2\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{v}_i}\cdot\left(f_i\frac{\partial^2G_j(\boldsymbol{v}_i)}{\partial\boldsymbol{v}_i\partial\boldsymbol{v}_i}\right)$$
$$-\frac{m_i+m_j}{m_im_j}\left(\frac{q_i}{q_j}\right)^2f_i\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{v}_i}\nabla^2_{v_i}G_j(\boldsymbol{v}_i),$$

其中最后得到的等式右端的后一项再利用(15.18)式可以进一步简化成

$$-\frac{m_i+m_j}{m_im_j}\left(\frac{q_i}{q_j}\right)^2 f_i\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{v}_i}\nabla^2_{\boldsymbol{v}_i}G_j(\boldsymbol{v}_i)$$
$$=-\frac{m_i+m_j}{m_im_j}\left(\frac{q_i}{q_j}\right)^2 f_i\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{v}_i}\left(\frac{2m_j}{m_i+m_j}H_j(\boldsymbol{v}_i)\right),$$

然后将它代入前式,最后朗道碰撞项中的积分部分就化成

$$\int\frac{\partial^2|\boldsymbol{v}_i-\boldsymbol{v}_j|}{\partial \boldsymbol{v}_i\partial \boldsymbol{v}_i}\cdot\left[\frac{f_j(\boldsymbol{v}_j)}{m_i}\frac{\partial f_i(\boldsymbol{v}_i)}{\partial \boldsymbol{v}_i}-\frac{f_i(\boldsymbol{v}_i)}{m_j}\frac{\partial f_j(\boldsymbol{v}_j)}{\partial \boldsymbol{v}_j}\right]\mathrm{d}\boldsymbol{v}_j$$
$$=-\frac{2}{m_i}\left(\frac{q_i}{q_j}\right)^2\left[f_i\frac{\partial H_j(\boldsymbol{v}_i)}{\partial \boldsymbol{v}_i}-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{v}_i}\cdot\left(f_i\frac{\partial^2 G_j(\boldsymbol{v}_i)}{\partial \boldsymbol{v}_i\partial \boldsymbol{v}_i}\right)\right].\qquad(15.20)$$

然后,将这结果代入(15.19)式,就正好是含 Rosenbluth 势的福克尔-普朗克碰撞项.

在用动理学方程求解输运问题时,无论用哪个碰撞项都可以.一般早期苏联学者的工作都是用朗道碰撞项来作的,例如 S. I. Braginskii 在平板几何中的磁化等离子体输运系数的经典工作(见文献[3]);而美欧的学者则常用福克尔-普朗克碰撞项来导出,例如柱形几何中磁化等离子体输运系数的权威工作(见文献[4]).

不过在证明弹性碰撞项能保持整个碰撞体系的粒子数、动量及动能守恒时,用朗道碰撞项特别方便.

15.4.3 弹性碰撞算子的守恒性质

首先,将朗道算子再进行简写.令

$$\frac{\Gamma_i}{2}\left(\frac{q_j^2}{q_i^2}\right)^2 m_i=\frac{c_{ij}}{m_i},\quad\Rightarrow\quad c_{ij}=2\pi q_i^2q_j^2\ln\Lambda,$$

及

$$\left[\frac{f_j}{m_i}\frac{\partial f_i}{\partial \boldsymbol{v}_i}-\frac{f_i}{m_j}\frac{\partial f_j}{\partial \boldsymbol{v}_j}\right]=\chi_{ij}.$$

可以发现,存在以下对称性

$$c_{ij}=c_{ji},\quad \chi_{ij}=-\chi_{ji}.\qquad(15.21)$$

于是朗道碰撞算子就可以表示成

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial t}\right)_c=\sum_j\frac{c_{ij}}{m_i}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{v}_i}\cdot\int\frac{\partial|\boldsymbol{v}_i-\boldsymbol{v}_j|}{\partial \boldsymbol{v}_i\partial \boldsymbol{v}_j}\cdot\chi_{ij}\mathrm{d}\boldsymbol{v}_j.\qquad(15.22)$$

碰撞保持总粒子数守恒.对式(15.22)在整个速度空间求积分,可证

$$\int\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i\left(\frac{\partial f_i}{\partial t}\right)_c=\sum_j\frac{c_{ij}}{m_i}\int\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{v}_i}\cdot\int\frac{\partial|\boldsymbol{v}_i-\boldsymbol{v}_j|}{\partial \boldsymbol{v}_i\partial \boldsymbol{v}_j}\cdot\chi_{ij}\mathrm{d}\boldsymbol{v}_j$$
$$=\sum_j\frac{c_{ij}}{m_i}\left[\int\frac{\partial|\boldsymbol{v}_i-\boldsymbol{v}_j|}{\partial \boldsymbol{v}_i\partial \boldsymbol{v}_j}\cdot\chi_{ij}\mathrm{d}\,\boldsymbol{v}_j\right]_{\boldsymbol{v}_i\to\pm\infty}$$
$$\equiv 0.$$

碰撞保持粒子系总动量守恒,

$$\sum_i\int m_i\boldsymbol{v}_i\left(\frac{\partial f_i}{\partial t}\right)_c\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i=\sum_i\sum_j\boldsymbol{F}_{ij},\qquad(15.23)$$

其中

$$\boldsymbol{F}_{ij}=-c_{ij}\int\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i\int\mathrm{d}\boldsymbol{v}_j\frac{\partial|\boldsymbol{v}_i-\boldsymbol{v}_j|}{\partial \boldsymbol{v}_i\partial \boldsymbol{v}_j}\cdot\chi_{ij}(\boldsymbol{v}_i,\boldsymbol{v}_j).\qquad(15.24)$$

交换上面表达式的下标 i,j,可证

$$\boldsymbol{F}_{ij}=-\boldsymbol{F}_{ji},\quad \boldsymbol{F}_{ii}=\boldsymbol{F}_{jj}\equiv 0.\qquad(15.25)$$

最后有

$$\sum_i\sum_j\boldsymbol{F}_{ij}=0,\qquad(15.26)$$

也即总粒子系的动量守恒.

碰撞保持粒子系总能量守恒.从无规运动能(热能)定义,有

$$\sum_i\int\left(\frac{\partial f_i}{\partial t}\right)_c\frac{m_i}{2}(\boldsymbol{v}_i-\boldsymbol{u}_i)^2\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i$$
$$=\sum_i\sum_j\frac{c_{ij}}{m_i}\int\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i\frac{m_i}{2}(\boldsymbol{v}_i-\boldsymbol{u}_i)^2\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{v}_i}\cdot\int\frac{\partial|\boldsymbol{v}_i-\boldsymbol{v}_j|}{\partial \boldsymbol{v}_i\partial \boldsymbol{v}_j}\cdot\chi_{ij}\mathrm{d}\boldsymbol{v}_j.$$

把左面展开,而右面用一个简单的符号 Q_{ij} 来代替,得到

$$\sum_i\sum_j\left(\int\mathrm{d}\,\boldsymbol{v}_i\left(\frac{\partial f_i}{\partial t}\right)_c\frac{m_i}{2}v_i^2-\boldsymbol{u}_i\cdot\boldsymbol{F}_{ij}\right)=\sum_i\sum_j Q_{ij},\qquad(15.27)$$

其中 $\boldsymbol{u}_i=\int \mathrm{d}\boldsymbol{v}_i\boldsymbol{v}_i f_i$. 由上式(对方程左面第一项作分部积分后)可得

$$Q_{ij}+\boldsymbol{u}_i\cdot\boldsymbol{F}_{ij}=-c_{ij}\int \mathrm{d}\boldsymbol{v}_i\int \mathrm{d}\boldsymbol{v}_j\boldsymbol{v}_i\cdot\frac{\partial|\boldsymbol{v}_i-\boldsymbol{v}_j|}{\partial\boldsymbol{v}_i\partial\boldsymbol{v}_j}\cdot\chi_{ij},$$

$$Q_{ji}+\boldsymbol{u}_j\cdot\boldsymbol{F}_{ji}=c_{ij}\int \mathrm{d}\boldsymbol{v}_i\int \mathrm{d}\boldsymbol{v}_j\boldsymbol{v}_i\cdot\frac{\partial|\boldsymbol{v}_i-\boldsymbol{v}_j|}{\partial\boldsymbol{v}_i\partial\boldsymbol{v}_j}\cdot\chi_{ij}.$$

第二个等式是从第一个等式交换下标而得出的,并用到了 c_{ij}, χ_{ij} 的对称性. 将上面两式相加,得

$$Q_{ij}+Q_{ji}=(\boldsymbol{u}_j-\boldsymbol{u}_i)\cdot\boldsymbol{F}_{ij}. \tag{15.28}$$

显然有

$$Q_{ii}=Q_{jj}\equiv 0. \tag{15.29}$$

最后,从本小节第一式可证系统的总能量在碰撞中的改变为

$$\sum_i\int \mathrm{d}\boldsymbol{v}_i\left(\frac{\partial f_i}{\partial t}\right)_c\frac{1}{2}m_iv_i^2=\sum_i\sum_j(Q_{ij}+\boldsymbol{u}_i\cdot\boldsymbol{F}_{ij})\equiv 0. \tag{15.30}$$

也即系统的总能量在碰撞前后不变. 除了以上三个守恒律外,一个物理上合理的弹性碰撞算子还应满足以下性质:

(i) 如果在 $t=0$ 时,粒子速度分布函数有 $f(\boldsymbol{v},t=0)\geqslant 0$,则对以后的任何时刻 t,都应该有 $f(\boldsymbol{v},t>0)\geqslant 0$.

(ii) 麦克斯韦速度分布函数 $f_M(v^2)$ 应当是 $(\partial f/\partial t)_c=0$ 时的动理学方程的解(即热力学平衡解).

(iii) 存在 H 定理:

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}\leqslant 0,\quad H=\int f\ln f\mathrm{d}\boldsymbol{v}.$$

特别当

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}=0,\quad\Rightarrow\quad f=f_M.$$

对于福克尔-普朗克碰撞算子,可以证明它能满足以上要求. 详细的证明过程可以参考文献[4]和[5].

15.5 试探粒子的各种碰撞频率

带福克尔-普朗克碰撞算子的动理学方程的最简单应用,是描述试探粒子的弛豫过程. 在本章一开始给出的试探粒子的各种弛豫时间(慢化、热化时间)都可以从动理学方程给出.

试探粒子模型适用的条件主要有两个. 首先要求作为试探粒子的带电粒子密度要比影响它们的背景等离子体密度低得多,于是只需考虑背景等离子体粒子对试探粒子的碰撞作用(慢化、热化等),而不用考虑束粒子对背景粒子的反作用,当然更不考虑试探粒子之间的相互作用. 其次,试探粒子要有比较单一的速度,即它们的平均(整体)速度应远大于无规(热)速度

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{u}(t)+\boldsymbol{w}(t)\approx\text{常数},\quad \boldsymbol{w}(t)\ll\boldsymbol{u}(t). \tag{15.31}$$

这样才能用速度的慢化和能量的扩散来对它们的演化行为作描述. 因此,试探粒子近似,主要用来描述流强较弱(因而粒子数密度较低)的单能(所有粒子的速度都相近)带电粒子束,在入射到背景等离子体中后一个短时间内(约为几个平均碰撞时间)的演化行为.

在下面的描述中,将试探粒子的量赋以下标 t,而对背景粒子的量赋以下标 b;于是试探粒子的速度分布函数所满足的动理学方程是

$$\frac{\partial f_t}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{v}}\cdot\left[\langle\Delta\boldsymbol{v}_t\rangle f_t-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{v}}\cdot(\langle\Delta\boldsymbol{v}_t\Delta\boldsymbol{v}_t\rangle f_t)\right]. \tag{15.32}$$

为了简单,取初始束粒子都有完全相同的速度(能量),$f_t(t=0)=n_t\delta(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_0)$. $\boldsymbol{v}_0=v_0\boldsymbol{e}_1$ 是束粒子的初速度;在 $t=0$ 时刻,束的平均(整体或流体)速度也等于它,$\boldsymbol{u}(0)=v_0\boldsymbol{e}_1$(图 15.3). 而两个动理学系数为

$$\langle\Delta\boldsymbol{v}_t\rangle=\sum_b\Gamma_t\frac{\partial H_b}{\partial\boldsymbol{v}},\quad\langle\Delta\boldsymbol{v}_t\Delta\boldsymbol{v}_t\rangle=\sum_b\Gamma_t\frac{\partial G_b}{\partial\boldsymbol{v}\partial\boldsymbol{v}},$$

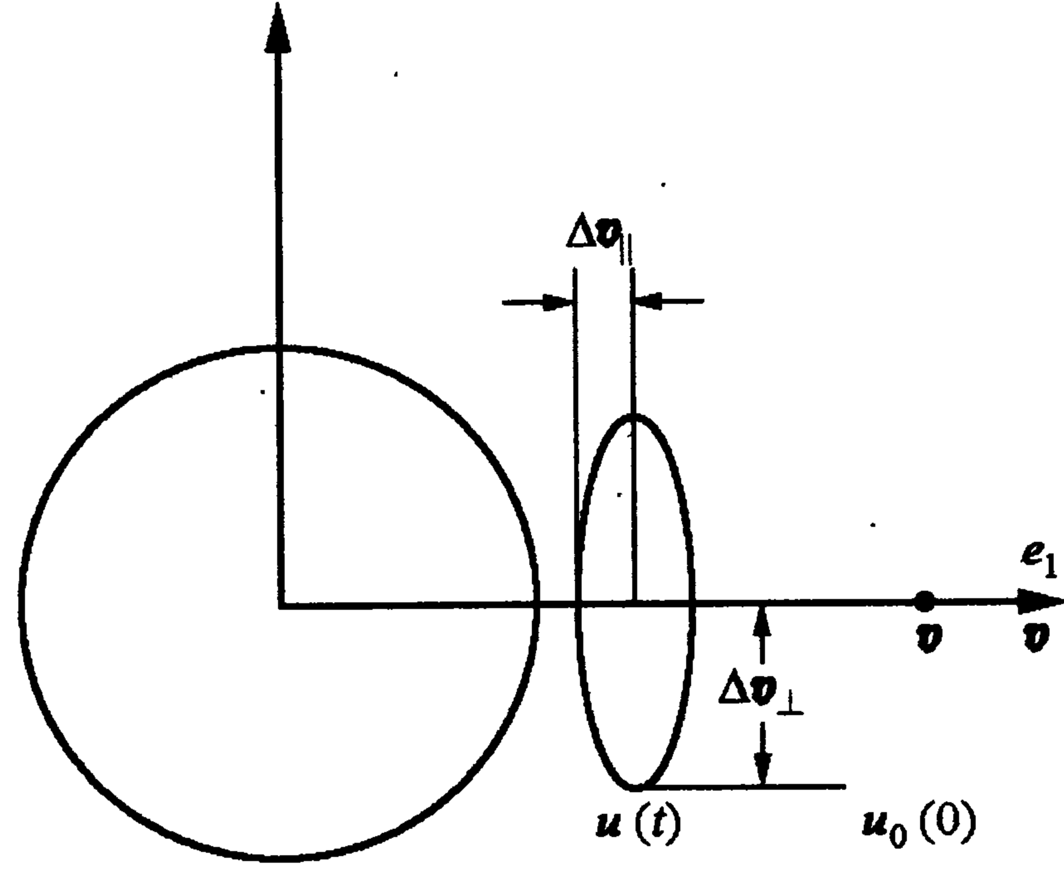


图15.3 试探粒子束演化示意图

$$\Gamma_t = \frac{4\pi q_t^4 \ln\Lambda}{m_t^2}. \tag{15.33}$$

在 $t>0$ 时，束粒子由于受到背景粒子的散射，其速度（在试探粒子模型适用的时间内可近似成常数）为

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}(t) + \boldsymbol{w}(t).$$

其中 $\boldsymbol{u}(t)$ 为束的平均速度，而 $\boldsymbol{w}(t)$ 为"热速度"，

$$\boldsymbol{u} = \int \boldsymbol{v} f_t(\boldsymbol{v}, t)\mathrm{d}\boldsymbol{v},$$

$$\int \boldsymbol{w} f_t(\boldsymbol{v}, t)\mathrm{d}\boldsymbol{v} = 0.$$

平均速度的时间演化方程即是动理学方程(15.32)的一阶（速度）矩方程

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}(t)}{\mathrm{d}t} = \langle \Delta \boldsymbol{v}_t \rangle(\boldsymbol{v}). \tag{15.34}$$

为了明显地看出慢化的特征时间（或频率）尺度，令

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}(t)}{\mathrm{d}t} = -\nu_s^t(v)\,\boldsymbol{v},$$

则其中的慢化频率可用 Rosenbluth 势来表示

$$\nu_s^t(v) = -\frac{\boldsymbol{v}\cdot\langle \Delta \boldsymbol{v}_t \rangle(\boldsymbol{v}(t))}{v^2}$$

$$= -\Gamma_t \sum_b \frac{1}{v} \frac{\partial H_b(v)}{\partial v}. \tag{15.35}$$

上式动理学摩擦系数中的 $\boldsymbol{v}$ 基本上还取在入射的方向上，$\boldsymbol{v}(t) = v\boldsymbol{e}_1$（即略去 $\boldsymbol{w}(t)$ 造成的速度方向弥散）.

当讨论试探粒子由于被背景粒子碰撞而发生的平均能量（在垂直于入射方向上的）随时间扩散时，"热速度"随时间的变化率 $\mathrm{d}\boldsymbol{w}(t)/\mathrm{d}t$ 不可忽略. 为了简化讨论，我们假定 $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}(t) + \boldsymbol{w}(t)$ 中的 $\boldsymbol{u}(t)$ 已经由慢化方程求得，在下面的处理中只把它当成一个参数；而令试探粒子的速度分布函数仅仅是 $\boldsymbol{w}(t)$ 的函数

$$f_t(\boldsymbol{v}, t) = n_t F_t(\boldsymbol{w}(t), t). \tag{15.36}$$

这样动理学方程的左面可以化成

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}f_t(\boldsymbol{v}, t)}{\mathrm{d}t} &= n_t \frac{\mathrm{d}F_t(\boldsymbol{w}, t)}{\mathrm{d}t} \\
&= n_t \frac{\partial F_t}{\partial t} + n_t \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{w}}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\partial F_t}{\partial \boldsymbol{w}} \\
&= n_t \frac{\partial F_t}{\partial t} - n_t \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\partial F_t}{\partial \boldsymbol{w}},
\end{aligned}$$

其中用到了

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = 0 = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{w}(t)}{\mathrm{d}t}.$$

而福克尔-普朗克方程的右面为

$$\begin{aligned}
&-\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{v}}\cdot\left[\langle \Delta \boldsymbol{v}_t \rangle f_t - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{v}}\cdot(\langle \Delta \boldsymbol{v}_t \Delta \boldsymbol{v}_t \rangle f_t)\right] \\
&= -\langle \Delta \boldsymbol{v}_t \rangle n_t \cdot \frac{\partial F_t}{\partial \boldsymbol{v}} + \frac{1}{2} n_t \langle \Delta \boldsymbol{v}_t \Delta \boldsymbol{v}_t \rangle : \frac{\partial^2}{\partial \boldsymbol{v}\,\partial \boldsymbol{v}} F_t \\
&= -\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}(t)}{\mathrm{d}t} n_t \cdot \frac{\partial F_t}{\partial \boldsymbol{w}} + \frac{1}{2} n_t \langle \Delta \boldsymbol{v}_t \Delta \boldsymbol{v}_t \rangle : \frac{\partial^2 F_t}{\partial \boldsymbol{w}\partial \boldsymbol{w}}.
\end{aligned}$$

令福克尔-普朗克方程左、右两边相等后，得动理学方程

$$\frac{\partial F_t}{\partial t} = \frac{1}{2}\langle \Delta \boldsymbol{v}_t \Delta \boldsymbol{v}_t \rangle : \frac{\partial^2 F_t}{\partial \boldsymbol{w}\partial \boldsymbol{w}}. \tag{15.37}$$

应该注意到，这个演化方程只和福克尔-普朗克方程的（动理学）扩

散系数有关. 令入射速度及平均速度的方向为平行方向, $\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{e}_\parallel$, 而垂直方向为 $\boldsymbol{e}_\perp=(\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)$, 则可分别定义平行和垂直方向上的能量弥散(扩散)

$$\langle(\Delta \boldsymbol{v}_\parallel)^2\rangle \equiv \int \mathrm{d}\boldsymbol{v}\,[(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u})\cdot\boldsymbol{e}_1]^2 F_t(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u},t),$$

$$\langle(\Delta \boldsymbol{v}_\perp)^2\rangle \equiv \int \mathrm{d}\boldsymbol{v}\,[(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{e}_2)^2+(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{e}_3)^2] F_t(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u},t).$$

于是由上面的动理学方程(15.37), 可以得二阶矩方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle(\Delta \boldsymbol{v}_\parallel)^2\rangle = \boldsymbol{e}_1\cdot\langle\Delta\boldsymbol{v}_t\Delta\boldsymbol{v}_t\rangle\cdot\boldsymbol{e}_1 = D^t_\parallel(v), \tag{15.38}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle(\Delta \boldsymbol{v}_\perp)^2\rangle = \boldsymbol{e}_2\cdot\langle\Delta\boldsymbol{v}_t\Delta\boldsymbol{v}_t\rangle\cdot\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3\cdot\langle\Delta\boldsymbol{v}_t\Delta\boldsymbol{v}_t\rangle\cdot\boldsymbol{e}_3 \tag{15.39}$$

$$= D^t_{22}(v) + D^t_{33}(v) \doteq 2D^t_\perp(v), \tag{15.40}$$

其中

$$D^t_\parallel(v) = \sum_b \Gamma_t \frac{\partial^2 G_b(\boldsymbol{v})}{\partial v^2}, \tag{15.41}$$

$$2D^t_\perp(v) = \sum_b \Gamma_t\left(\frac{\partial}{\partial v_2^2}+\frac{\partial}{\partial v_3^2}\right) G_b(\boldsymbol{v}). \tag{15.42}$$

(15.42)式中的算子有时还可以写作

$$\frac{\partial}{\partial v_2^2}+\frac{\partial}{\partial v_3^2} = \nabla_v^2 - \frac{\partial}{\partial v_1^2} = \nabla_v^2 - \frac{\partial}{\partial v^2},$$

其中已经考虑到试探粒子模型成立时, 有 $v^2=v_1^2+v_2^2+v_3^2\sim v_1^2$. 如果背景粒子在空间呈球对称分布: $G_b(\boldsymbol{v})=G_b(v)$, 则上式变成

$$\nabla_v^2 - \frac{\partial}{\partial v^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial}{\partial v}\left(v^2\frac{\partial}{\partial v}\right) - \frac{\partial}{\partial v^2} = \frac{2}{v}\frac{\partial}{\partial v}.$$

故垂直能量的扩散系数变成

$$D^t_\perp(v) = \sum_b \Gamma_t \frac{1}{v}\frac{\partial G_b(v)}{\partial v}. \tag{15.43}$$

进一步, 由平行和垂直两个方向的能量变化率, 还可以得出试探粒子总能量的改变率为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle\frac{1}{2}m_t(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{w})^2\rangle = -m_t u^2\nu_s + m_t\left(D^t_\perp + \frac{1}{2}D^t_\parallel\right)$$

$$\equiv -\nu^t_E\frac{1}{2}m_t u^2.$$

于是有总能量碰撞频率

$$\nu^t_E = 2\nu^t_s - \frac{2}{u^2}D^t_\perp - \frac{1}{u^2}D^t_\parallel. \tag{15.44}$$

在上面导出的几个试探粒子的特征碰撞频率 $\nu^t_s, D^t_\perp, D^t_\parallel$ 及由它们组成的 ν^t_E 都依赖于背景粒子的两个 Rosenbluth 势 $H_b(\boldsymbol{v})$, $G_b(\boldsymbol{v})$, 而它们又取决于背景粒子的速度分布函数 $f_b(\boldsymbol{v})$. 一般 $f_b(\boldsymbol{v})$ 的形式可以是任意的, 但在许多实际情况中, 背景粒子往往处在热力学平衡态或近热力学平衡态. 当取麦克斯韦型的背景粒子速度分布时,

$$f_b(v^2) = f_M\left(\frac{v}{v_b}\right) = \frac{n_b}{\pi^{3/2}v_b^3}\exp\left[-\frac{v^2}{v_b^2}\right], \quad v_b = \sqrt{\frac{2T_b}{m_b}}.$$

这时它们对应的 Rosenbluth 势可以用误差函数表示出来

$$H_b(v) = n_b\left(1+\frac{m_t}{m_b}\right)\left(\frac{z_b}{z_t}\right)^2\frac{1}{v}\Phi\left(\frac{v}{v_b}\right), \tag{15.45}$$

$$G_b(v) = n_b\left(\frac{z_b}{z_t}\right)^2 v_b\phi\left(\frac{v}{v_b}\right). \tag{15.46}$$

而上面给出的几种试探粒子碰撞频率则可有以下明显表达式

$$\nu^t_s(v) = \frac{2\Gamma_t}{v}\sum_b\frac{n_b}{v_b^2}\left(1+\frac{m_t}{m_b}\right)\left(\frac{z_b}{z_t}\right)^2\psi\left(\frac{v}{v_b}\right), \tag{15.47}$$

$$\nu^t_D = \frac{2D^t_\perp}{v^2},\quad D^t_\perp(v) = \frac{\Gamma_t}{v}\sum_b n_b\left(\frac{z_b}{z_t}\right)^2\left[\Phi\left(\frac{v}{v_b}\right)-\psi\left(\frac{v}{v_b}\right)\right], \tag{15.48}$$

$$\nu^t_\parallel = \frac{D^t_\parallel}{v^2},\quad D^t_\parallel(v) = \frac{2\Gamma_t}{v}\sum_b n_b\left(\frac{z_b}{z_t}\right)^2\psi\left(\frac{v}{v_b}\right), \tag{15.49}$$

$$\nu^t_E = \frac{2\Gamma_t m_t}{v^3}\sum_b\frac{n_b}{m_b}\left(\frac{z_b}{z_t}\right)^2\left[\Phi\left(\frac{v}{v_b}\right)-\left(1+\frac{m_b}{m_t}\right)\left(\frac{v}{v_b}\right)\Phi'\left(\frac{v}{v_b}\right)\right], \tag{15.50}$$

其中的误差函数及其相关函数的定义是

$$\Phi(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-y^2}dy,$$

$$\phi(x)=\left(x+\frac{1}{2x}\right)\Phi(x)+\frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}},$$

$$\psi(x)=\frac{\Phi(x)-x\Phi'(x)}{2x^2}.$$

这些表达式与《等离子体物理原理》[2]中用流体描述给出的相应碰撞频率完全相同(见该书(3.2-72),(3.2-77),(3.2-79)及(3.2-81)式). 因此,用动理学描述并将背景粒子速度分布取成麦克斯韦分布,与一开始就从流体描述出发,所得到的试探粒子的弛豫时间是等价的(这点从物理上也是容易理解的). 而用动理学方法描述的长处只表现在背景粒子的分布函数不是麦克斯韦分布时的更一般场合.

参考文献

[1] Bhatnagar P L, Gross E P, Krook M. Physical Review, **94**(1954)511

[2] 马腾才,胡希伟,陈银华. 等离子体物理原理. 合肥:中国科学技术大学出版社,1988. 138

[3] Braginskii S I. *in* Reviews of Plasma Physics, Vol. 1. Consultants Bureau, New York, 1965. 205

[4] Hinton F L. *in* Handbook of Plasma Physics, Vol. 1. North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1983. 154

[5] Montgomery D C, Tidman D A. Plasma Kinetic Theory. McGraw-Hill Book Company, New York, 1964

第十六章 输 运

对于"集体碰撞",在本书第四部分一开始就指出,它们会引发输运过程. 由于实验上一般只实行坐标空间中的测量,故为了和实验比较,通常用坐标空间的输运方程,也就是动理学方程的矩方程来描述输运过程. 最简单的输运方程只涉及粒子系的密度、平均(流体)速度以及能量(温度)这五个矩(分量)的演化方程. 在上述矩方程中包含了另外八个更高阶的矩分量:热流矢量(三阶矩)的三个分量,和二阶黏性张量中的五个独立分量(二阶张量原有九个分量,但由于其下标具有对称性,六个非对角元素中只有三个是独立的;而对角三元素之和为热压强,热压强又通过理想气体的物态方程与温度相联系,故独立的又只有二个). 在常用的"五矩输运方程组"描述中,用了傅里叶热传导定律及牛顿黏性定律,将这八个分量通过前五个矩分量表示出来. 这些输运定律中的输运系数(如热导系数和黏性系数)可以从实验上测定,也可以通过动理学方程推导出来. 如果进一步把这后八个矩也用演化方程包括到输运方程组中来,则得到的是比较复杂的"十三矩输运方程组". 当然其中所含有的更高阶矩还需要设法用前十三个矩表示出来. 本章只讨论五矩的输运方程,并介绍用动理学方程推导出输运系数的方法. 关于十三矩输运方程组的讨论可以参考文献[1].

16.1 平板几何下磁化等离子体中的经典输运

本节讨论处在均匀磁场中、各方向上均无限延展的非均匀等离子体中的输运过程. 这时可以用直角坐标系来描述. 本节着重介

绍用最简单的带 BGK 碰撞项的动理学方程来导出输运流及输运系数的弛豫时间近似法. 然后不作推导地列出 Braginskii 用朗道碰撞项导出的比较严格和完整的输运系数,这些系数至今还是被广泛引用的公认的权威数据.

16.1.1　弛豫时间近似法

这时应用的就是本章开始介绍的带 BGK 碰撞项的动理学方程(为简单已略去了表示粒子种类的下标)

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\boldsymbol{v}\cdot\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{r}}+\frac{\boldsymbol{F}}{m}\cdot\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{v}}=-\nu(f-f_0). \tag{16.1}$$

其中

$$f_0=n(\boldsymbol{r})\left(\frac{m}{2\pi T(\boldsymbol{r})}\right)^{3/2}\exp\left[-\frac{m(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}))^2}{2T(\boldsymbol{r})}\right]$$

是处在局部热力学平衡态的速度分布函数. 令 $f=f_0+\hat{f}$,并假定 $\hat{f}\ll f_0$,即系统偏离平衡态并不远. 这时可以用线性化的动理学方程来研究此体系的线性输运过程,

$$\frac{\partial \hat{f}}{\partial t}+\boldsymbol{v}\cdot\frac{\partial f_0}{\partial \boldsymbol{r}}+\frac{\boldsymbol{F}}{m}\cdot\frac{\partial f_0}{\partial \boldsymbol{v}}=-\nu\hat{f}. \tag{16.2}$$

在静止(时间不变)状态下 $\partial\hat{f}/\partial t=0$,于是由线性方程可得其静态解

$$\hat{f}=-\frac{1}{\nu}\left[\boldsymbol{v}\cdot\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}+\frac{\boldsymbol{F}}{m}\cdot\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{v}}\right]f_0. \tag{16.3}$$

由此可求得各种输运流的表达式:

粒子流

$$\boldsymbol{\Gamma}=\int \boldsymbol{v}\hat{f}\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}. \tag{16.4}$$

电流

$$\boldsymbol{J}=e\int \boldsymbol{v}\hat{f}\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}. \tag{16.5}$$

热流

$$\boldsymbol{q}=\int\frac{1}{2}mw^2\boldsymbol{w}\hat{f}\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}. \tag{16.6}$$

黏性张量(的一个分量)

$$\Pi_{xz}=\int mw_xw_z\hat{f}\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}. \tag{16.7}$$

下面就分别讨论这些流及其相应的输运系数.

1. 粒子流及扩散系数

假定这时

$$\nabla n(\boldsymbol{r})=\nabla_x n(x),\quad T(\boldsymbol{r})=T=\text{常数},\quad \boldsymbol{u}(\boldsymbol{r})=0.$$

于是平衡分布函数可简写成

$$f_0(x)=n(x)\left(\frac{m}{2\pi T}\right)^{3/2}\exp\left[-\frac{mv^2}{2T}\right].$$

而分布函数的偏离则简化成

$$\hat{f}=-\frac{f_0}{n\nu}v_x\frac{\partial n(x)}{\partial x}.$$

于是仅有的扩散流是

$$\Gamma_x=\int v_x\hat{f}\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}=-\int v_x\frac{f_0}{n\nu}v_x\frac{\partial n(x)}{\partial x}\mathrm{d}\boldsymbol{v}=-\left(\int v_x^2\frac{f_0}{n\nu}\mathrm{d}\,\boldsymbol{v}\right)\frac{\partial n(x)}{\partial x}$$
$$=-D_x\nabla_x n(x),$$

这表达式又称为关于扩散的菲克(Fick)定律. 其中所出现的系数就是扩散系数,现在它可以用动理学的方法算出:

$$D_x=\frac{1}{\nu}\int v_x^2\frac{f_0}{n(x)}\mathrm{d}\boldsymbol{v}=\frac{T}{m\nu}. \tag{16.8}$$

2. 电流及电导,粒子流及迁移率

这两个输运流是由外加常电场 E_x 引起的,因此可以假定这时等离子体是空间均匀的,

$$\nabla n(\boldsymbol{r})=\nabla T(\boldsymbol{r})=\nabla\cdot\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r})=0.$$

这时线性动理学方程及其解分别为

$$\frac{eE_x}{m}\frac{\partial f_0}{\partial v_x}=-\nu\hat{f},\quad\Rightarrow\quad\hat{f}=\frac{e}{\nu T}v_xE_xf_0.$$

由它所产生的电流为

$$J_x = e\int v_x \hat{f}\, \mathrm{d}\boldsymbol{v} = \left(\frac{e^2}{\nu T}\int v_x^2 f_0 \mathrm{d}\,\boldsymbol{v}\right) E_x = \sigma E_x,$$

这就是欧姆定律. 而其中输运系数为电导系数

$$\sigma_x = \frac{e^2}{\nu T}\int v_x^2 f_0 \mathrm{d}\boldsymbol{v} = \frac{ne^2}{m\nu}. \tag{16.9}$$

由这样的偏离(分布)函数,还可以产生粒子流

$$\Gamma_x = \int v_x \hat{f}\, \mathrm{d}\boldsymbol{v} = n\mu E_x,$$

其中的输运系数称为迁移率,

$$\mu_x = \frac{e}{\nu T}\int v_x^2 f_0 \mathrm{d}\boldsymbol{v} = \frac{e}{m\nu}. \tag{16.10}$$

在以上几种输运系数之间存在密切关系

$$D = \frac{T}{ne^2}\sigma,$$

$$D = \frac{T}{e}\mu,$$

$$\sigma = ne\mu,$$

其中第一个关系最早被爱因斯坦所发现,称为爱因斯坦关系. 爱因斯坦关系与后两个关系不同,它是一个普适的(或者说是严格的)关系式. 即通过其他更严格的动理学方程解或力学的线性涨落——耗散定理也能得到和这里完全一样的爱因斯坦关系. 而从(近似度)不同的动理学方程解,所得出的后两个输运系数间的关系式,则会具有不同的数值因子.

3. 黏性张量和黏性系数

这是由于流速场的空间不均匀引起的输运过程. 因此可以假定

$$\nabla\cdot\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}) \neq 0,\quad \nabla n(\boldsymbol{r}) = \nabla T(\boldsymbol{r}) = 0.$$

于是有偏离分布函数(其中相重下标要求和)

$$\hat{f} = -\frac{1}{\nu}\frac{mv_i}{T}\frac{\partial u_j(\boldsymbol{r})}{\partial x_i}(v_j - u_j(\boldsymbol{r}))f_0,$$

$$f_0 = n\left(\frac{m}{2\pi T}\right)^{3/2}\exp\left[-\frac{mw^2}{2T}\right], \tag{16.11}$$

其中引入了热速度

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}).$$

这样,黏性张量可表示成

$$\overleftrightarrow{\Pi} = -\frac{m}{\nu}\int \boldsymbol{ww}\left[\frac{mv_i}{T}\frac{\partial}{\partial x_i}u_j(\boldsymbol{r})w_j(\boldsymbol{r})\right]f_0 \mathrm{d}\boldsymbol{v}. \tag{16.12}$$

为计算其中的 Π_{xz} 分量,取

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}) = u_x(z)\boldsymbol{e}_x,\quad w_x(z) = v_x - u_x(z),\quad w_y = v_y,\quad w_z = v_z.$$

则有

$$\Pi_{xz} = -\left(\frac{m^2}{\nu T}\int w_x w_z v_z w_z f_0 \mathrm{d}\,\boldsymbol{v}\right)\frac{\mathrm{d}u_x(z)}{\mathrm{d}z} = -\zeta\frac{\mathrm{d}u_x(z)}{\mathrm{d}z},\quad \zeta = \frac{m^2}{\nu T}\int w_x^2 w_z^2 f_0 \mathrm{d}\boldsymbol{v},$$

其中 ζ 是剪切黏性系数. 利用速度空间球坐标,$w_x^2 = w^2\sin^2\theta\cos^2\varphi$,$w_z^2 = w^2\cos^2\theta$ 以及

$$\int_0^\pi \sin^2\theta\cos^2\theta\sin\theta \mathrm{d}\theta = \frac{4}{15},$$

$$\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi \mathrm{d}\varphi = \pi,$$

$$\int_0^\infty w^6\exp\left(-\frac{m}{2T}w^2\right)\mathrm{d}w = \frac{15}{16\pi}\left(\frac{2\pi T}{m}\right)^{3/2}\left(\frac{2T}{m}\right)^2,$$

在将它们代入黏性系数的表达式后,有(通过动理学方法算出的)黏性系数

$$\zeta = \frac{nT}{\nu}. \tag{16.13}$$

4. 热流和热导系数

按傅里叶定理,热流正比于等离子体的温度梯度. 但对一个实际的等离子体,其温度梯度和密度梯度总是同时存在的. 以磁约束

等离子体为例,在平衡时,有

$$\nabla p = \frac{1}{c}\boldsymbol{J} \times \boldsymbol{B}.$$

当无磁场或只有无力磁场时(也就是现在处理的这个问题),平衡条件就成了

$$\nabla p = 0, \quad \Rightarrow \quad T\nabla n = -n\nabla T.$$

故在本问题中,取

$$\nabla T(\boldsymbol{r}) \neq 0, \quad \nabla n(\boldsymbol{r}) = -\frac{n(\boldsymbol{r})}{T(\boldsymbol{r})}\nabla T(\boldsymbol{r}) \neq 0, \quad \nabla \cdot \boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}) = 0.$$

而相应的平衡分布函数为

$$f_0 = n(\boldsymbol{r})\left(\frac{m}{2\pi T(\boldsymbol{r})}\right)^{3/2}\exp\left[-\frac{mv^2}{2T(\boldsymbol{r})}\right].$$

线性方程的解为

$$\hat{f} = -\frac{1}{\nu}\left[\left(\frac{mv^2}{2T^2} - \frac{3}{2T}\right)\nabla T(\boldsymbol{r}) + \frac{\nabla n(\boldsymbol{r})}{n(\boldsymbol{r})}\right]\cdot \boldsymbol{v} f_0.$$

代入热流的定义式后,得

$$\boldsymbol{q} = -\frac{1}{\nu}\left[\left(\frac{m^2}{4T^2}\int v^4 \boldsymbol{vv} f_0 \mathrm{d}\boldsymbol{v} - \frac{3m}{4T}\int v^2 \boldsymbol{vv} f_0 \mathrm{d}\boldsymbol{v}\right)\cdot \nabla T + \frac{m}{2n}\int v^2 \boldsymbol{vv} f_0 \mathrm{d}\boldsymbol{v} \cdot \nabla n\right].$$

下面以 q_x 为例来进行计算. 取 $v_x^2 = v^2/3$,并利用

$$\int_0^\infty v^6 \mathrm{e}^{-\frac{m}{2T}v^2}\mathrm{d}v = \frac{15}{16\pi}\left(\frac{2\pi T}{m}\right)^{3/2}\left(\frac{2T}{m}\right)^2,$$

$$\int_0^\infty v^8 \mathrm{e}^{-\frac{m}{2T}v^2}\mathrm{d}v = \frac{105}{32\pi}\left(\frac{2\pi T}{m}\right)^{3/2}\left(\frac{2T}{m}\right)^3,$$

可得

$$q_x = -\frac{5nT}{m\nu}\frac{\partial T}{\partial x} - \frac{5}{2}\frac{T^2}{m\nu}\frac{\partial n}{\partial x}$$
$$= -\kappa'\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{5}{2}\Gamma_x T,$$

其中用到了

$$\Gamma_x = -D_x\frac{\partial n}{\partial x} = -\frac{T}{m\nu}\frac{\partial n}{\partial x}.$$

如果再代入前面给出的 $\nabla_x n = -(n/T)\nabla_x T$,最后就得到热流

$$q_x = \left(-\frac{5nT}{m\nu} + \frac{5}{2}\frac{nT}{m\nu}\right)\frac{\partial T}{\partial x} = -\kappa\frac{\partial T}{\partial x}, \tag{16.14}$$

以及相对应的热导系数

$$\kappa = \frac{5}{2}\frac{nT}{m\nu}. \tag{16.15}$$

这是用最简单的(弛豫时间近似)碰撞项算出的经典热导值. Braginskii 通过解朗道方程得到的电子与离子的平行(无)磁场时的热导系数(详见下一小节)是

$$\kappa_\parallel^{\mathrm{e}} = 3.16\frac{n_{\mathrm{e}}T_{\mathrm{e}}}{m_{\mathrm{e}}\nu_{\mathrm{e}}}, \quad \kappa_\parallel^{\mathrm{i}} = 3.91\frac{n_{\mathrm{i}}T_{\mathrm{i}}}{m_{\mathrm{i}}\nu_{\mathrm{i}}}. \tag{16.16}$$

而 V. E. 戈兰特等著的《等离子体物理基础》[3]中通过解动理学方程给出的高电离态下的热导系数则为(见书中(7.161)、(7.162)式)

$$\kappa_\parallel^{\mathrm{e}} = 1.35\frac{n_{\mathrm{e}}T_{\mathrm{e}}}{m_{\mathrm{e}}\nu_{\mathrm{e}}}, \quad \kappa_\parallel^{\mathrm{i}} = 3.9\frac{n_{\mathrm{i}}T_{\mathrm{i}}}{m_{\mathrm{i}}\nu_{\mathrm{i}}}. \tag{16.17}$$

由此可见,用简、繁程度不同的碰撞项所求出的经典热导值只相差一个不到一倍的数值因子.

5. 垂直磁场方向的输运系数

下面以粒子流为例说明求垂直于磁场的输运流及其系数的方法. 令有 $\boldsymbol{e}_z$ 方向上的均匀外磁场,而密度梯度在垂直于磁场的 $\boldsymbol{e}_x$ 方向,

$$\boldsymbol{B}_0 = B_0\boldsymbol{e}_z, \quad \nabla n(\boldsymbol{r}) = \frac{\partial n(x)}{\partial x}.$$

平衡的分布函数为

$$f_0 = n(x)\left(\frac{m}{2\pi T}\right)^{3/2}\mathrm{e}^{-\frac{mv^2}{2T}}.$$

线性化的静态方程为

$$\boldsymbol{v}\cdot\frac{\partial f_0}{\partial \boldsymbol{r}}+\frac{e}{mc}(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}_0)\cdot\frac{\partial \hat{f}}{\partial \boldsymbol{v}}=-\nu\hat{f},$$

$$\frac{v_x}{n}\frac{\partial n}{\partial x}f_0-\omega_c v_x\frac{\partial \hat{f}}{\partial v_y}+\omega_c v_y\frac{\partial \hat{f}}{\partial v_x}=-\nu\hat{f}.$$

由上式可得粒子流 $\Gamma_x=\int v_x\hat{f}\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}$ (一阶矩)满足的方程

$$\frac{T}{m}\frac{\partial n}{\partial x}-\omega_c\int v_x^2\frac{\partial \hat{f}}{\partial v_y}\mathrm{d}\boldsymbol{v}+\omega_c\int v_x v_y\frac{\partial \hat{f}}{\partial v_x}\mathrm{d}\boldsymbol{v}=-\nu\int v_x\hat{f}\,\mathrm{d}\boldsymbol{v},$$

$$\frac{T}{m}\frac{\partial n}{\partial x}-\omega_c\Gamma_y=-\nu\Gamma_x.$$

同理,可以得到粒子流 $\Gamma_y=\int v_y\hat{f}\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}$ 的方程

$$\omega_c\Gamma_x=-\nu\Gamma_y.$$

这两个方程联立求解后,可得

$$\Gamma_x=-D_\perp\frac{\partial n(x)}{\partial x},$$

$$D_\perp=\frac{1}{1+\omega_c^2/\nu^2}\frac{T}{m\nu}=\frac{1}{1+\omega_c^2\tau^2}D_\parallel,\qquad(16.18)$$

其中 $\tau=1/\nu$ 是平均碰撞时间,而 $D_\parallel$ 就是无磁场或平行磁场的扩散系数.

在 $\boldsymbol{e}_y$ 方向的粒子流则是

$$\Gamma_y\equiv\Gamma_H=-\frac{\omega_c}{\nu}\Gamma_x=D_H\frac{\partial n(x)}{\partial x}.\qquad(16.19)$$

这显然就是逆磁粒子漂移流(请参见《等离子体物理原理》[4],187页),其中的 D_H 是漂移扩散系数

$$D_H=\frac{\omega_c\tau}{1+\omega_c^2\tau^2}D_\parallel.\qquad(16.20)$$

严格说来 Γ_H 并不是输运过程,它是非耗散的漂移过程,并不会引起系统的熵改变.虽然如此,由于它总是和其他输运流同时出现在输运方程组中,所以通常和另两个输运流放在一起讨论.在强磁场极限下这两个垂直方向的扩散系数分别近似成

$$D_\perp\approx\frac{1}{\omega_c^2\tau^2}D_\parallel,\quad D_H\approx\frac{1}{\omega_c\tau}D_\parallel,\quad D_\parallel=\frac{T}{m\nu}.$$

其他的垂直输运系数也可以用上面介绍的方法得出.一般来说,在均匀磁场中等离子体的所有的输运系数(流)都可以分成三类:无磁场或平行磁场方向上的系数 $\tilde{\omega}_\parallel$(流),垂直磁场方向上的系数 $\tilde{\omega}_\perp$(流),漂移系数 $\tilde{\omega}_H$(流).而且它们之间存在以下的关系

$$\tilde{\omega}_\perp=\frac{1}{1+\omega_c^2\tau^2}\tilde{\omega}_\parallel,\quad\tilde{\omega}_H=\frac{\omega_c\tau}{1+\omega_c^2\tau^2}\tilde{\omega}_\parallel,\quad\tau=\frac{1}{\nu}.\qquad(16.21)$$

上式中的 $\tilde{\omega}$ 分别代表各种不同的输运系数,这些系数之间存在以下的定性关系(在定量上可能有量级为 1 的数值因子的差别)

$$\mu_\parallel=\frac{e}{T}D_\parallel,\quad\sigma_\parallel=\frac{ne^2}{T}D_\parallel,\quad\kappa_\parallel=nD_\parallel,\quad\zeta_\parallel=nmD_\parallel.$$

更精确的各种输运流及相应系数,将在下面给出.

16.1.2 福克尔-普朗克方程法结果简介

这里列出了 Braginskii 通过解带朗道碰撞项的动理学方程而得出的等离子体输运流和输运系数.所描述的等离子体要满足以下条件:

(i) 等离子体在各个方向上无限伸展,满足无穷远边界条件.因此可以用平板几何模型来描述.

(ii) 等离子体处在均匀的外磁场中.

(iii) 带电粒子系是由电子和一种荷电量为 Z 的离子组成的经典、准中性($n=n_e=Zn_i$)、完全电离的等离子体,Braginskii 将它称作简单等离子体.

本节基本上采用原文的符号,但有的地方为了和本书通用的符号一致,或者为了表述得更清楚,作了一些改变.在重要的修改处,都会明确地指出.详细的推导及讨论请参考原文[2].

1. 输运方程

连续性(粒子数守恒)方程

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \nabla \cdot (n_e \boldsymbol{V}_e) = 0, \tag{16.22}$$

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \nabla \cdot (n_i \boldsymbol{V}_i) = 0. \tag{16.23}$$

其中 $\boldsymbol{V}_{e,i}$分别是电子系和离子系的流体(平均)速度.

运动(动量平衡)方程

$$m_e n_e \frac{d_e \boldsymbol{V}_e}{dt} = -\nabla p_e - \nabla \cdot \overset{\Rightarrow}{\Pi}_e - e n_e \left(\boldsymbol{E} + \frac{1}{c} \boldsymbol{V}_e \times \boldsymbol{B} \right) + \boldsymbol{R}, \tag{16.24}$$

$$m_i n_i \frac{d_i \boldsymbol{V}_i}{dt} = -\nabla p_i - \nabla \cdot \overset{\Rightarrow}{\Pi}_i + Z e n_i \left(\boldsymbol{E} + \frac{1}{c} \boldsymbol{V}_i \times \boldsymbol{B} \right) - \boldsymbol{R}. \tag{16.25}$$

其中 $\boldsymbol{R}$ 是离子给电子的摩擦力,$\overset{\Rightarrow}{\Pi}$是黏性张量,它们满足的输运定律(及相应的输运系数)将在后面给出.

热(能量)平衡方程

$$\frac{3}{2} n_e \frac{d_e T_e}{dt} + p_e \nabla \cdot \boldsymbol{V}_e = -\nabla \cdot \boldsymbol{q}_e - \overset{\Rightarrow}{\Pi}_e : \nabla \boldsymbol{V}_e + Q_e, \tag{16.26}$$

$$\frac{3}{2} n_i \frac{d_i T_i}{dt} + p_i \nabla \cdot \boldsymbol{V}_i = -\nabla \cdot \boldsymbol{q}_i - \overset{\Rightarrow}{\Pi}_i : \nabla \boldsymbol{V}_i + Q_i. \tag{16.27}$$

其中用到了理想气体的状态方程

$$p_e = n_e T_e, \quad p_i = n_i T_i,$$

及欧拉(随体)导数(substantive derivative)符号

$$\frac{d_e}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\boldsymbol{V}_e \cdot \nabla), \quad \frac{d_i}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\boldsymbol{V}_i \cdot \nabla). \tag{16.28}$$

上面的输运方程中含有四个未知量:摩擦力、热源、黏性张量和热流.其中电子系受到的来自离子系的摩擦力(离子系受到的是它的反作用力,只是方向相反,不用另外定义)为

$$\boldsymbol{R} = \int m_e (\boldsymbol{v} - \boldsymbol{V}_e) \left(\frac{\partial f_e}{\partial t} \right)_c d\boldsymbol{v}, \tag{16.29}$$

其中$(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{V}_e) = \boldsymbol{w}_e$ 是电子的热(无规)速度.

热源定义成(下面表达式中在不会引起误解时,均略去了表示粒子种类的下标)

$$Q = \int \frac{1}{2} m w^2 \left(\frac{\partial f_e}{\partial t} \right)_c d\boldsymbol{v}. \tag{16.30}$$

这两个量($\boldsymbol{R}$ 和 Q)都直接取决于碰撞算子.对于弹性碰撞引起的集体输运,由于总体系(包括了经受碰撞的所有粒子系在内的总系统)动量与能量守恒,有

$$\begin{aligned} \boldsymbol{R} &\equiv \boldsymbol{R}_{ei} = -\boldsymbol{R}_{ie}, \\ Q_e + Q_i &= -\boldsymbol{R} \cdot (\boldsymbol{V}_e - \boldsymbol{V}_i) = -\boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{u}, \end{aligned} \tag{16.31}$$

其中 $\boldsymbol{u}$ 是电子系和离子系间的相对速度.离子热源项比较简单,它只来自和电子碰撞时转移过来的热量

$$Q_i = \frac{3m_e}{m_i} \frac{n_e}{\tau_e} (T_e - T_i), \tag{16.32}$$

其中 $2m_e/(m_i \tau_e) = 1/\tau_{ie}^T$,就是离子和电子间的热能交换频率(见本章开始的讨论,或《等离子体物理原理》[4],166—168 页).上式中的 τ_e 就是有名的 Braginskii 电子-离子碰撞时间

$$\tau_e = \frac{3\sqrt{m_e} T_e^{3/2}}{4\sqrt{2\pi} n_i Z^2 e^4 \lambda}, \tag{16.33}$$

其中 λ 是库仑对数(通常用 $\ln\Lambda$ 表示).它的取值为

$$\lambda = \begin{cases} 23.4 - 1.15\ln n_e + 3.45\ln T_e, & \text{当 } T_e < 50\,\text{eV}, \quad (16.34) \\ 25.3 - 1.15\ln n_e + 2.3\ln T_e, & \text{当 } T_e > 50\,\text{eV}. \quad (16.35) \end{cases}$$

$\boldsymbol{R}$ 和下面的两个量 $\overset{\Rightarrow}{\Pi}$,$\boldsymbol{q}$ 都比较复杂,将在本节后面详细列出.

黏性张量是总压强张量的一部分

$$\begin{aligned} \overset{\Rightarrow}{P} &= \int m \boldsymbol{w}\boldsymbol{w} f d\boldsymbol{v} \equiv nm \langle \boldsymbol{w}\boldsymbol{w} \rangle \\ &= p \overset{\Rightarrow}{I} + \overset{\Rightarrow}{\Pi}. \end{aligned}$$

其中热压强(标量)与压强张量的迹(对角元素之和)相关

$$p = nm \frac{1}{3} \langle w^2 \rangle = nT.$$

而黏性张量是总压强张量中的剩余部分(包括非对角元素和对角元素中非球对称部分)

$$\overset{\Rightarrow}{\Pi} = nm\langle \boldsymbol{ww} - (w^2/3)\overset{\Rightarrow}{I}\rangle. \tag{16.36}$$

压强张量和黏性张量都是对称的二阶张量

$$P_{\alpha\beta} = P_{\beta\alpha}, \quad \Pi_{\alpha\beta} = \Pi_{\beta\alpha}.$$

故黏性张量一共有五个独立分量(三个非对角元素和两个对角元素).

热流定义成

$$\boldsymbol{q} = \int \frac{1}{2} m w^2 \boldsymbol{v} f \mathrm{d}\boldsymbol{v} = nm\langle \frac{1}{2} w^2 \boldsymbol{v} \rangle. \tag{16.37}$$

2. 输运流和输运系数

(1) 摩擦力

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}_u + \boldsymbol{R}_T. \tag{16.38}$$

其中 $\boldsymbol{R}_u$ 是由于电子系-离子系的相对速度 $\boldsymbol{u}=(\boldsymbol{V}_e-\boldsymbol{V}_i)$ 引起的摩擦力(这在线性输运理论中被称为对角输运流),而 $\boldsymbol{R}_T$ 则是由于电子温度梯度引起的热力(这在线性输运理论中被称为非对角输运流).

$$\boldsymbol{R}_u = -\frac{m_e n_e}{\tau_e}(\alpha_0 \boldsymbol{u}_\parallel + \alpha_\perp \boldsymbol{u}_\perp - \alpha_H \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{u}_\perp), \tag{16.39}$$

$$\boldsymbol{R}_T = -n_e(\beta_0 \nabla_\parallel T_e + \beta_\perp \nabla_\perp T_e + \beta_H \boldsymbol{b} \times \nabla_\perp T_e). \tag{16.40}$$

其中 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{B}/|\boldsymbol{B}|$ 是磁场方向的单位矢量,而 $\alpha_\perp,\alpha_H,\beta_\perp,\beta_H$ 等量与 Braginskii 所用的稍有不同:这里把原来定义中的有量纲的量抽了出来,放在括号外面,剩下的那些无量纲的系数分别是

$$\alpha_0 = 1-\frac{\alpha_0'}{\delta_0}, \quad \alpha_\perp = 1-\frac{\alpha_1' x_e^2 + \alpha_0'}{\Delta_e}, \quad \alpha_H = 1-\frac{x_e(\alpha_1'' x_e^2 + \alpha_0'')}{\Delta_e}, \tag{16.41}$$

$$\beta_0 = \frac{\beta_0'}{\delta_0}, \quad \beta_\perp = \frac{\beta_1' x_e^2 + \beta_0'}{\Delta_e}, \quad \beta_H = \frac{x_e(\beta_1'' x_e^2 + \beta_0'')}{\Delta_e}, \tag{16.42}$$

而其中

$$\Delta_e = x_e^4 + \delta_1 x_e^2 + \delta_0, \quad x_e = \omega_e \tau_e, \quad \omega_e = eB_0/(m_e c). \tag{16.43}$$

上式,以及下面的表达式中又涉及一些无量纲的量 $(\alpha_0',\alpha_0'',\alpha_1',\alpha_1'')$, $(\beta_0',\beta_0'',\beta_1',\beta_1'')$, $(\gamma_0',\gamma_0'',\gamma_1',\gamma_1'')$, (δ_0,δ_1),它们都是随离子荷电量 Z 而变的,这些数值列在表 16.1 中.

表 16.1 无量纲输运系数

	$Z=1$	$Z=2$	$Z=3$	$Z=4$	$Z\to\infty$
$\alpha_0=1-(\alpha_0'/\delta_0)$	0.5129	0.4408	0.3965	0.3752	0.2949
$\beta_0=\beta_0'/\delta_0$	0.7110	0.9052	1.016	1.090	1.521
$\gamma_0=\gamma_0'/\delta_0$	3.1616	4.890	6.064	6.920	12.471
δ_0	3.7703	1.0465	0.5814	0.4106	0.0961
δ_1	14.79	10.80	9.618	9.055	7.482
α_1'	6.416	5.523	5.226	5.077	4.63
α_0'	1.837	0.5956	0.3515	0.2566	0.0678
α_1''	1.704	1.704	1.704	1.704	1.704
α_0''	0.7796	0.3439	0.2400	0.1957	0.0940
β_1'	5.101	4.450	4.233	4.124	3.798
β_0'	2.681	0.9473	0.5905	0.4478	0.1461
β_1''	3/2	3/2	3/2	3/2	3/2
β_0''	3.053	1.784	1.442	1.285	0.877
γ_1'	4.664	3.957	3.721	3.604	3.25
γ_0'	11.92	5.118	3.525	2.841	1.20
γ_1''	5/2	5/2	5/2	5/2	5/2
γ_0''	21.67	15.37	13.53	12.65	10.23

(2) 电子热流

$$\boldsymbol{q}_e = \boldsymbol{q}_u^e + \boldsymbol{q}_T^e, \tag{16.44}$$

$$\boldsymbol{q}_u^e = n_e T_e(\beta_0 \boldsymbol{u}_\parallel + \beta_\perp \boldsymbol{u}_\perp + \beta_H \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{u}_\perp), \tag{16.45}$$

$$\boldsymbol{q}_T^e = -\kappa_\parallel^e \nabla_\parallel T_e - \kappa_\perp^e \nabla_\perp T_e - \kappa_H^e \boldsymbol{b} \times \nabla_\perp T_e \tag{16.46}$$

$$= -\frac{n_e T_e \tau_e}{m_e}(\gamma_0 \nabla_\parallel T_e + \gamma_\perp \nabla_\perp T_e + \gamma_H \boldsymbol{b} \times \nabla_\perp T_e). \tag{16.47}$$

其中 $\gamma_\perp,\gamma_H$ 也和 Braginskii 的表达式不一样，是经过无量纲化后的量，而

$$\gamma_0=\frac{\gamma_0'}{\delta_0},\quad \gamma_\perp=\frac{\gamma_1' x_e^2+\gamma_0'}{\Delta_e},\quad \gamma_H=\frac{x_e(\gamma_1'' x_e^2+\gamma_0'')}{\Delta_e}. \tag{16.48}$$

(3) 离子热流

$$\boldsymbol{q}_i=-\kappa_\parallel^i\nabla_\parallel T_i-\kappa_\perp^i\nabla_\perp T_i-\kappa_H^i\boldsymbol{b}\times\nabla_\perp T_i \tag{16.49}$$

$$=-\frac{n_iT_i\tau_i}{m_i}(\varepsilon_0\nabla_\parallel T_i+\varepsilon_\perp\nabla_\perp T_i-\varepsilon_H\boldsymbol{b}\times\nabla_\perp T_i), \tag{16.50}$$

$$\varepsilon_0=3.906,\quad \varepsilon_\perp=\frac{2x_i^2+2.645}{\Delta_i},\quad \varepsilon_H=\frac{x_i\left(\frac{5}{2}x_i^2+4.65\right)}{\Delta_i}, \tag{16.51}$$

其中 $\varepsilon_0,\varepsilon_\perp,\varepsilon_H$ 也是无量纲化后的量

$$\Delta_i=x_i^4+2.70x_i^2+0.677,\quad x_i=\omega_i\tau_i,\quad \omega_i=ZeB_0/(m_ic). \tag{16.52}$$

(4) 黏性张量

前面谈到过，二阶黏性张量最后剩下的独立分量只有五个，因此相应的牛顿黏性定律中也应该由五项组成，存在五个独立的黏性系数. 但为了理论计算的方便，这五个在输运定律中的二阶分量并不是原来(以磁场方向为 $\boldsymbol{e}_z$ 轴的)直角坐标中的无迹分量 $\vec{\vec{W}}$(下面是它们的分量明显表达式)，

$$W_{\alpha\beta}=\frac{\partial V_\alpha}{\partial x_\beta}+\frac{\partial V_\beta}{\partial x_\alpha}-\frac{2}{3}\delta_{\alpha\beta}\nabla\cdot\boldsymbol{V},\quad \alpha,\beta=x,y,z, \tag{16.53}$$

而是它们的线性组合 $\vec{\vec{W}}_k,k=0,1,\cdots,4$，(它们的具体表达式在下面将给出). 因此黏性定律最后表示成(对电子和离子都适用)

$$\vec{\vec{\Pi}}=-\eta_0\vec{\vec{W}}_0-\eta_1\vec{\vec{W}}_1-\eta_2\vec{\vec{W}}_2+\eta_3\vec{\vec{W}}_3+\eta_4\vec{\vec{W}}_4, \tag{16.54}$$

其中的黏性系数对离子或电子是不同的. 一般由于黏性涉及动量转移，因此离子黏性对整个体系的影响大大超过电子的贡献. 对离子来说其黏性系数是

$$\eta_0^i=0.96n_iT_i\tau_i, \tag{16.55}$$

$$\eta_2^i=n_iT_i\tau_i\frac{\frac{6}{5}x_i^2+2.23}{\Delta_i^\eta}, \tag{16.56}$$

$$\eta_4^i=n_iT_i\tau_i\frac{x_i(x_i^2+2.38)}{\Delta_i^\eta}, \tag{16.57}$$

$$\eta_1^i=\eta_2^i(2x_i),\quad \eta_3^i=\eta_4^i(2x_i), \tag{16.58}$$

而其中

$$\Delta_i^\eta=x_i^4+4.03x_i^2+2.33. \tag{16.59}$$

对电子，其黏性系数为

$$\eta_0^e=0.733n_eT_e\tau_e, \tag{16.60}$$

$$\eta_2^e=n_eT_e\tau_e\frac{2.05x_e^2+8.05}{\Delta_e^\eta}, \tag{16.61}$$

$$\eta_4^e=-n_eT_e\tau_e\frac{x_e(x_e^2+7.91)}{\Delta_i^\eta}, \tag{16.62}$$

$$\eta_1^e=\eta_2^e(2x_e),\quad \eta_3^e=\eta_4^e(2x_e), \tag{16.63}$$

而其中

$$\Delta_e^\eta=x_e^4+13.8x_e^2+11.6. \tag{16.64}$$

在输运方程中的新二阶张量是彼此正交的

$$W_{p\alpha\beta}W_{q\alpha\beta}\equiv\vec{\vec{W}}_p:\vec{\vec{W}}_q=0,\quad 当\ p\neq q. \tag{16.65}$$

并且有

$$\vec{\vec{W}}_0+\vec{\vec{W}}_1+\vec{\vec{W}}_2=\vec{\vec{W}}. \tag{16.66}$$

利用 $\vec{\vec{W}}$ 及磁场方向矢量 $\boldsymbol{b}=(0,0,1)$，张量 $\delta_{\alpha\beta}^\perp=\delta_{\alpha\beta}-b_\alpha b_\beta$($\vec{\vec{\delta}}^\perp=\vec{\vec{I}}-\boldsymbol{bb}$)和反对称张量 $\varepsilon_{\alpha\beta\delta}(\vec{\vec{\varepsilon}})$，可以把这五个新张量表示成

$$\overleftrightarrow{W}_0 = \frac{3}{2}\left(\boldsymbol{bb} - \frac{1}{3}\delta\overleftrightarrow{I}\right)\left(\boldsymbol{bb} - \frac{1}{3}\delta\overleftrightarrow{I}\right) : \overleftrightarrow{W}, \tag{16.67}$$

$$\overleftrightarrow{W}_1 = \overleftrightarrow{\delta}^{\perp}\cdot\overleftrightarrow{W}\cdot\overleftrightarrow{\delta}^{\perp} + \frac{1}{2}\overleftrightarrow{\delta}^{\perp}\,\boldsymbol{bb} : \overleftrightarrow{W}, \tag{16.68}$$

$$\overleftrightarrow{W}_2 = \overleftrightarrow{\delta}^{\perp}\cdot\overleftrightarrow{W}\cdot\boldsymbol{bb} + \boldsymbol{bb}\cdot\overleftrightarrow{W}\cdot\overleftrightarrow{\delta}^{\perp}, \tag{16.69}$$

$$\overleftrightarrow{W}_3 = \frac{1}{2}(\overleftrightarrow{\delta}^{\perp}\cdot\overleftrightarrow{W}\cdot\overleftrightarrow{\varepsilon}\cdot\boldsymbol{b} - \boldsymbol{b}\cdot\overleftrightarrow{\varepsilon}\cdot\overleftrightarrow{W}\cdot\overleftrightarrow{\delta}^{\perp}), \tag{16.70}$$

$$\overleftrightarrow{W}_4 = \boldsymbol{bb}\cdot\overleftrightarrow{W}\cdot\overleftrightarrow{\varepsilon}\cdot\boldsymbol{b} - \boldsymbol{b}\cdot\overleftrightarrow{\varepsilon}\cdot\overleftrightarrow{W}\cdot\boldsymbol{bb}. \tag{16.71}$$

这些量的矩阵表达式如下：

$$\boldsymbol{b} = (0,0,1), \tag{16.72}$$

$$\delta^{\perp}_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon_{\alpha\gamma\beta}b_\gamma = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{16.73}$$

$$W_{0\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(W_{xx}+W_{yy}) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(W_{xx}+W_{yy}) & 0 \\ 0 & 0 & W_{zz} \end{pmatrix},$$

$$(16.74)$$

$$W_{1\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(W_{xx}-W_{yy}) & W_{xy} & 0 \\ W_{yx} & \frac{1}{2}(W_{yy}-W_{xx}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$W_{2\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & W_{xz} \\ 0 & 0 & W_{yz} \\ W_{zx} & W_{zy} & 0 \end{pmatrix},$$

$$W_{3\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -W_{xy} & \frac{1}{2}(W_{xx}-W_{yy}) & 0 \\ \frac{1}{2}(W_{xx}-W_{yy}) & W_{xy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$W_{4\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -W_{yz} \\ 0 & 0 & W_{xz} \\ -W_{zy} & W_{zx} & 0 \end{pmatrix}.$$

3. $Z=1$ 的输运流和输运系数

上面给出的输运流和输运系数表达式是对任意荷电数 Z 的离子都适用的，比较复杂. 实际上人们常用的是 $Z=1$ 和强磁场 $(\omega_e\tau_e \gg 1)$ 下的输运流和输运系数，它们比较简单明了.

摩擦力

$$\boldsymbol{R}_u = -\frac{m_e n_e}{\tau_e}(0.51\boldsymbol{u}_\parallel + \boldsymbol{u}_\perp) = en\left(\frac{\boldsymbol{J}_\parallel}{\sigma_\parallel} + \frac{\boldsymbol{J}_\perp}{\sigma_\perp}\right). \tag{16.75}$$

平行电导和垂直电导分别定义为

$$\sigma_\perp = \frac{e^2 n_e \tau_e}{m_e} = \sigma_1 T_e^{3/2},$$

$$\sigma_\parallel = 1.96\sigma_\perp = 1.96\sigma_1 T_e^{3/2},$$

$$\sigma_1 = \frac{e^2 n_e \tau_e}{m_e T_e^{3/2}} = \frac{0.9\times 10^{13}}{(\lambda/10)Z}\ (\mathrm{s^{-1}\cdot eV^{-3/2}}).$$

热力

$$\boldsymbol{R}_T = -0.71 n_e \nabla_\parallel T_e - \frac{3}{2}\frac{n_e}{\omega_e\tau_e}\boldsymbol{b}\times\nabla T_e. \tag{16.76}$$

电子热流

$$\boldsymbol{q}_u^e = 0.71 n_e T_e \boldsymbol{u}_\parallel + \frac{3}{2}\frac{n_e T_e}{\omega_e\tau_e}\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{u}, \tag{16.77}$$

$$\boldsymbol{q}_T^e = -\kappa_\parallel^e \nabla_\parallel T_e - \kappa_\perp^e \nabla_\perp T_e - \frac{5}{2}\frac{c n_e T_e}{eB}\boldsymbol{b}\times\nabla T_e.$$

$$(16.78)$$

其中的电子热导为

$$\kappa_{\parallel}^{e} = 3.16\frac{n_e T_e \tau_e}{m_e}, \quad \kappa_{\perp}^{e} = 4.66\frac{n_e T_e}{m_e \omega_e^2 \tau_e}. \tag{16.79}$$

当 $\omega_i \tau_i \gg 1$ 时，离子的热流为

$$\boldsymbol{q}_i = -\kappa_{\parallel}^{i} \nabla_{\parallel} T_i - \kappa_{\perp}^{i} \nabla_{\perp} T_i + \frac{5}{2}\frac{c n_i T_i}{ZeB}\boldsymbol{b} \times \nabla T_i. \tag{16.80}$$

而其中的离子热导为

$$\kappa_{\parallel}^{i} = 3.9\frac{n_i T_i \tau_i}{m_i}, \quad \kappa_{\perp}^{e} = 2\frac{n_i T_i}{m_i \omega_i^2 \tau_i}. \tag{16.81}$$

离子系通过碰撞从电子系得到的热量，见(16.32)式，为

$$Q_i \equiv Q = \frac{3m_e}{m_i}\frac{n_e}{\tau_e}(T_e - T_i).$$

而电子系通过碰撞从离子系得到的热量，见(16.31)式，为

$$Q_e = -\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{u} - Q_i$$
$$= \frac{J_{\parallel}^2}{\sigma_{\parallel}} + \frac{J_{\perp}^2}{\sigma_{\perp}} + \frac{1}{en_e}\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{R}_T - \frac{3m_e}{m_i}\frac{n_e}{\tau_e}(T_e - T_i). \tag{16.82}$$

无磁场时，黏性定律为

$$\Pi_{\alpha\beta} = -\eta_0 W_{\alpha\beta}. \tag{16.83}$$

在强磁场($\omega\tau \gg 1$)下，如令磁场方向平行直角坐标系的 z 轴，则黏性定律为(已略去表示粒子种类的下标)

$$\Pi_{zz} = -\eta_0 W_{zz}, \tag{16.84}$$

$$\Pi_{xx} = -\eta_0\frac{1}{2}(W_{xx} + W_{yy}) - \eta_1\frac{1}{2}(W_{xx} - W_{yy}) - \eta_3 W_{xy}, \tag{16.85}$$

$$\Pi_{yy} = -\eta_0\frac{1}{2}(W_{xx} + W_{yy}) - \eta_1\frac{1}{2}(W_{yy} - W_{xx}) + \eta_3 W_{xy}, \tag{16.86}$$

$$\Pi_{xy} = \Pi_{yx} = -\eta_1 W_{xy} + \eta_3\frac{1}{2}(W_{xx} - W_{yy}), \tag{16.87}$$

$$\Pi_{xz} = \Pi_{zx} = -\eta_2 W_{xz} - \eta_4 W_{yz}, \tag{16.88}$$

$$\Pi_{yz} = \Pi_{zy} = -\eta_2 W_{yz} + \eta_4 W_{xz}. \tag{16.89}$$

对离子来说，黏性系数为

$$\eta_0^i = 0.96 n_i T_i \tau_i, \tag{16.90}$$

$$\eta_1^i = \frac{3}{10}\frac{n_i T_i}{\omega_i^2 \tau_i}, \quad \eta_2^i = 4\eta_1^i, \tag{16.91}$$

$$\eta_3^i = \frac{1}{2}\frac{n_i T_i}{\omega_i}, \quad \eta_4^i = 2\eta_3^i. \tag{16.92}$$

而电子的黏性系数则为

$$\eta_0^e = 0.73 n_e T_e \tau_e, \tag{16.93}$$

$$\eta_1^e = 0.51\frac{n_e T_e}{\omega_e^2 \tau_e}, \quad \eta_2^e = 4\eta_1^e, \tag{16.94}$$

$$\eta_3^e = \frac{1}{2}\frac{n_e T_e}{\omega_e}, \quad \eta_4^e = 2\eta_3^e. \tag{16.95}$$

16.2 柱形磁化等离子体中的经典输运

在实验室中产生的等离子体往往是柱形的. 磁约束聚变装置 tokamak 中的等离子体是环形的，但在许多解析分析中常把它当成是柱形的(柱轴方向平行于磁场方向). 这些柱形等离子体在柱轴方向上的尺度往往比径向尺度大得多，可以当成是无界的，但在径向却是有界的. 这时 Bragingskii 的表达式就不合适了，应当代之以柱形几何下的表达式. 下面给出的是大家比较公认的，从带福克尔-普朗克碰撞项的动理学方程导出输运方程、输运流及输运系数的方法. 有兴趣的可参考文献[5].

16.2.1 动理学方程及其微扰分级

令

$$\boldsymbol{B} = B_0 \boldsymbol{e}_z, \quad \boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0, \quad n_a = n_a(r), \quad T_a = T(r), \quad \boldsymbol{u}_0 = 0.$$

出发的动力学方程是

$$\frac{\partial f_a}{\partial t}+\boldsymbol{v}\cdot\nabla f_a+\frac{e_a}{m_a}\left(\boldsymbol{E}_0+\frac{1}{c}\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}_0\right)\cdot\frac{\partial f_a}{\partial\boldsymbol{v}}=\sum_b C_{ab},\quad a,b=\mathrm{e},\mathrm{i}. \tag{16.96}$$

其中方程右面是碰撞项,这里将取带有 Rosenbluth 势的福克尔-普朗克碰撞算子.

在本问题中,假定特征时间和特征长度间有以下的数量级关系.

(1) 特征长度

这里所用到的特征长度有:平均碰撞自由程 λ,回旋半径 ρ_c,以及空间不均匀的特征长度

$$l_{\parallel}=\left(\frac{1}{n}\frac{\partial n}{\partial z}\right)^{-1}\sim\infty,\quad l_{\perp}=\left(\frac{1}{n}\frac{\partial n}{\partial r}\right)^{-1}\sim a,$$

其中 a 是柱的半径.它们之间有数量级关系

$$\frac{\lambda}{l_{\parallel}}\ll 1,\quad \frac{\rho_c}{l_{\perp}}\ll 1.$$

以 tokamak 为例,$\lambda_e\sim10^4\,\mathrm{cm}$, $l_{\perp}\sim a\sim10^2\,\mathrm{cm}$, $\rho_{ce}\ll\rho_{ci}\sim1\,\mathrm{cm}$,故可把它们的比值

$$\frac{\rho}{l_{\perp}}\sim10^{-2}=\varepsilon\ll1$$

当作微扰展开的一级小量.

(2) 特征时间

本问题中特征时间有:碰撞时间 τ_c,回旋频率 $\Omega_a=e_aB_0/(m_ac)$.在常见的实验室等离子体中,一般有

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)(\Omega_a)^{-1}\sim(\tau_c\Omega_a)^{-1}\sim\varepsilon^2\ll1.$$

例如在 tokamak 中,$\tau_e\sim10^{-4}$—$10^{-5}\,\mathrm{s}$,$\Omega_e\sim10^{10}$—$10^{11}\,\mathrm{s}^{-1}\Rightarrow(\tau_e\Omega_e)\sim10^5$—$10^7$,而 $\tau_i\sim10^{-3}\,\mathrm{s}$, $\Omega_i\sim10^7$—$10^8\,\mathrm{s}^{-1}\Rightarrow(\tau_e\Omega_e)\sim10^4$—$10^5$.因此在微扰展开中,这两种时间的比值是当成二级小量来处理的.

在上面的量级划分下,再假定与外磁场相比,外电场是一级小量,则动理学方程的左面各项(不包括分布函数)可依次定为:二级小量,一级小量,一级小量,零级量;而右面的碰撞项则依分布函数的分级 $f_a=f_{a0}+f_{a1}+f_{a2}$ 而有一级小量、二级小量,等等.

这样,在微扰分级中取 B_0,f_{a0} 为零级量,就可得零级的动理学方程

$$\frac{e_a}{m_a}\frac{1}{c}\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}_0\cdot\frac{\partial f_{a0}}{\partial\boldsymbol{v}}=\sum_b C_{ab}(f_{a0},f_{b0})\equiv0. \tag{16.97}$$

最后的恒等式是利用了体系在热平衡态时碰撞项为零.因此上面方程的解即是(局部)热平衡态的速度分布函数

$$f_{a0}=f_{aM}=\frac{n_a(r)}{\pi^{3/2}v_a^3(r)}\exp\left[-\frac{v^2}{v_a^2(r)}\right],\quad v_a^2(r)=\frac{2T(r)}{m_a}. \tag{16.98}$$

一级动理学方程是

$$\left[\boldsymbol{v}\cdot\left(\frac{\nabla p_a}{p_a}-\frac{e_a}{T}\boldsymbol{E}\right)+\left(\frac{v^2}{v_a^2}-\frac{5}{2}\right)\frac{\boldsymbol{v}\cdot\nabla T}{T}\right]f_{a0}+\Omega_a\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{b}\cdot\frac{\partial f_{a1}}{\partial\boldsymbol{v}}=\sum_b C_{ab}^{(1)}. \tag{16.99}$$

其中一级碰撞项是

$$C_{ab}^{(1)}=C_{ab}(f_{a1},f_{b0})+C_{ab}(f_{a0},f_{b1}). \tag{16.100}$$

二级动理学方程是

$$\frac{\partial f_{a0}}{\partial t}+\boldsymbol{v}\cdot\nabla f_{a1}+\frac{e_a}{m_a}\boldsymbol{E}\cdot\frac{\partial f_{a1}}{\partial\boldsymbol{v}}+\Omega_a\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{b}\cdot\frac{\partial f_{a2}}{\partial\boldsymbol{v}}=\sum_b C_{ab}^{(2)}. \tag{16.101}$$

其中二级的碰撞项为

$$C_{ab}^{(2)}=C_{ab}(f_{a2},f_{b0})+C_{ab}(f_{a1},f_{b1})+C_{ab}(f_{a0},f_{b2}). \tag{16.102}$$

可以看到,在微扰展开的零级和一级动力学方程都是静态的,只有在微扰展开的第二级,它才是(慢变的)时间依赖的.在下面可以发现这个时间慢变方程的矩方程组就是通常所说的输运方程.

16.2.2 垂直于磁场方向的输运流——一级微扰方程的矩方程

定义输运流(粒子流和热流):

$$n_a \boldsymbol{u}_a = \int \boldsymbol{v} f_a(\boldsymbol{v}) \mathrm{d}\boldsymbol{v}, \tag{16.103}$$

$$\boldsymbol{q}_a = \int \frac{1}{2} m_a (\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}_a)^2 (\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}_a) f_a(\boldsymbol{v}) \mathrm{d}\boldsymbol{v}. \tag{16.104}$$

它们的零级量(用 f_{a0}代入)为

$$\boldsymbol{u}_{a0} = 0, \quad \boldsymbol{q}_{a0} = 0,$$

也即处在热力学平衡态的体系无输运过程.

一级的粒子流(用 f_{a1}代入)满足(对一级动理学方程求一阶矩后的)方程

$$\frac{n_a e_a}{c} \boldsymbol{u}_{a1} \times \boldsymbol{B} - \nabla p_a + n_a e_a \boldsymbol{E} = \sum_{b \neq a} \boldsymbol{F}_{ab}, \tag{16.105}$$

对上式两边同叉乘 $\boldsymbol{B}$,得

$$n_a \boldsymbol{u}_{a\perp} = n_a \frac{c}{B^2} \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B} + \frac{c}{e_a B^2} \boldsymbol{B} \times \nabla p_a - \frac{c}{e_a B^2} \boldsymbol{B} \times \sum_{b \neq a} \boldsymbol{F}_{ab}, \tag{16.106}$$

其中 a 种粒子系所受到的来自 b 种粒子系的摩擦力为

$$\boldsymbol{F}_{ab} = \int m_a \boldsymbol{v} \left[C_{ab}(f_{a1}, f_{b0}) + C_{ab}(f_{a0}, f_{b1}) \right] \mathrm{d}\boldsymbol{v}. \tag{16.107}$$

无论从线性碰撞算子的具体表达式,还是从物理上来看,都容易发现 $\boldsymbol{F}_{aa} = \boldsymbol{F}_{bb} = 0$,也即同种粒子间的弹性碰撞保持该粒子系的动量不变. 如果进一步将上式对所有粒子种类求和,则可得力平衡方程

$$\frac{1}{c} \sum_a (n_a e_a \boldsymbol{u}_{a1}) \times \boldsymbol{B} - \nabla \sum_a p_a + \left(\sum_a n_a e_a \right) \acute{\boldsymbol{E}} = \sum_a \sum_{b \neq a} \boldsymbol{F}_{ab}.$$

然后利用电荷准中性条件及体系总电流、总压强的定义,可得

$$\frac{1}{c} \boldsymbol{J} \times \boldsymbol{B} - \nabla p = \sum_a \sum_{b \neq a} \boldsymbol{F}_{ab}.$$

再利用磁流体平衡条件 $\boldsymbol{J} \times \boldsymbol{B}/c = \nabla p$,可得作用力等于反作用力

$$\boldsymbol{F}_{ab} = -\boldsymbol{F}_{ba}, \tag{16.108}$$

其中已用到了同种粒子间的总摩擦力为零的推论. 通常将垂直(于磁场方向的)粒子流分成两部分

$$n_a \boldsymbol{u}_{a\perp} = n_a \boldsymbol{u}_{a\perp}^{(0)} + n_a \boldsymbol{u}_{a\perp}^{(1)}. \tag{16.109}$$

第一部分代表由于漂移(既垂直于磁场又垂直于外电场或等离子体不均匀参量的梯度方向)运动而造成的粒子流(严格说它是非耗散的保持熵不变的寻常流)

$$n_a \boldsymbol{u}_{a\perp}^{(0)} = n_a \frac{c}{B^2} \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B} + \frac{c}{e_a B^2} \boldsymbol{B} \times \nabla p_a. \tag{16.110}$$

这个流虽然沿等势面或等密度面流动,一般不会使粒子横跨磁面而逃逸,但它能激发起各种不稳定的漂移波,从而造成非经典(反常)的输运过程. 垂直粒子流的第二部分是真正由碰撞引起的经典粒子流

$$n_a \boldsymbol{u}_{a\perp}^{(1)} = -\frac{c}{e_a B^2} \boldsymbol{B} \times \sum_{b \neq a} \boldsymbol{F}_{ab}. \tag{16.111}$$

同样热流也可以用上面描述的方法(即先从一级动理学方程求对应于热流的矩方程,然后反解这个代数方程而得出热流)得到

$$\boldsymbol{q}_{a\perp} = \boldsymbol{q}_{a\perp}^{(0)} + \boldsymbol{q}_{a\perp}^{(1)}, \tag{16.112}$$

$$\boldsymbol{q}_{a\perp}^{(0)} = \frac{5}{2} \frac{c p_a}{e_a B^2} \boldsymbol{B} \times \nabla T_a, \tag{16.113}$$

$$\boldsymbol{q}_{a\perp}^{(1)} = \frac{c T_a}{e_a B^2} \sum_{b \neq a} \boldsymbol{G}_{ab} \times \boldsymbol{B}, \tag{16.114}$$

其中所分的两部分和两类粒子流有相似的物理意义. 而

$$\boldsymbol{G}_{ab} = \int \left(\frac{v^2}{v_a^2} - \frac{5}{2} \right) m_a \boldsymbol{v} \left[C_{ab}(f_{a1}, f_{b0}) + C_{ab}(f_{a0}, f_{b1}) \right]. \tag{16.115}$$

上面虽然已经给出了粒子流和热流的表达式,但其中碰撞流的具体形式仍取决于现在尚未求出的微扰一级的速度分布函数.

因此,下一小节就来从一级动理学方程求解这个分布函数.

16.2.3 一级扰动分布函数的求解

令

$$f_{a1}=\overline{f_{a1}}+\tilde{f}_{a1},$$

其中

$$\overline{f_{a1}}\equiv\oint\frac{\mathrm{d}\varphi}{2\pi}f_{a1},\quad \oint\frac{\mathrm{d}\varphi}{2\pi}\tilde{f}_{a1}=0.$$

上面的 φ 是速度空间柱坐标系(图 16.1)中的角变量,粒子速度这

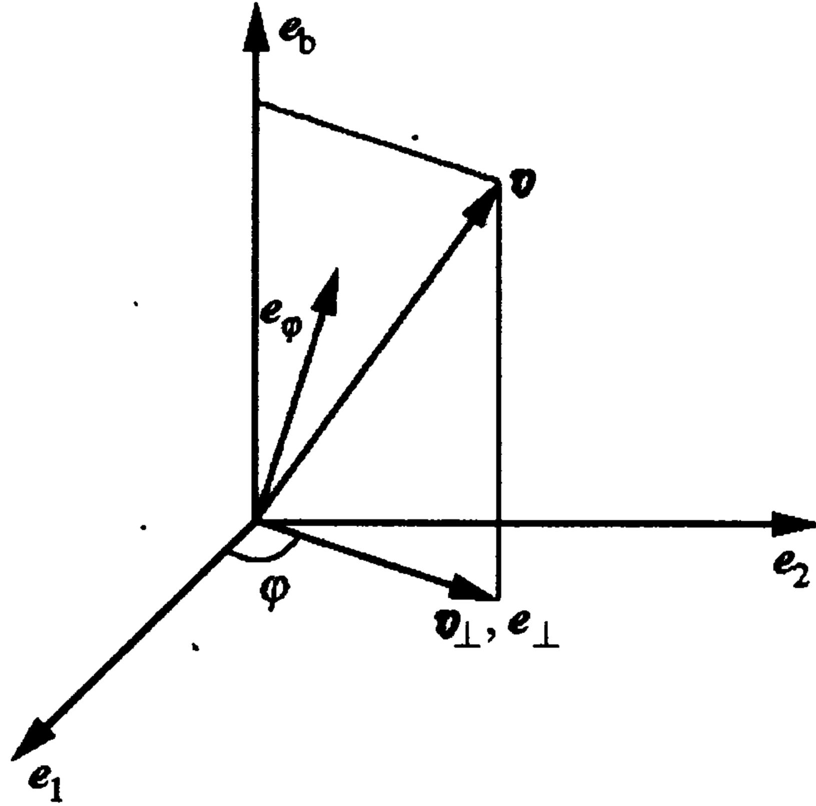


图 16.1 速度空间坐标图

时可以表示成(用对称轴平行于磁场方向的两种坐标系)

$$\boldsymbol{v}=\begin{cases}v_\parallel \boldsymbol{e}_b+v_\perp(\cos\varphi\boldsymbol{e}_1+\sin\varphi\boldsymbol{e}_2) & (\boldsymbol{e}_\parallel,\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2),\\ v_\parallel \boldsymbol{e}_b+\boldsymbol{v}_\perp & (\boldsymbol{e}_\parallel,\boldsymbol{e}_\perp,\boldsymbol{e}_\varphi).\end{cases}$$

下面将分别导出 $\overline{f_{a1}}$ 和 $\tilde{f}_{a1}$ 所满足的动理方程. 为此,先将一级微扰的动理学方程对粒子的回旋角作平均,得出 $\overline{f_{a1}}$ 所满足的方程. 在推导这个方程时,方程(16.99)第一项中的

$$\boldsymbol{v}\cdot\nabla=v_\parallel\nabla_\parallel+\boldsymbol{v}_\perp\cdot\nabla=v_\parallel\nabla_\parallel+v_\perp\cos\varphi\frac{\partial}{\partial x_1}+v_\perp\sin\varphi\frac{\partial}{\partial x_2}.$$

但由于

$$\oint\frac{\mathrm{d}\varphi}{2\pi}\sin\varphi=\oint\frac{\mathrm{d}\varphi}{2\pi}\cos\varphi=0,$$

故只剩下 $v_\parallel\nabla_\parallel$. 而方程(16.99)第二项中的

$$\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{e}_b=(v_\parallel\boldsymbol{e}_\parallel+\boldsymbol{v}_\perp)\times\boldsymbol{e}_\parallel=v_\perp\boldsymbol{e}_\varphi,$$

由于有

$$\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{v}}=\boldsymbol{v}\frac{\partial}{\partial\varepsilon}+\frac{\boldsymbol{v}_\perp}{B_0}\frac{\partial}{\partial\mu}+\frac{\boldsymbol{e}_\varphi}{v_\perp}\frac{\partial}{\partial\varphi},$$

故有

$$\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{e}_b\cdot\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{v}}=\frac{\partial}{\partial\varphi}.$$

于是这项在对回旋角作平均后,由于周期性条件而为零. 在碰撞算子中,由于 f_{a1} 是以线性形式出现的,故对回旋角平均就直接得到 $\overline{f_{a1}}$. 最后,可以得到

$$\sum_b[C_{ab}(\overline{f_{a1}},f_{b0})+C_{ab}(f_{a0},\overline{f_{b1}})]$$
$$=v_\parallel\left[\left(\frac{\nabla_\parallel p_a}{p_a}-\frac{e_a}{T_a}E_\parallel\right)+\left(\frac{v^2}{v_a^2}-\frac{5}{2}\right)\frac{\nabla_\parallel T_a}{T_a}\right]f_{a0}.$$

从这个方程可以看到,它仅和平行(磁场)方向的输运过程有关. 可是,我们最关心的是等离子体的径向也即垂直方向的输运,可以预期它们和另一个一级的分布函数 $\tilde{f}_{a1}$ 相关,而它满足的方程可以从式(16.99)中减去上式而得到(对于平行磁场方向的输运及 $\overline{f_{a1}}$ 的进一步讨论,可参考文献[5])

$$\sum_b[C_{ab}(\tilde{f}_{a1},f_{b0})+C_{ab}(f_{a0},\tilde{f}_{b1})]+\Omega_a\frac{\partial\tilde{f}_{a1}}{\partial\varphi}$$
$$=\boldsymbol{v}_\perp\cdot\left[\left(\frac{\nabla_\perp p_a}{p_a}-\frac{e_a}{T_a}\boldsymbol{E}\right)+\left(\frac{v^2}{v_a^2}-\frac{5}{2}\right)\frac{\nabla T_a}{T_a}\right]f_{a0}.$$

上式左面的第一项由于是碰撞项,因而是 τ_a^{-1} 量级的量,而第二项则是 Ω_a 数量级的. 在强磁场的条件下 $\Omega_a\tau_a\gg1$,因此可以把 $(\Omega_a\tau_a)^{-1}$ 当作小量把分布函数进一步展开,

$$\widetilde{f}_{a1} = \widetilde{f}_{a1}^{(0)} + \widetilde{f}_{a1}^{(1)} + \cdots, \tag{16.116}$$

其中 $\widetilde{f}_{a1}^{(0)}$是零级量，在它所满足的方程中，碰撞项因为是小量可以略去，于是得

$$\frac{\partial \widetilde{f}_{a1}^{(0)}}{\partial \varphi} = \frac{\boldsymbol{v}_\perp}{\Omega_a} \cdot \left[\left(\frac{\nabla p_a}{p_a} - \frac{e_a}{T_a}\boldsymbol{E}\right) + \left(\frac{v^2}{v_a^2} - \frac{5}{2}\right)\frac{\nabla T_a}{T_a}\right] f_{a0}. \tag{16.117}$$

对它直接积分，利用 $\boldsymbol{v}_\perp = v_\perp(\cos\varphi \boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi \boldsymbol{e}_2)$，最后得解析解

$$\widetilde{f}_{a1}^{(0)} = \frac{\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{e}_b}{\Omega_a} \cdot \left[\left(\frac{\nabla p_a}{p_a} - \frac{e_a}{T_a}\boldsymbol{E}\right) + \left(\frac{v^2}{v_a^2} - \frac{5}{2}\right)\frac{\nabla T_a}{T_a}\right] f_{a0}. \tag{16.118}$$

而在强磁场下，这个分布函数也代表了一级的速度分布函数. 把它当成 f_{a1}代入 $\boldsymbol{F}_{ab}$及 $\boldsymbol{G}_{ab}$表达式中的碰撞算子里后，就能得到这两个碰撞输运量的明显表达式. 先来给出线性碰撞算子的表达式

$$C_{ab}^l \equiv C_{ab}(\widetilde{f}_{a1}^{(0)}, f_{b0}) + C_{ab}(f_{a0}, \widetilde{f}_{b1}^{(0)})$$

$$= \frac{c_{ab}}{m_a}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{v}} \cdot \int d\boldsymbol{v}' f_{a0}(\boldsymbol{v}) f_{b0}(\boldsymbol{v}')\left(\frac{\overleftrightarrow{I}}{u} - \frac{\boldsymbol{uu}}{u^3}\right)$$

$$\cdot \left[\frac{1}{m_a}\frac{\partial \widehat{f}_{a1}^{(0)}}{\partial \boldsymbol{v}} - \frac{1}{m_b}\frac{\partial \widehat{f}_{b1}^{(0)}}{\partial \boldsymbol{v}'}\right],$$

其中

$$c_{ab} = 2\pi e_a^2 e_b^2 \ln\Lambda, \quad \widehat{f}_{a1}^{(0)} = \frac{\widetilde{f}_{a1}^{(0)}}{f_{a0}}, \quad \boldsymbol{u} = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}'.$$

将 $\widetilde{f}_{a1}^{(0)}$代入，再经过冗长的计算，最后可以得到摩擦力

$$\boldsymbol{F}_{ab} = \frac{m_a n_a}{\tau_{ab}}\frac{c}{eB}\boldsymbol{e}_b \times \left(\frac{\nabla p_b}{Z_b n_b} - \frac{\nabla p_a}{Z_a n_a} + \frac{3}{2Z_a}\frac{1 - Z_a m_a/(Z_b m_b)}{1 + m_a/m_b}\right), \tag{16.119}$$

以及碰撞粒子流

$$\Gamma_{a\perp}^{(1)} \equiv n_a \boldsymbol{u}_{a\perp}^{(1)} = -\frac{c}{e_a B}\boldsymbol{e}_b \times \sum_{b\neq a} \boldsymbol{F}_{ab}$$

$$= \frac{n_a m_a c^2}{e_a^2 B^2}\sum_{b\neq a}\tau_{ab}^{-1}\left(\frac{Z_a}{Z_b}\frac{\nabla_\perp p_b}{n_b} - \frac{\nabla_\perp p_a}{n_a}\right.$$

$$\left. + \frac{3}{2}\frac{1 - Z_a m_a/(Z_b m_b)}{1 + m_a/m_b}\nabla_\perp T\right).$$

还可以进一步将 $\nabla p = T\nabla n(r)$代入，并利用 $\Omega_a = e_a B/(m_a c)$，结果有

$$\Gamma_{a\perp}^{(1)} = \sum_b \frac{n_a \nu_{ab}}{m_a \Omega_a^2}\left\{T\left[\frac{Z_a}{Z_b}\frac{\nabla_\perp n_b}{n_b} - \frac{\nabla_\perp n_a}{n_a}\right]\right.$$

$$\left. + \left[\frac{Z_a}{Z_b} - 1 + \frac{3}{2}\frac{1 - \frac{Z_a m_a}{Z_b m_b}}{1 + \frac{m_a}{m_b}}\right]\nabla_\perp T\right\}$$

$$= \sum_b \frac{\nu_{ab} T}{m_a \Omega_a^2}\left[\left(\frac{n_a Z_a}{n_b Z_b}\nabla n_b - \nabla n_a\right)\right.$$

$$\left. + \left(\frac{1}{2}\frac{1 - \frac{Z_a m_a}{Z_b m_b}}{1 + \frac{m_a}{m_b}} + \frac{\frac{Z_a m_b - Z_b m_a}{Z_b m_b}}{1 + \frac{m_a}{m_b}}\right)\frac{\nabla_\perp T}{T}\right]$$

$$= \sum_b \frac{1}{2}\nu_{ab}\rho_a^2\left[\left(\frac{n_a Z_a}{n_b Z_b}\nabla n_b - \nabla n_a\right)\right.$$

$$\left. + \left(\frac{1}{2}\frac{1 - \frac{Z_a m_a}{Z_b m_b}}{1 + \frac{m_a}{m_b}} + \frac{\frac{Z_a m_b - Z_b m_a}{Z_b m_b}}{1 + \frac{m_a}{m_b}}\right)\frac{\nabla_\perp T}{T}\right], \tag{16.120}$$

最后一个等式右边方括号外的因子就是前面用 BGK 碰撞项导出的横越磁场的扩散系数在强磁场极限下的表达式. 而方括号中的各项的物理意义依次是：杂质聚芯，(密度梯度引起的)扩散，以及(温度梯度引起的)热扩散——也称能斯特(Nernst)效应. 关于杂质聚芯的详细解释可以参考《等离子体物理原理》[4]中的相应章节.

用同样的方法，可以得到碰撞热流的最后表达式

$$\boldsymbol{q}_{a\perp}^{(0)} = -\frac{cT}{e_a B}\boldsymbol{e}_b \times \sum_b \boldsymbol{G}_{ab}$$

$$= \frac{n_a m_a}{e_a^2 B^2} c^2 T \sum_b \frac{1}{\tau_{ab}(1 + m_a/m_b)} \left\{ \frac{3}{2}\left(\frac{\nabla_\perp p_a}{n_a} - \frac{Z_a}{Z_b}\frac{\nabla_\perp p_b}{n_b} \right) - \left[\frac{15}{2}\left(\frac{m_a}{m_b}\right)^2 + 4\frac{m_a}{m_b} + \frac{13}{4} - \frac{27}{4}\frac{m_a Z_a}{m_b Z_b} \right] \frac{\nabla_\perp T}{1 + m_a/m_b} \right\}, \tag{16.121}$$

其中花括号中的第一项称为埃廷斯豪森(Ettingshausen)效应，它是由压强梯度引起的热流项；而第二项是标准的(由温度梯度引发的)热流项，方括号中的项正是热导系数.

简单等离子体的输运流

上面的表达式适用于电子和多种离子组成的等离子体，下面将给出仅由电子和一种离子 Z_i 组成的简单等离子体的输运流表达式.

$$n_e \boldsymbol{u}_{e\perp} = -\frac{c}{eB}\boldsymbol{b} \times \nabla p_e + n_e \frac{c}{B}\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{b} - \frac{\nabla_\perp p - \frac{3}{2} n_e \nabla_\perp T_e}{m_e \Omega_e^2 \tau_{ei}}, \tag{16.122}$$

$$n_i \boldsymbol{u}_{i\perp} = \frac{c}{Z_i e B}\boldsymbol{b} \times \nabla p_i + n_i \frac{c}{B}\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{b} - \frac{\nabla_\perp p - \frac{3}{2} n_e \nabla_\perp T_e}{m_e \Omega_e^2 \tau_{ei} Z_i}, \tag{16.123}$$

$$\boldsymbol{q}_{e\perp} = -\frac{5}{2} n_e \frac{cT_e}{eB}\boldsymbol{b} \times \nabla T_e + \frac{T_e}{m_e \Omega_e^2 \tau_{ei}} \left[\frac{3}{2}\nabla_\perp p - \left(\frac{13}{4} + \frac{\sqrt{2}}{Z_i} \right) n_e \nabla_\perp T_e \right], \tag{16.124}$$

$$\boldsymbol{q}_{i\perp} = \frac{5}{2} n_i \frac{cT_i}{Z_i e B}\boldsymbol{b} \times \nabla T_i - \frac{2 n_i T_i}{m_i \Omega_i^2 \tau_{ii}} \nabla_\perp T_i. \tag{16.125}$$

16.2.4　输运方程——二级微扰方程的矩方程

这里再把微扰二级的动理学方程(16.101)写出

$$\frac{\partial f_{a0}}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla f_{a1} + \frac{e_a}{m_a}\boldsymbol{E} \cdot \frac{\partial f_{a1}}{\partial \boldsymbol{v}} + \Omega_a \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{b} \cdot \frac{\partial f_{a2}}{\partial \boldsymbol{v}} = \sum_b C_{ab}^{(2)}.$$

下面将把电子的下标记为 e，而把离子的下标用小写子母 a，b 表示. 动理学方程对速度的各阶矩就是输运方程.

零阶矩——粒子扩散方程

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \nabla \cdot (n_e \boldsymbol{u}_{e1}) = 0, \quad \Gamma_e = n_e \boldsymbol{u}_{e1}, \tag{16.126}$$

$$\frac{\partial n_a}{\partial t} + \nabla \cdot (n_a \boldsymbol{u}_{a1}) = 0, \quad \Gamma_a = n_a \boldsymbol{u}_{a1}. \tag{16.127}$$

其中 Γ_e，Γ_a 是粒子流，上一节已经给出了它们垂直磁场的部分. 平行磁场部分请参考文献[5].

一阶矩——力的平衡方程

$$-\nabla p_e - n_e e\left(\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}\boldsymbol{u}_{e1} \times \boldsymbol{B} \right) + \sum_b \boldsymbol{F}_{eb} = 0, \tag{16.128}$$

$$-\nabla p_a + n_a e_a \left(\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}\boldsymbol{u}_{a1} \times \boldsymbol{B} \right) + \boldsymbol{F}_{ae} + \sum_b \boldsymbol{F}_{ab} = 0. \tag{16.129}$$

在垂直磁场方向上，如果取上节给出的粒子流和摩擦力表达式，则这两个力平衡方程是自动满足的.

二阶矩——热能的平衡方程

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{3}{2} n_e T_e \right) + \nabla \cdot \boldsymbol{Q}_{e1} = Q_{ei} - \sum_a \boldsymbol{u}_{a1} \cdot \left(\nabla p_a - \sum_b \boldsymbol{F}_{ab} \right), \tag{16.130}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{3}{2} n_a T_a \right) + \nabla \cdot \boldsymbol{Q}_{a1} = n_a e_a \boldsymbol{u}_{a1} \cdot \boldsymbol{E} + Q_{ae} + \boldsymbol{u}_{a1} \cdot \boldsymbol{F}_{ae} + \boldsymbol{u}_{a1} \cdot \sum_b \boldsymbol{F}_{ab}. \tag{16.131}$$

其中

$$\boldsymbol{Q}_{e1} = \boldsymbol{q}_{e1} + \frac{5}{2}\boldsymbol{\Gamma}_{e1}T_e, \tag{16.132}$$

$$\boldsymbol{Q}_{a1} = \boldsymbol{q}_{a1} + \frac{5}{2}\boldsymbol{\Gamma}_{a1}T_a, \tag{16.133}$$

$$Q_{ea} = -Q_{ae} + (\boldsymbol{u}_a - \boldsymbol{u}_e)\cdot\boldsymbol{F}_e, \quad \boldsymbol{F}_e = \sum_b \boldsymbol{F}_{eb}, \tag{16.134}$$

$$Q_{ae} = \int d\boldsymbol{v}\,\frac{1}{2}m_a v^2 C_{ae}^{(2)} - \boldsymbol{u}_{a1}\cdot\boldsymbol{F}_{ae}. \tag{16.135}$$

在

$$C_{ae}^{(2)} = C_{ae}(f_{a2}, f_{e0}) + C_{ae}(f_{a0}, f_{e2}) + C_{ae}(f_{a1}, f_{e1}) \tag{16.136}$$

的右面三项中，头两项才对 Q_{ae}有贡献，第三项给出的是 $\boldsymbol{u}_{a1}\cdot\boldsymbol{F}_{ae}$（正好和 Q_{ae}表达式的最后一项抵消了）.

简单等离子体情况

对只含一种离子 i 的简单等离子体情况，热能平衡方程可以有较大简化

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{3}{2}n_e T_e\right) + \nabla\cdot\boldsymbol{Q}_{e1} = Q_{ei} - \boldsymbol{u}_{i1}\cdot\nabla p_i, \tag{16.137}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{3}{2}n_i T_i\right) + \nabla\cdot\boldsymbol{Q}_{i1} = Q_{ie} + \boldsymbol{u}_{i1}\cdot\nabla p_i. \tag{16.138}$$

上式的 Q_{ie}由(16.135)式定义，其中的 f_{i2}原则上应从二级微扰的动理学方程解出. 但在最初级的近似下，可以用前面已经给出的不等温电子-离子系之间碰撞热交换速率表达式来简化计算，这样

$$Q_{ie} = \frac{3}{2}\frac{n_i(T_e - T_i)}{\tau_{ie}^T},$$

而

$$Q_{ei} = -Q_{ie} - (\boldsymbol{u}_e - \boldsymbol{u}_i)\cdot\boldsymbol{F}_{ei} = -Q_{ie} + \frac{J^2}{\sigma}.$$

其中最后一项就是欧姆加热项（已经用了 $\boldsymbol{J} = -en_e(\boldsymbol{u}_e - \boldsymbol{u}_i)$）.

16.3 湍动输运简介

无论是自然界的还是实验室的等离子体，通常都多多少少处在湍动状态中. 一般等离子体湍动的物理量在时间和空间上都是快变的，但它们间的非线性耦合可能产生慢变的物理过程——例如输运过程. 这类输运过程和碰撞所引起的经典输运过程相比，不仅机制不同（例如可以是无碰撞的），大小也不同（有时可以比对应的经典值高 3～4 个数量级），因此往往被称为“反常输运”或“湍动输运”. 湍动输运可以有多种多样的起因及演化途径，其描述方法可以是流体的，也可以是动理学的，现在尚没有比较公认的理论. 本节不打算讨论以上问题，只讨论：已经处在完全发展的湍动稳定状态下的等离子体中，各种快变的物理量是如何通过非线性耦合而产生慢变输运过程的？

16.3.1 湍动粒子流

从上节给出的柱形等离子体中垂直磁场的粒子流表达式开始，

$$\boldsymbol{\Gamma}_{a\perp} = n_a\frac{c}{B^2}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B} + \frac{c}{e_a B^2}\boldsymbol{B}\times\nabla p_a - \frac{c}{e_a B^2}\boldsymbol{B}\times\sum_b \boldsymbol{F}_{ab}.$$

在热平衡时，有 $p_e = p_i = \frac{1}{2}p$，由磁流体力学的平衡条件 $\frac{1}{c}\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{B} = \nabla p$，上式可变成

$$\boldsymbol{\Gamma}_{a\perp} = n_a\frac{c}{B^2}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B} + \frac{1}{2e_a B^2}\boldsymbol{B}\times(\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{B}) - \frac{c}{e_a B^2}\boldsymbol{B}\times\sum_b \boldsymbol{F}_{ab}. \tag{16.139}$$

由于等离子体处在湍动态，故上式中的各物理量都是时空快变量，可以把它们表示成

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 + \widetilde{\boldsymbol{E}}, \quad \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}_0 + \widetilde{\boldsymbol{B}}, \quad n = n_0 + \widetilde{n}, \tag{16.140}$$

其中 $n_0=\langle n\rangle$是湍动量的平均值(慢变部分),而 $\tilde{n}$ 是快变部分,有 $\langle\tilde{n}\rangle=0$. 所谓平均,按前面的讨论,可以是集平均、时间平均或空间平均. 在后两种情况中,作平均所取的时、空间隔应比湍动的快变特征时、空长,而比输运的慢变特征时、空短.

1. 粒子流的第一项

粒子流的第一项是电漂移流,可以写作

$$\begin{aligned} n\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B} &= (n_0+\tilde{n})(\boldsymbol{E}_0+\tilde{\boldsymbol{E}})\times(\boldsymbol{B}_0+\tilde{\boldsymbol{B}}) \\ &= n_0(\boldsymbol{E}_0\times\boldsymbol{B}_0)+n_0(\tilde{\boldsymbol{E}}\times\tilde{\boldsymbol{B}})+\tilde{n}(\tilde{\boldsymbol{E}}\times\boldsymbol{B}_0) \\ &\quad+\tilde{n}(\boldsymbol{E}_0\times\tilde{\boldsymbol{B}})+n_0(\boldsymbol{E}_0\times\tilde{\boldsymbol{B}})+n_0(\tilde{\boldsymbol{E}}\times\boldsymbol{B}_0) \\ &\quad+\tilde{n}(\boldsymbol{E}_0\times\boldsymbol{B}_0)+\tilde{n}(\tilde{\boldsymbol{E}}\times\tilde{\boldsymbol{B}}). \end{aligned}$$

然后对上式取平均,其中只含一个快变量和三个快变量的项由于相混而消失,剩余的是输运时、空尺度上的慢变量

$$\begin{aligned} \langle n\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}\rangle &= n_0\langle\boldsymbol{E}_0\times\boldsymbol{B}_0\rangle+n_0\langle\tilde{\boldsymbol{E}}\times\tilde{\boldsymbol{B}}\rangle \\ &\quad+\langle\tilde{n}\tilde{\boldsymbol{E}}\rangle\times\boldsymbol{B}_0+\boldsymbol{E}_0\times\langle\tilde{n}\tilde{\boldsymbol{B}}\rangle. \end{aligned} \tag{16.141}$$

其中第一项为非湍动的平衡电漂移流,下面将把它略去. 为了能深入讨论下去,令外磁场和柱轴平行,$\boldsymbol{B}_0=B_0\boldsymbol{e}_\varphi$,在柱坐标$(r,\theta,\varphi)$中,上式中的径向湍动粒子流可具体写成

$$\begin{aligned} \langle n\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}\rangle_r &= n_0(\langle\tilde{E}_\theta\tilde{B}_\varphi\rangle-\langle\tilde{E}_\varphi\tilde{B}_\theta\rangle)+B_0\langle\tilde{n}\tilde{E}_\theta\rangle \\ &\quad+E_{0\theta}\langle\tilde{n}\tilde{B}_\varphi\rangle-E_{0\varphi}\langle\tilde{n}\tilde{B}_\theta\rangle. \end{aligned} \tag{16.142}$$

这式子同时适用于静电湍动和电磁湍动. 但对于静电湍动,径向的湍动粒子流可以大大简化

$$\langle n\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}\rangle_r=B_0\langle\tilde{n}\tilde{E}_\theta\rangle. \tag{16.143}$$

2. 粒子流的第二项

第二项来源于压强梯度漂移,在柱坐标系中,它的径向分量是

$$\begin{aligned} [\boldsymbol{B}\times(\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{B})]_r &= B_\theta(J_rB_\theta-J_\theta B_r)-B_\varphi(J_\varphi B_r-J_rB_\varphi) \\ &= (\boldsymbol{B}_0+\tilde{\boldsymbol{B}})_\theta[(\boldsymbol{J}_0+\tilde{\boldsymbol{J}})\times(\boldsymbol{B}_0+\tilde{\boldsymbol{B}})]_\varphi \\ &\quad-(\boldsymbol{B}_0+\tilde{\boldsymbol{B}})_\varphi[(\boldsymbol{J}_0+\tilde{\boldsymbol{J}})\times(\boldsymbol{B}_0+\tilde{\boldsymbol{B}})]_\theta. \end{aligned}$$

对它求平均后,得慢变输运流

$$\begin{aligned} &\langle\boldsymbol{B}\times(\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{B})\rangle_r \\ &= 2B_{0\theta}\langle\tilde{J}_r\tilde{B}_\theta\rangle+J_{0r}\langle\tilde{B}_\theta^2\rangle-B_{0\theta}\langle\tilde{J}_\theta\tilde{B}_r\rangle \\ &\quad-J_{0\theta}\langle\tilde{B}_\theta\tilde{B}_r\rangle-B_{0r}\langle\tilde{J}_\theta\tilde{B}_\theta\rangle-B_{0\varphi}\langle\tilde{J}_\varphi\tilde{B}_r\rangle \\ &\quad-J_{0\varphi}\langle\tilde{B}_\varphi\tilde{B}_r\rangle-B_{0r}\langle\tilde{B}_\varphi\tilde{J}_\varphi\rangle+2B_{0\varphi}\langle\tilde{B}_\varphi\tilde{J}_r\rangle+J_{0r}\langle\tilde{B}_\varphi^2\rangle \\ &= -B_{0\varphi}\langle\tilde{J}_\varphi\tilde{B}_r\rangle+2B_{0\varphi}\langle\tilde{B}_\varphi\tilde{J}_r\rangle \\ &\quad-B_{0\theta}\langle\tilde{J}_\theta\tilde{B}_r\rangle+2B_{0\theta}\langle\tilde{J}_r\tilde{B}_\theta\rangle \\ &\quad-B_{0r}\langle\tilde{J}_\theta\tilde{B}_\theta\rangle-B_{0r}\langle\tilde{B}_\varphi\tilde{J}_\varphi\rangle \\ &\quad-J_{0\varphi}\langle\tilde{B}_\varphi\tilde{B}_r\rangle-J_{0\theta}\langle\tilde{B}_\theta\tilde{B}_r\rangle+J_{0r}(\langle\tilde{B}_\theta^2\rangle+\langle\tilde{B}_\varphi^2\rangle). \end{aligned}$$

在最后一式中的各项,大体上是按照其绝对值大小依次排列的.

把上述两个漂移性质的湍动粒子流相加,得

$$\begin{aligned} \langle\Gamma_{a\perp}^{(0)}\rangle_r &= \frac{c}{B_0^2}\langle n_a\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}\rangle_r+\frac{1}{2e_aB_0^2}\langle\boldsymbol{B}\times(\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{B})\rangle_r \\ &\approx \frac{c}{B_0}\langle\tilde{n}_a\tilde{E}_\theta\rangle-\frac{1}{2e_aB_0}\langle\tilde{J}_\varphi\tilde{B}_r\rangle-\frac{J_{0\varphi}}{2e_aB_0^2}\langle\tilde{B}_\varphi\tilde{B}_r\rangle+\cdots. \end{aligned}$$

这里为了简明,只写出了头三个绝对值最大的项,其他的项如果需要,读者可以按公式自行推导出来. 已给出的头二项又是和实验结果作比较时常用的理论表达式. 除了漂移湍动流外,还有一项来源于碰撞的湍动粒子流

$$\langle\Gamma_{a\perp}^{(1)}\rangle_r=g_1(\tilde{B},\tilde{n},\nabla n_a,\nabla T_a). \tag{16.144}$$

它的具体表达式及推导过程比较复杂,这里就不给出了. 有兴趣的读者可参看文献[6],[7].

16.3.2 湍 动 热 流

柱形磁化等离子体中,径向总热流由两项组成:粒子径向流所携带的热量和碰撞引起的"正宗"热流,

$$\boldsymbol{Q}_{a\perp}=\frac{5}{2}T_a\Gamma_{a\perp}+\boldsymbol{q}_{a\perp}.$$

其中"正宗"热流又可以分成漂移项和碰撞项

$$\boldsymbol{q}_{a\perp} = \boldsymbol{q}_{a\perp}^{(0)} + \boldsymbol{q}_{a\perp}^{(1)},$$

$$\boldsymbol{q}_{a\perp}^{(0)} = \frac{5}{2}\frac{cp_a}{e_aB^2}\boldsymbol{B}\times\nabla T_a,\quad \boldsymbol{q}_{a\perp}^{(1)} = \frac{cT_a}{e_aB^2}\sum_{b\neq a}\boldsymbol{G}_{ab}\times\boldsymbol{B}.$$

所以相应的湍动热流应该写作

$$\langle \boldsymbol{Q}_{a\perp}\rangle = \frac{5}{2}\langle T_a\Gamma_{a\perp}\rangle + \langle \boldsymbol{q}_{a\perp}^{(0)}\rangle + \langle \boldsymbol{q}_{a\perp}^{(1)}\rangle. \tag{16.145}$$

下面就分别深入讨论这三项.

径向粒子流携带的热能

$$\frac{5}{2}\langle T_a\Gamma_{a\perp}\rangle_r = \frac{5}{2}T_a\langle\Gamma_{a\perp}\rangle_r + \frac{5}{2}\langle\tilde{T}_a\tilde{\Gamma}_{ar}\rangle. \tag{16.146}$$

利用上节给出的湍动粒子流表达式,上式中的第一项可以直接写出(这里只给出了绝对值最大的几项)

$$T_a\langle\Gamma_{a\perp}\rangle_r = \frac{cT_a}{B_0}\langle\tilde{n}_a\tilde{E}_\theta\rangle - \frac{cT_a}{2e_aB_0}\langle\tilde{J}_\varphi\tilde{B}_r\rangle + \cdots. \tag{16.147}$$

为了求出(16.146)式中的第二项,先从表达式(16.139)入手,写出相应的湍动(快变)粒子流

$$\begin{aligned}\tilde{\Gamma}_r = \frac{c}{B_0^2}&[n_{a0}(E_{0\theta}\tilde{B}_\varphi - E_{0\varphi}\tilde{B}_\theta) + n_{a0}(B_{0\varphi}\tilde{E}_\theta - B_{0\theta}\tilde{E}_\varphi)\\&+\tilde{n}_a(E_{0\theta}B_{0\varphi} - E_{0\varphi}B_{0\theta})]\\&+\frac{1}{2e_aB_0^2}[B_{0\theta}(J_{0r}\tilde{B}_\theta + \tilde{J}_rB_{0\theta} - J_{0\theta}\tilde{B}_r - \tilde{J}_\theta B_{0r})\\&-B_{0\varphi}(J_{0\varphi}\tilde{B}_r + \tilde{J}_\varphi B_{0r} - J_{0r}\tilde{B}_\varphi - \tilde{J}_rB_{0\varphi})\\&+\tilde{B}_\theta(J_{0r}B_{0\theta} - J_{0\theta}B_{0r}) - \tilde{B}_\varphi(J_{0\varphi}B_{0r} - J_{0r}B_{0\varphi})].\end{aligned}$$

因此(16.146)式的第二项就是

$$\begin{aligned}\langle\tilde{T}\tilde{\Gamma}_r\rangle = \frac{c}{B_0^2}&[n_{a0}E_{0\theta}\langle\tilde{T}\tilde{B}_\varphi\rangle - n_{a0}E_{0\varphi}\langle\tilde{T}\tilde{B}_\theta\rangle + n_{a0}B_{0\varphi}\langle\tilde{T}\tilde{E}_\theta\rangle\\&-n_{a0}B_{0\theta}\langle\tilde{T}\tilde{E}_\varphi\rangle + E_{0\theta}B_{0\varphi}\langle\tilde{T}\tilde{n}\rangle - E_{0\varphi}B_{0\theta}\langle\tilde{T}\tilde{n}\rangle]\\&+\frac{1}{2e_aB_0^2}[B_{0\theta}J_{0r}\langle\tilde{T}\tilde{B}_\theta\rangle + B_{0\theta}^2\langle\tilde{T}\tilde{J}_r\rangle - B_{0\theta}J_{0\theta}\langle\tilde{T}\tilde{B}_r\rangle\\&-B_{0\theta}B_{0r}\langle\tilde{T}\tilde{J}_\theta\rangle + J_{0r}B_{0\theta}\langle\tilde{T}\tilde{B}_\theta\rangle - J_{0\theta}B_{0r}\langle\tilde{T}\tilde{B}_\theta\rangle\\&-B_{0\varphi}J_{0\varphi}\langle\tilde{T}\tilde{B}_r\rangle - B_{0\varphi}B_{0r}\langle\tilde{T}\tilde{J}_\varphi\rangle + B_{0\varphi}J_{0r}\langle\tilde{T}\tilde{B}_\varphi\rangle\\&+B_{0\varphi}^2\langle\tilde{T}\tilde{J}_r\rangle - (J_{0\varphi}B_{0r} - J_{0r}B_{0\varphi})\langle\tilde{T}\tilde{B}_\varphi\rangle].\end{aligned}$$

经过整理,可以归纳成(各项大体以绝对值大小依次排列)

$$\begin{aligned}\langle\tilde{T}\tilde{\Gamma}_r\rangle = \frac{c}{B_0^2}&[n_{a0}B_{0\varphi}\langle\tilde{T}\tilde{E}_\theta\rangle + (E_{0\theta}B_{0\varphi} - E_{0\varphi}B_{0\theta})\langle\tilde{T}\tilde{n}\rangle\\&+n_{a0}E_{0\theta}\langle\tilde{T}\tilde{B}_\varphi\rangle - n_{a0}E_{0\varphi}\langle\tilde{T}\tilde{B}_\theta\rangle - n_{a0}B_{0\theta}\langle\tilde{T}\tilde{E}_\varphi\rangle]\\&+\frac{1}{2e_aB_0^2}[(B_{0\varphi}^2 + B_{0\theta}^2)\langle\tilde{T}\tilde{J}_r\rangle - (B_{0\varphi}J_{0\varphi} + B_{0\theta}J_{0\theta})\langle\tilde{T}\tilde{B}_r\rangle\\&+(2B_{0\varphi}J_{0r} - B_{0r}J_{0\varphi})\langle\tilde{T}\tilde{B}_\varphi\rangle - B_{0\varphi}B_{0r}\langle\tilde{T}\tilde{J}_\varphi\rangle\\&+(2B_{0\theta}J_{0r} - B_{0r}J_{0\theta})\langle\tilde{T}\tilde{B}_\theta\rangle - B_{0\theta}B_{0r}\langle\tilde{T}\tilde{J}_\theta\rangle].\end{aligned}$$

现在来看总湍动热流(16.145)式中的第二项,即漂移热流

$$\boldsymbol{q}_{a\perp}^{(0)} = \frac{5}{2}\frac{cT_a}{e_aB^2}\boldsymbol{B}\times\nabla p_a.$$

考虑到它的径向分量依赖于密度和温度在角向的非均匀性,而密度和温度的角向梯度一般很小,故可取为零,

$$q_{ar}^{(0)} = \frac{5}{2}\frac{cT_a}{e_aB^2}B_{0\phi}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}(n_aT_a) \equiv 0,\quad \left(\frac{\partial n_a}{\partial\theta} = \frac{\partial T_a}{\partial\theta} = 0\right)$$

因此也不存在相应的湍动热流 $\langle q_{ar}^{(0)}\rangle$.

总湍动热流(16.145)式中的第三项,即"碰撞"或"正宗"热流这时会对湍动热流有很大的贡献. 因为

$$\boldsymbol{q}_a^{(1)} = \boldsymbol{q}_{a\parallel}^{(1)} + \boldsymbol{q}_{a\perp}^{(1)} = -\kappa_\parallel\nabla_\parallel T_a - \kappa_\perp\nabla_\perp T_a.$$

当存在磁场扰动时,磁力线方向也会有抖动:

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}_0 + \tilde{\boldsymbol{B}},\quad \boldsymbol{b} = \langle\boldsymbol{b}\rangle + \frac{\tilde{B}_r}{B_0}\boldsymbol{e}_r.$$

这样就会使一部分平衡时的平行热流 $\kappa_\parallel\nabla_\parallel T_a$ 转变成垂直热流 $\langle\boldsymbol{q}_{a\perp}^{(1)}\rangle$. 从物理上来看,这是由于磁力线的无规行走而引发的径向湍动热流

$$\langle q_{ar}^{(1)}\rangle \approx -\kappa_\parallel\left[\langle\left|\frac{\tilde{B}_r}{B}\right|^2\rangle + \langle\left|\frac{\tilde{B}_r}{B}\right|\frac{\mathrm{d}\tilde{T}}{\mathrm{d}r}\rangle\right] \equiv g_2^a(B_r,\nabla\tilde{T}). \tag{16.148}$$

因为平衡时的平行热导系数总是比垂直热导系数大得多($\sim\omega_{ac}^2\tau_a^2 \gg 1$),故即使 $\widetilde{B}_r/B \ll 1$,这样产生的湍动热流也会相当大.

最后把三项相加,得总径向湍动热流

$$\begin{aligned}
\langle Q_{ar}\rangle &= \frac{5}{2}T_a\langle\widetilde{\Gamma}_{ar}\rangle + \frac{5}{2}\langle\widetilde{T}_a\widetilde{\Gamma}_{ar}\rangle + g_2^a(B_r,\nabla\widetilde{T}) \qquad (a = \mathrm{e,i})\\
&\approx \frac{5}{2}\frac{c}{B_0}[\langle\widetilde{n}T\widetilde{E}_\theta\rangle + \langle n_0\widetilde{T}\widetilde{E}_\theta\rangle] + \frac{5}{2}\frac{c}{B_0}E_{0\theta}\langle\widetilde{T}\widetilde{n}\rangle\\
&\quad - \frac{5}{4e_aB_0}[T_a\langle\widetilde{J}_\phi\widetilde{B}_r\rangle - B_{0\phi}\langle\widetilde{T}_a\widetilde{J}_r\rangle\\
&\quad + J_{0\phi}\langle\widetilde{T}\widetilde{B}_r\rangle] + g_2^a(B_r,\nabla\widetilde{T})\\
&= \frac{5}{2}\frac{c}{B_0}[\langle\widetilde{p}\widetilde{E}_\theta\rangle + E_{0\theta}\langle\widetilde{T}\widetilde{n}\rangle] - \frac{5}{4e_aB_0}[T_a\langle\widetilde{J}_\phi\widetilde{B}_r\rangle\\
&\quad - B_{0\phi}\langle\widetilde{T}_a\widetilde{J}_r\rangle + J_{0\phi}\langle\widetilde{T}\widetilde{B}_r\rangle] + g_2^a(B_r,\nabla\widetilde{T}).
\end{aligned}$$

上面只列出了漂移热流中比较大的、目前实验上容易测量到的项.其他的项可以从前面给出过的相应表达式无困难地导出,这里就不一一写出了.

在实验上,当分别测量了湍动的总热流和总粒子流后,往往利用下面的等式

$$\langle Q_{ar}\rangle = \frac{5}{2}T_a\langle\widetilde{\Gamma}_{ar}\rangle + q_{ar}^{\mathrm{eff}} \tag{16.149}$$

来定义一个等效的热流和热导系数

$$\begin{aligned}
q_{ar}^{\mathrm{eff}} &\equiv -\kappa_{\mathrm{eff}}\nabla_r T_a\\
&= \langle Q_{ar}\rangle - \frac{5}{2}T_a\langle\widetilde{\Gamma}_{ar}\rangle\\
&= \frac{5}{2}T_a\langle\widetilde{T}_a\widetilde{\Gamma}_{ar}\rangle + g_2^a\\
&\approx \frac{5}{2}\frac{c}{B_0}[n_{a0}\langle\widetilde{T}_a\widetilde{E}_\theta\rangle + E_{0\theta}\langle\widetilde{T}_a\widetilde{n}_a\rangle]\\
&\quad + \frac{5}{4}\frac{1}{e_aB_0}[B_{0\phi}\langle\widetilde{T}_a\widetilde{J}_r\rangle - J_{0\phi}\langle\widetilde{T}_a\widetilde{B}_r\rangle] + g_2^a.
\end{aligned}$$

应该注意,在各种文献中往往会定义稍有不同的等效热流,因此在

把实验的热流和理论结果作比较时,必须弄清它们之间的关系.上面给出的定义出自文献[8].

16.4 环形磁场中的新经典输运简介

16.4.1 环形粒子和约束粒子

在 tokamak 装置中,磁场是环形的,其强度可写成

$$B = B_0\frac{R_0}{R} = \frac{B_0R_0}{R_0 + r\cos\theta} = B_0\left(1 - \frac{r}{R_0}\cos\theta\right).$$

由于环的外侧磁场比内侧的弱(图 16.2(a),(b)),带电粒子沿磁力线的运动像一个粒子在(磁)势阱中的运动(图 16.2(b)).那些平行速度与垂直速度之比 $v_\parallel/v_\perp$ 大的粒子可越过环内侧(磁)势峰顶而环行整个等离子体环,因此被称为环形粒子(图 16.3(a)).而 $v_\parallel/v_\perp$ 比较小的粒子则会在到达内侧之前,因 $v_\parallel$ 渐渐减少到零然后反向,从而被约束在磁阱中,因此被称为约束粒子或香蕉粒子(图 16.3(b)).这两类粒子在速度空间以 θ_c 为分界线(图 16.2(c)),有

$$\cot\theta_c = \frac{v_{\parallel 0}}{v_{\perp 0}} \approx \sqrt{2\varepsilon}, \quad \varepsilon = \frac{r}{R_0},$$

其中 R_0 是环的大半径,而 r 是粒子所在磁面的小半径.$\theta<\theta_c$ 的区

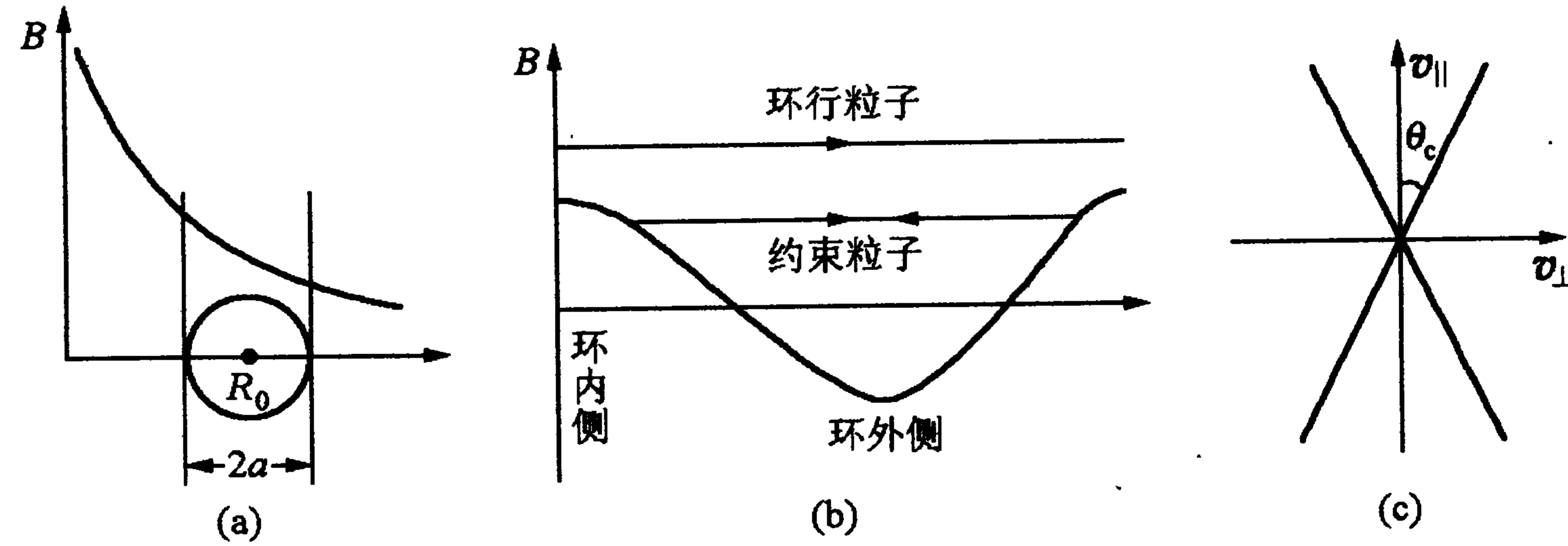


图 16.2 环形磁场中的磁阱示意图

域称为环行(粒子)区,而 $\theta>\theta_c$ 的区域则称为约束(粒子)区. 在速度空间的 (θ,ϕ) 相平面上约束区面积为

$$d_b=\int_{\theta_c}^{\pi/2}\sin\theta d\theta\int_0^{2\pi}d\phi=-2\pi\cos\theta\Big|_{\theta_c}^{\pi/2}=2\pi\cos\theta_c$$

$$=2\pi\sqrt{\frac{2\varepsilon}{1+2\varepsilon}}\approx 2\pi\sqrt{2\varepsilon}.$$

推导上式时用到了损失锥角的定义 $\cot\theta_c=\sqrt{2\varepsilon}$. 而速度空间 (θ,ϕ) 相平面的总面积(按上式对 θ 的积分,从 0 到 $\pi/2$)是 2π,这样约束区占总速度空间的比例为 $\sqrt{2\varepsilon}$. 如果假定粒子是均匀分布在这个相平面上的,则约束粒子数密度在总粒子数密度中所占的比例也近似为

$$\frac{n_b}{n_0}\sim\sqrt{2\varepsilon}. \tag{16.150}$$

环形粒子和约束粒子的轨道(在环的小截面的投影)如图16.3中所示:从某一磁面外侧与赤道面交点处出发的环形粒子轨道是一个近似的圆周,由于磁场曲率造成的漂移,$v_\parallel>0$ 环形粒子的轨道是在磁面内的小圆,而 $v_\parallel<0$ 环形粒子的轨道是在磁面外的大圆(图 16.3(a));小、大圆中心与磁面中心都在赤道面上,间距 Δr 大体相等. 从同一磁面同一外侧点出发的约束粒子轨道则呈现出香蕉形(图16.3(b)),$v_\parallel>0$ 约束粒子的轨道是在磁面内的小香

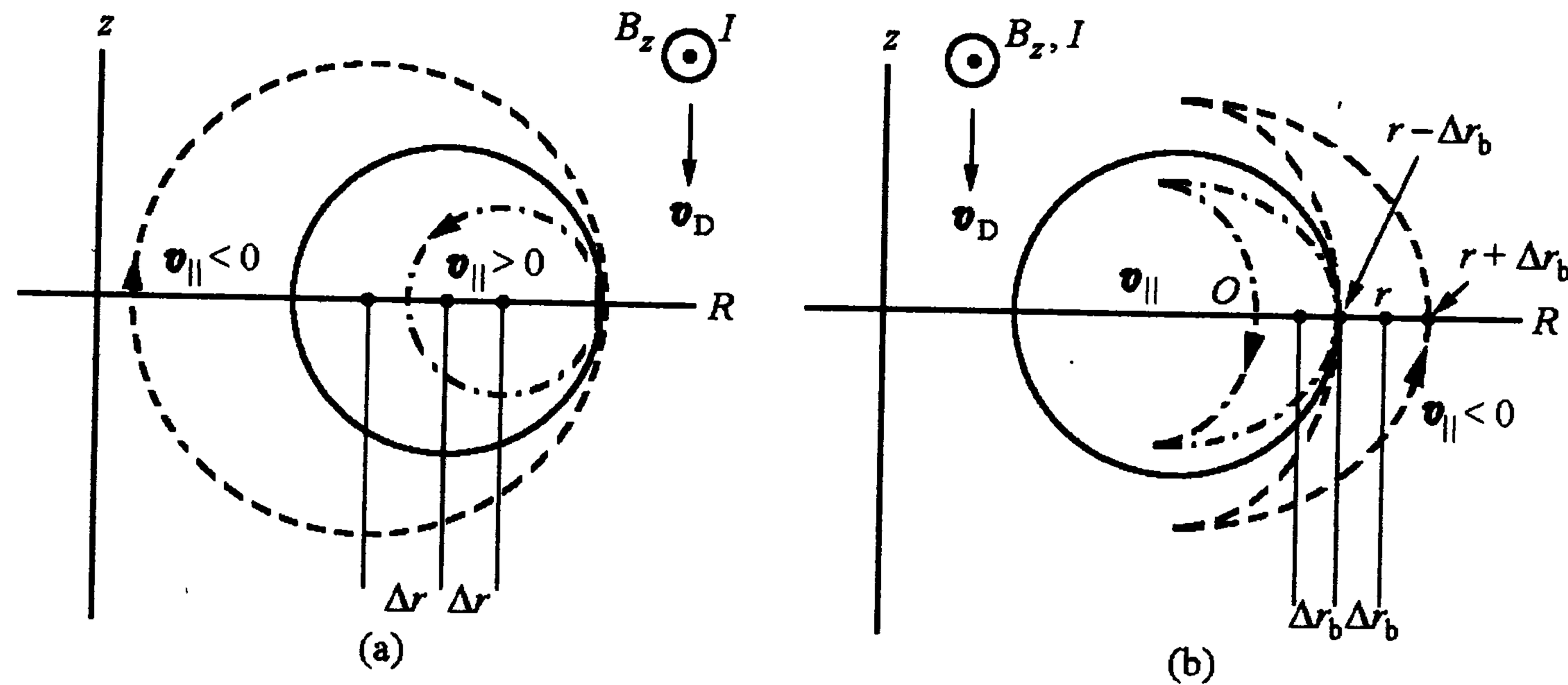


图 16.3　环行粒子轨道(a)和约束粒子轨道图形(b)

蕉,而 $v_\parallel<0$ 环形粒子的轨道是在磁面外的大香蕉;两种香蕉"中心"与出发点的间距 Δr_b 也大体相等.

按照带电粒子在环形磁场中的单粒子轨道理论(见《等离子体物理原理》[4],119—121 页),上述的两种间距分别为

$$\Delta r\sim qr_c,\quad \Delta r_b\sim 2\sqrt{2}\,q\varepsilon^{-1/2}qr_c,$$

$$q=q(r)=\frac{r}{R_0}\frac{B_\phi}{B_\theta}. \tag{16.151}$$

其中 r_c 是带电粒子在磁场中的回旋半径,而 q 是安全因子.

环形粒子在磁场中的平行(磁场方向)速度可近似取成常数

$$v_\parallel\sim v_t, \tag{16.152}$$

其中 v_t 是粒子的热速度. 香蕉粒子的平行速度则为

$$v_\parallel=v_t\sqrt{1-\frac{B}{B_{max}}}=v_t\sqrt{\frac{x-x_m}{R_0}},$$

$$B=B_0\left(1-\frac{x}{R_0}\right),\quad x=r\cos\theta, \tag{16.153}$$

它可以在有限值 $\sqrt{2\varepsilon}v_t$ 和零之间反复变化.

利用上面给出的数据,可以估算一下粒子在沿自己的轨道作周期运动时的特征时间——绕小环一周所需时间为

$$\tau=\frac{L}{v_\parallel}\approx\frac{qR}{v_\parallel}. \tag{16.154}$$

其中 $L\sim qR$ 为粒子沿小环转一圈时在大环方向所行走的距离. 这样可估计出环形粒子的环行周期和频率为

$$\tau_2=\frac{qR}{v_t},\quad \nu_2=\frac{1}{\tau_2}=\frac{v_t}{qR}. \tag{16.155}$$

对约束粒子,可以用其在轨道上环绕一周时的平均速度来估算环绕周期

$$\tau_b=\frac{qR}{v_\parallel}. \tag{16.156}$$

而平均速度则可以用粒子在小截面香蕉轨道上的平均值来估计

$$\bar{v}_{\parallel} = \frac{1}{l}\left[2\int_{x_m}^{r-\Delta r_b} v_{\parallel}(x)\mathrm{d}x + 2\int_{x_m}^{r+\Delta r_b} v_{\parallel}(x)\mathrm{d}x\right]$$
$$= \frac{2v_t}{l\sqrt{R_0}}\left[\int_{x_m}^{r-\Delta r_b}\sqrt{x-x_m}\mathrm{d}x + 2\int_{x_m}^{r+\Delta r_b}\sqrt{x-x_m}\mathrm{d}x\right]$$
$$= \frac{2v_t}{l\sqrt{R_0}}\frac{2}{3}r\sqrt{r}\left[\left(1-\frac{\Delta r}{r}\right)^{3/2} + \left(1+\frac{\Delta r}{r}\right)^{3/2}\right].$$

其中 l 是磁面的周长，近似用 $l=r$ 代入，得

$$\bar{v}_{\parallel} \sim v_t\sqrt{\varepsilon}. \tag{16.157}$$

最后有约束粒子周期运动的特征时间——反弹时间及反弹频率

$$\tau_b = \frac{qR}{v_t}\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} = \frac{\tau_2}{\sqrt{\varepsilon}}, \quad \nu_b = \frac{v_t}{qR}\sqrt{\varepsilon} = \sqrt{\varepsilon}\,\nu_2. \tag{16.158}$$

由此可以看到：在同一磁面上，香蕉粒子完成一个完整周期轨道所花费的时间要比环形粒子的长，$\tau_b > \tau_2$.

以上是无碰撞时的情形，在考虑到有碰撞发生时，如果粒子的平均碰撞时间 τ_c 比它完成一个完整闭合(圆形或香蕉形)轨道的时间长，$\tau_c > \tau_b > \tau_2$，则碰撞对环行和香蕉粒子的运动均无影响. 但如果 $\tau_b > \tau_c > \tau_2$，则香蕉运动不可能完成，因此不存在香蕉粒子，但环形粒子仍然存在. 最后，如果碰撞足够频繁，有 $\tau_b > \tau_2 > \tau_c$，则香蕉和环形粒子都不可能存在. 因此带电粒子在环形磁场中的运动轨道还与碰撞的多少有密切关系.

16.4.2　输运系数的流体、平台和香蕉区

对等离子体来说，库仑碰撞频率与温度成反比，$\nu_c \propto T^{-3/2}$. 当温度从低到高变化时，碰撞频率 ν_c 由大变小，平均自由程 λ_c 则由长变短. 这样，当温度较低时(一般在放电的初期或等离子体的外层)由于碰撞频繁，只有小环形粒子可以存在，而大一点的环形粒子和香蕉粒子在转不到一个完整轨道之前就因碰撞而离开原轨道

了. 这种等离子体的参数范围称为输运过程的流体区(图 16.4)，它们的输运系数由于环效应(由磁流体平衡条件和电荷守恒而出现的平行电流——它正比于径向压强梯度——产生了角向电场，从而通过电漂移引起附加的径向粒子流)而被增大

$$D_r^{ps} = (1+q^2)D_{\perp}. \tag{16.159}$$

其中 $D_{\perp}$ 是平板几何位形下，垂直磁场方向的(经典)扩散系数. D_r^{ps} 又称 Pfirsch-Schluter 扩散系数，可以通过磁流体平衡条件导出，详见本书第二章的开头部分. 由于 $q>1$，所以流体区的输运系数一般可比其经典值大一个量级左右.

然后，随着温度的增高，碰撞频率下降，平均碰撞自由程变大. 当 $\nu<\nu_2$ 时，中等大小的环形粒子与小的香蕉粒子可以存在，它们开始对输运起作用. 等离子体的参数范围进入了所谓的(输运过程)平台区(图 16.4).

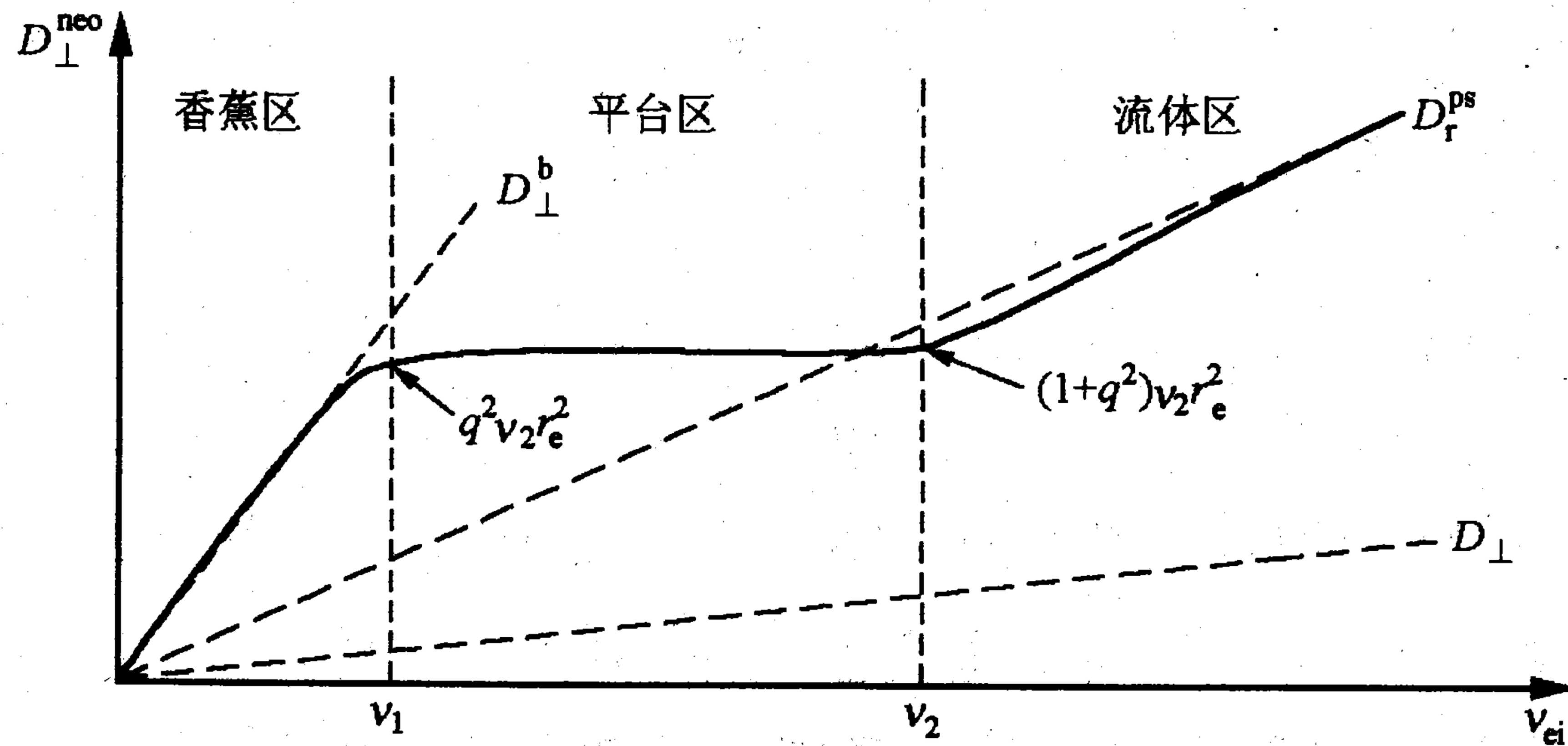


图 16.4　新经典输运系数的三个区域

最后，当温度继续升高至 $\nu<\nu_1$ 时，大环形粒子和中、大型香蕉粒子也出现了，并对输运过程产生重大影响. 粒子输运就进入了所谓的香蕉区(图 16.4).

等离子体的各类输运系数在上述三个区中的量值和表达式是完全不同的，因此首先必须根据实地的等离子体参数(温度和密度——它们决定了碰撞频率的大小)来确定用哪一个区的输运系数

表达式，然后通过合适的公式求出各类系数的量值. 这种因环形磁场效应而复杂化的输运理论被称为"新"经典输运，以区别于平直磁场中的普通(经典)输运. 有时只把香蕉区的输运称为新经典的，这是窄义的新经典输运.

下面将讨论上述三个输运区的分界. 首先是流体区和平台区的分界点，由于在求 τ_2 时，我们取的轨道长度 qR 大约是中等环形粒子的轨道特征长度，故可以把它当作流体区和平台区的分界点. 即当 $\nu_c<\nu_2$ 时，输运就进入平台区. 至于平台区和香蕉区的分界点 τ_1，显然应该和香蕉粒子的反弹频率有关，但它们之间又不能直接地对应过去. 这是因为等离子体的经典碰撞时间 τ_c 定义成入射粒子的初始速度经多次小角散射后，其偏转积累到 90°角时所花费的时间；而上面定义的反弹时间 τ_c 则是香蕉粒子运行一周所用去的时间，在此期间粒子的速度经历了两次几乎 180°的大偏转. 显然两者的定义不对等，为此应该利用香蕉粒子的反弹时间但按经典碰撞时间的定义式来估算对应的碰撞时间，

$$\tau_1 = -\frac{v^2}{\left\langle \frac{dv_\perp^2}{dt} \right\rangle} \approx -\frac{v_t^2}{\Delta v_\perp^2}\Delta t. \tag{16.160}$$

其中的 Δt 应取成完成一次香蕉运动所需的反弹时间，而 $\Delta v_\perp^2$ 则应取成在一个香蕉周期中垂直速度平方的平均改变量 $\langle \Delta v_\perp^2 \rangle$. 这个量可以利用香蕉运动保持总动能守恒来得到. 由守恒条件

$$\frac{1}{2}mv_\parallel^2 + \frac{1}{2}mv_\perp^2 = \text{常数},$$

有

$$\langle \Delta v_\perp^2 \rangle = -\langle \Delta v_\parallel^2 \rangle$$
$$\approx -\left[v_\parallel^2(r+\Delta r_b) - v_\parallel^2(x_m)\right]$$
$$(\text{由 } v_\parallel(x_m)\equiv 0) \approx -v_\parallel^2(r) = -\left(v_t\sqrt{\frac{r-x_m}{R_0}}\right)^2$$

$$\approx -v_t^2\frac{r}{R_0} = -\varepsilon v_t^2.$$

将 $\Delta t=\tau_b$ 和 $\Delta v_\perp^2=\langle \Delta v_\perp^2\rangle=-\varepsilon v_t^2$ 代入定义式(16.160)后，得

$$\tau_1 = \frac{\tau_b}{\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon^{3/2}}\frac{qR}{v_t}, \tag{16.161}$$

上式最后的因子正是 τ_2(见式(16.155)). 对应的平台-香蕉分界频率为

$$\nu_1 = \frac{1}{\tau_1} = \varepsilon^{3/2}\nu_2. \tag{16.162}$$

16.4.3 扩 散 系 数

下面以垂直(于磁场的)扩散系数为例，并用无规行走方法来估算它在上述三个参数区中的表达式

$$D_\perp = \frac{(\Delta x)^2}{\tau}.$$

其中 Δx 是行走的平均步长，而 τ 是行走每一步的平均时间.

对平直磁场中的等离子体，可取无规行走的步长为回旋半径 $\Delta x=r_c$，而取经典的碰撞时间为行走的平均时间 $\tau=\tau_c$，这样就得到了经典的垂直扩散系数

$$D_\perp = \frac{r_c^2}{\tau_c}. \tag{16.163}$$

对于环形磁场中的等离子体，在流体区中，因为存在着大量环形粒子，对它们由于碰撞而引起的扩散，可以取前面给出的环形粒子(其圆形轨道中心对磁面中心)的偏离距离为无规行走的步长 $\Delta x=qr_c$ 来估算扩散系数. 这是因为碰撞能剧烈地改变环形粒子的速度值，在典型的情况下会使一个 $v_\parallel<(>)0$ 的环形粒子变成一个 $v_\parallel>(<)0$ 的环形粒子，相应的环行轨道中心就会因碰撞而突然在径向跳动一步 Δr. 由于碰撞的随机性，这种径向的跳动就类似无规行走. 结果有

$$D_{\perp}^{\text{flay}}=\frac{q^2r_c^2}{\tau_c}=q^2\nu_c r_c^2=q^2D_{\perp},$$

其中上标 flay 表示飞行粒子. 再加上大量的没有形成任何封闭轨道的粒子所造成的经典扩散系数,就可以得到流体区的 Pfirsch-Schluter 扩散系数

$$D_{\perp}^{\text{ps}}=(1+q^2)D_{\perp}. \tag{16.164}$$

根据同样的图像,在香蕉区中、由于存在着大量的香蕉粒子,可以用香蕉粒子的半宽当成无规行走的步长 $\Delta x=\varepsilon^{-1/2}qr_c$,用香蕉粒子的反弹时间来代表行走一步的平均时间 $\tau=\tau_b=\varepsilon\tau_1$. 这样得到香蕉粒子的扩散系数

$$D_{\perp}^{b'}=\frac{(\varepsilon^{-1/2}qr_c)^2}{\varepsilon\tau_1}=\nu_c\varepsilon^{-2}q^2r_c^2.$$

上式最后用 ν_c 代替了 ν_1,这是因为在香蕉区的等离子体参数取值范围内两者是近似相等的. 相应的香蕉粒子扩散流应表示成

$$\Gamma^b=-D_{\perp}^{b'}\nabla n_b.$$

但这还不是通常意义下的扩散流表达式,因为一般在给出粒子流时,总是用粒子总密度梯度而不是香蕉粒子的密度梯度来表示的. 为此应当将上式中的香蕉粒子密度用总粒子密度表示出来,因为 $n_b\sim\sqrt{\varepsilon}\,n_0$(见(16.150)式),故最终有

$$\Gamma^b=-D_{\perp}^{b}\nabla n_0,\quad D_{\perp}^{b}=\sqrt{\varepsilon}\,D_{\perp}^{b'}=\varepsilon^{-3/2}q^2D_{\perp}. \tag{16.165}$$

上面得出的两个扩散系数 $D_{\perp}^{\text{ps}}$和 $D_{\perp}^{b}$ 也就是图 16.4 中流体区和香蕉区中的扩散系数曲线的斜率. 流体区扩散系数曲线在流体-平台分界点处的值为(将流体区扩散系数公式中的碰撞频率 ν_c 用 ν_2 代入)$(1+q^2)\nu_2r_c^2$;而香蕉区扩散系数曲线在平台-香蕉分界点处的值为(将香蕉区扩散系数公式中的碰撞频率 ν_c 用 ν_1 代入)$q^2\nu_2r_c^2$. 由于 $q^2\gg1$,故在整个平台区中扩散系数基本上是频率无关的,也即在图 16.4 的中间部分($\nu_1\leqslant\nu_c\leqslant\nu_2$)扩散系数曲线呈平台型——这就是输运过程中平台区得名的原因.

由新经典输运系数的三区图可以看到,按扩散系数的绝对值来比,流体区的最大;而按曲线的斜率来比,香蕉区的最大. 一般说新经典输运系数比经典输运系数大,这是取同样碰撞频率时的对比结果.

16.4.4 环形磁场中特有的输运现象

环形磁场不仅使原来的经典输运系数增大成对应的新经典系数,而且产生了许多全新的、在经典输运中不存在的输运过程,后者在物理上是更为重要的. 本节就从定性上来介绍这些特殊的输运流和输运系数.

1. 由密度梯度引起的输运流

对于环形等离子体,一般在小半径方向总是不均匀的,即中心的密度高而边缘的密度低. 这样对于某个磁面来说,在磁面内的粒子(环行和香蕉都一样)密度总是比磁面外的大,故通过下面的几种碰撞过程,总会产生粒子从磁面内向磁面外的扩散流、热流以及沿磁面的附加电流(也称自举电流).

(1) 粒子流

在环形等离子体中,存在着多种粒子,如环行电子(ue)、离子(ui),约束电子(te)、离子(ti). 它们之间的各种碰撞会贡献不同的粒子径向流. 下面就分别来讨论.

(i) 由 te,ue-i 碰撞引起的粒子流.

这时离子 i 可以当成静止的,而约束电子则在碰撞后外跳了一个香蕉半宽 $\sim\varepsilon^{-1/2}qr_e$. 故相应的粒子流是

$$\begin{aligned}\langle n_e v_{er}\rangle^{(1)}&=-\alpha_{ei}\varepsilon^{-3/2}q^2\nu_{ei}r_e^2\frac{dn}{dr}\\&=-\alpha_{ei}\varepsilon^{-3/2}q^2D_{\perp}\frac{dn}{dr}\\&=D_{e\perp}^{(\text{neo}1)}\frac{dn}{dr}.\end{aligned}$$

上式中上标 neo 表示"新经典". 系数 $\alpha_{ei}\approx 0.7$，由三部分组成：(a) 大香蕉和慢(大)环形粒子与离子的碰撞(它们的 Δr_b 最大)；(b) 快(小)环行电子与离子的碰撞(它们的数量多)；(c) 小香蕉粒子与离子的碰撞(它们不但量少，Δr_b 也小). 这些过程所造成粒子流的比例大致为：

$$1:1/6:\varepsilon.$$

(ii) 由 te-ue 碰撞引起的粒子流.

这时，和 ue 相比，te 比较局域化，因此其行为类似于离子(即在一定的时间内只能在一定的范围内运动). 于是 te-ue 间碰撞后，由于两类粒子轨道中心分别向内、外跳动得不对等 $\delta r_b\neq\delta r$，也可能产生一个纯的径向位移，从而引起粒子扩散. 这时对扩散流贡献最大的仍然是大香蕉和慢(大)环形粒子.

但和 te-i 间的碰撞不同：在 te-i 碰撞前后，电子和离子间能量交换很小(它们的质量相差约 2000 倍)，因此电子、离子的能量在碰撞前后近似守恒，能量分布函数几乎不变；而在 te-ue 的碰撞前后，有很大的能量交换(这两种电子质量相同)，这就引起了能量分布函数的较大改变，最后影响到由这种分布函数算出的碰撞频率中会出现一(相对于离子-电子碰撞的结果)附加因子 $A(\chi_e)$，

$$\nu_{ee}(\chi_e)=A(\chi_e)\nu_e(\chi_e),\quad \chi_e=m_e v_e^2/(2T_e).$$

在完成了对速度空间的积分后，这个附加因子会对扩散系数贡献一个数值的附加因子 $\sqrt{2}-\ln(1+\sqrt{2})\approx 0.53$，于是 te-ue 碰撞会产生一个新碰撞流系数

$$\alpha_{ee}=0.53\alpha_{ei}.$$

最后将两种流相加，得到总的电子扩散流

$$\langle n_e v_{er}\rangle=-D_{e\perp}^{neo}\frac{dn_e}{dt},\quad D_{e\perp}^{neo}=\alpha_e\varepsilon^{-3/2}q^2\nu_{ei}r_e^2,$$

$$\alpha_e=\alpha_{ei}+\alpha_{ee}=1.07. \qquad (16.166)$$

(2) 热流

上面产生的径向粒子流，在向外扩散的同时还携带着自己的

热能，从而形成了一个由密度梯度引发的热流

$$q_j=\langle n_j v_{jr}\rangle T_j,\quad j=e,i. \qquad (16.167)$$

(3) 无碰撞电流和靴带电流

由于电流主要是沿磁力线方向流动的，故显然只有环形电子 ue 才是电流的最主要的携带者. 因此涉及的碰撞过程中一定有一方是环形电子.

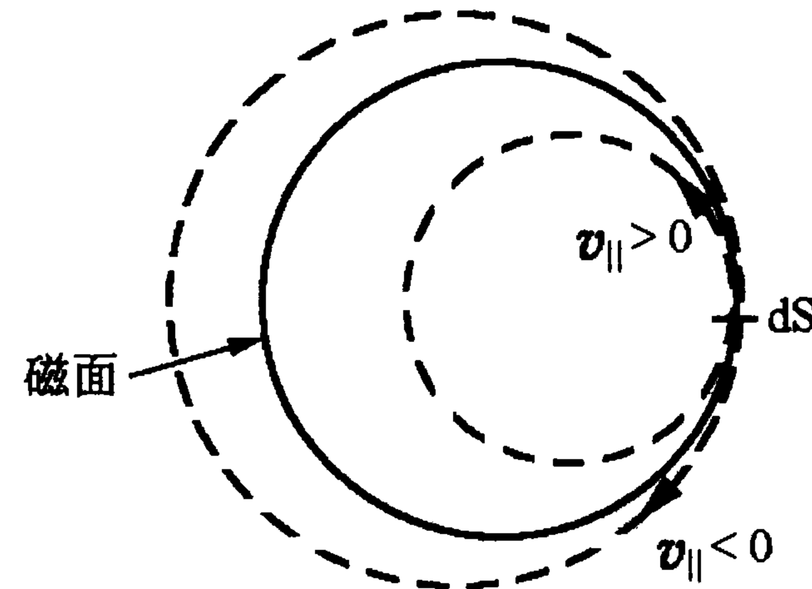


图 16.5 无碰撞电流示意图

(i) 无碰撞附加电流.

在赤道面中垂直于磁面的一个窄环带 dS 上(图 16.5)，由于 $v_\parallel>0$ 的 ue 来自此磁面的内部，其密度高于来自磁面外部的 $v_\parallel<0$ 电子密度，因此形成了一个穿过 dS 面并和原感应电流方向一致(即 $v_\parallel>0$)的无碰撞附加电流

$$I_{ei}=-\frac{2c}{B_\theta}\alpha_{ei}\varepsilon^{3/2}T_e\frac{dn}{dr}. \qquad (16.168)$$

(ii) 碰撞引起的电流——靴带电流.

前面所说的 te-ue 碰撞，在使约束粒子 te 速度反向、轨道中心跳动而引起扩散的同时，被撞的环形粒子也会受到一个反作用力，这个力和约束粒子原来的运动方向相同. 在图 16.5 的 dS 处，由于密度梯度存在，沿磁力线方向的约束电子(来自该磁面内，$v_\parallel>0$)总比朝相反方向运动的约束电子多，因此被沿原感应电流方向($v_\parallel>0$ 的方向)加速的环形电子总比被减速的多，其结果是引出了一个和感应电流同方向的附加电流. 携带这种电流的环形电子可以想象成为被分布在其轨道各处的固定约束粒子接连抽打而不断加速. 每抽打一下，其速度方向都可能略有改变，但并不反向；结果其轨道有点像一条靴带的样子——由此得到了靴带电流的名称.

对靴带电流的影响来自三种碰撞过程：加速 ue 的有一种 ue-te；减速环形电子的有两种(ue-i，ue-ue，te)，把它们的结果综合起

来后，得靴带电流的量值为

$$I_{ee}=-0.9\varepsilon^{1/2}\frac{c}{B_\theta}T_e\frac{dn}{dr}. \tag{16.169}$$

把它和无碰撞电流相比，可知 $I_{ei}\propto\varepsilon I_{ee}$，因此无碰撞电流实际上比碰撞电流小很多.

2. 由温度梯度引起的输运流

和密度梯度一样，温度梯度也是负的，$dT/dr<0$. 如果取上一节的粒子轨道图，则 $v_\parallel>0$（位于磁面内）的粒子能量要比 $v_\parallel<0$（位于磁面外）的能量大，这就产生了以下的输运过程.

（1）热流

在热流中，离子热流要比电子热流大得多. 离子间的碰撞并不引起扩散流，但可以产生热流. 而对离子热流贡献最大的首先是 ti-ui 碰撞；其次是 ui-ui 碰撞. 结果有

$$q_i=-\kappa_i^{neo}\frac{dT_i}{dr}. \tag{16.170}$$

其中新经典热导值 κ_i^{neo} 将在下一小节给出.

（2）热电流和热扩散

在存在温度梯度时，ue-te，ue-ti，ui 的碰撞能使环形电子 ue 受到一个和原电流方向一致的加速力，从而产生一个附加的热电流

$$I_{th}\propto\frac{dT}{dr}.$$

这就是所谓的热电（能斯特）效应. 从动理学的原理来说，这是因为碰撞使环形电子能量分布函数偏离了热平衡态而造成的.

反过来，在引起热电流 I_{th} 同样的碰撞过程中的 te，ti，ui 也会受到一个反作用力使其速度反向，同时它们的周期轨道中心产生一个径向的跳动. 最后引起了径向的扩散（收缩）粒子流——这就是热扩散，

$$\Gamma_{th}\propto\frac{dT}{dr}.$$

3. 自举电流及附加的箍缩效应

当等离子体中只存在感应（欧姆）电流时，按欧姆定律会同时存在一个环向电场 $E_\varphi=E_z$，它和角向磁场 B_θ 一起会产生径向朝内的粒子流——这通常被称为电流箍缩（ware pinch），

$$\langle nv_r\rangle^E=-2\alpha_{ei}\varepsilon^{1/2}n\frac{cE_z}{B_\theta}. \tag{16.171}$$

现在，由于环效应、出现了三种附加电流：$I^{neo}=I_{ei}+I_{ee}+I_{th}$，通常把它们统称为自举电流. 它们也会产生一个额外的内向箍缩粒子流

$$\langle nv_r\rangle^{neo}=-\alpha_I\frac{D_e}{T_e}\frac{I^{neo}B_\theta}{c}. \tag{16.172}$$

一般 $I^{neo},B_\theta,E_z>0$，故上面所给出的两种粒子流均是向内的箍缩流，都对环形等离子体在径向的约束起帮助作用.

16.4.5 新经典输运方程概观

环形磁场引起的新经典效应不但发生在输运流中，也出现于输运方程中. 本节就系统地给出新经典输运方程及输运流的表达式，它们是由 Rosenbluth 等人给出的. 但首先提出并计算各种新经典输运过程的是苏联的学者 Galeev 和 Sagdeev. 上一节给出的定性但图像清晰的描述就是来自他们的结果. 这里并不讨论详细的推导过程，有兴趣的读者请查阅文献[9]—[12].

1. 输运方程组

在准中性条件（$n=n_e=n_i$）下，粒子输运方程是

$$\frac{\partial n}{\partial t}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\Gamma)=0. \tag{16.173}$$

电子和离子的热（温度）平衡方程分别为

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{3}{2}nT_e\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\left(Q_e+\frac{5}{2}\Gamma T_e\right)$$
$$=-Q_\Delta-T_i\Gamma\left(\frac{n'}{n}-0.172\frac{T_i'}{T_i}\right), \tag{16.174}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{3}{2}nT_i\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\left(Q_i+\frac{5}{2}\Gamma T_i\right)$$
$$=Q_\Delta+T_i\Gamma\left(\frac{n'}{n}-0.172\frac{T_i'}{T_i}\right), \qquad (16.175)$$

其中

$$Q_\Delta=\frac{T_e-T_i}{\tau_T} \qquad (16.176)$$

是由于电子-离子碰撞引起的经典能量交换,而两方程的最后一项则是碰撞引起的新经典能量交换项. 它们大小相等但符号相反,以保持总的电子-离子系能量(在弹性碰撞下)守恒.

上述输运方程中的输运流和角向磁场 B_θ 有关,而 B_θ 又通过法拉第定律和环向电场(进而环向电流,见(16.177)式)相联系.

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}_\theta}{\partial t}=-\nabla\times\boldsymbol{E}_\parallel. \qquad (16.177)$$

2. 电流

式(16.177)中的平行(环形)电场又和平行(环形)电流通过欧姆定律相联系,

$$\boldsymbol{E}_\parallel=\frac{0.51m_e}{e^2n\tau_e}\frac{1}{1-1.95(r/R)^{1/2}}\left\{J_\parallel-\frac{cnT_e}{B_\theta}\left(\frac{r}{R}\right)^{1/2}\right.$$
$$\left.\cdot\left[-2.44\left(1+\frac{T_i}{T_e}\right)\frac{n'}{n}-0.69\frac{T_e'}{T_e}+0.42\frac{T_i'}{T_e}\right]\right\}.$$

上式中第一项的第一个因子就是经典(无磁场环效应)的(平行)电阻率;第一项的第二个因子是由于环效应而产生的新经典数值修正因子,显然这个因子是大于 1 的,也即新经典电阻比经典电阻要大. 大括号中的项是总电流,其中 $J_\parallel$ 项是感应电流,而后面的项则是所有环形效应引起的附加电流(无碰撞电流、靴带电流和热电流)之和——也被称为自举电流. Galeev 等人用不同方法算出的自举电流与这里给出的表达式及系数都基本相符,但电阻的新经典修正因子却有定性上的差别: 这个因子在那里是小于 1 的. 因此按 Galeev 的结果,新经典的电阻比经典值要小. 现在,通常认为

Rosenbluth 等人的计算结果是正确的. 除了这点,Galeev 等人的结果(包括下面的粒子流和热流)和这里给出的(Rosenbluth 等人的)结果基本相符.

3. 粒子流

由于双极电场的影响,电子流 Γ_e 和离子流 Γ_i 在输运的时间尺度上是完全相等的,统称为双极粒子流 Γ,它的新经典表达式为

$$\Gamma=\left(\frac{B}{B_\theta}\right)^2\left(\frac{r}{R}\right)^{1/2}\frac{r_e^2}{\tau_e}n\left[-1.12\left(1+\frac{T_i}{T_e}\right)\frac{n'}{n}\right.$$
$$\left.+0.43\frac{T_e'}{T_e}+0.19\frac{T_i'}{T_e}\right]-2.44\frac{nE_\parallel}{B_\theta}\left(\frac{r}{R}\right)^{1/2}.$$

其中的最后一项就是经典箍缩效应造成的径向朝内的粒子流——电流箍缩. 右面第一大项则是密度梯度引起的扩散及温度梯度引起的热扩散,而附加电流造成的箍缩效应也一并包括在内了.

4. 热流

输运方程中的总电子热流(扩散粒子流所携热流与碰撞热流之和)表达式是

$$Q_e=\left(\frac{B}{B_\theta}\right)^2\left(\frac{r}{R}\right)^{1/2}\frac{r_e^2}{\tau_e}nT_e\left[1.53\left(1+\frac{T_i}{T_e}\right)\frac{n'}{n}\right.$$
$$\left.-1.81\frac{T_e'}{T_e}-0.27\frac{T_i'}{T_e}\right]+1.75\frac{nE_\parallel}{B_\theta}T_e\left(\frac{r}{R}\right)^{1/2}.$$

而总离子热流为

$$Q_i=-\left(\frac{B}{B_\theta}\right)^2\left(\frac{r}{R}\right)^{1/2}\frac{r_i^2}{\tau_i}nT_i'[0.48(1+(m_e/m_i)^{1/2})]. \qquad (16.178)$$

参 考 文 献

[1] Balescu R. Transport Processes in Plasmas, Vol. 1. Elsevier Science Publishing Company Inc., North-Holland, 1988

[2] Braginskii S I. Transport Processes in a Plasma, *in* Reviews of Plasma Physics, Vol. 1, ed. Leontovich M A. Consultants Bureau, New York, 1965. 205, 214—219, 249—253

[3] V. E. 戈兰特等. 等离子体物理基础. 北京:原子能出版社,1983
[4] 马腾才,胡希伟,陈银华. 等离子体物理原理. 合肥:中国科学技术大学出版社, 1988. 187
[5] Hinton F L. *in* Handbook of Plasma Physics, Vol 1. North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1983. 171—196
[6] Kadomtsev, Pogutse. Proc. 7th Conf. Vienna, Vol. 1, 1979. 649
[7] Haaset *et al*. Plasma Phys. ,**23**(1981)1027;
Plasma Phys. Contr. Fusion, **31**(1989)965
[8] Wootton A J *et al*. Phys. Fluids, **B2**(12)(1990)2879
[9] Galeev A A, Sagdeev R Z, *in* Reviews of Plasma Physics, Vol. 7. Consultants Bureau, New York, 1979
[10] Rosenbluth M N, Hazeltine R D, Hinton F L. Phys. Fluids, **15** (1972)116
[11] Balescu R. Transport Processes in Plasmas, Vol. Ⅱ. North Holland, 1988
[12] Metens T, Balescu R. Phys. Fluids, **B2**(9)(1990)2076

第十七章　波驱动电流

在本书 13.2 节中,我们讨论了在无碰撞条件下平衡(慢变)速度分布函数的准线性演化方程. 按这个方程,一个近热力学平衡态的速度分布,在外界持续注入波的作用下,会在波相速所对应的粒子速度附近隆起一个平台. 由于此平台在速度空间的不对称性,会使此带电粒子(一般是电子)系产生一个非零的平移(均)速度,因而出现一个宏观的电流. 这电流不必由电磁感应而导致的外电场来维持,是一种非感应的等离子体电流——称为波驱动电流. 原则上只要外加的波场足够强和足够长,就能在等离子体中维持一个稳态的电流. 由于 tokamak 中等离子体的平衡与稳定必不可缺地依赖于这个电流,而传统的感应等离子体电流又不可能长久维持,因此波驱动电流和上节谈到的由环效应而产生的等离子体自举电流就成为稳态运行的 tokamak 聚变堆必备的技术手段.

但在波驱动电流的延续时间超过了等离子体碰撞时间的情况下,无碰撞的准线性描述就不能胜任了. 这时的动理学方程组必须加入碰撞算子(或碰撞积分)项

$$\frac{\mathrm{d}f_\alpha}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial t}\right)_{\mathrm{w}} + \left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial t}\right)_{\mathrm{c}}. \tag{17.1}$$

其中右面第一项就是准线性方程中的速度空间扩散算子,而右面第二项则是碰撞项. 在外来波驱动下,第一项通过逆朗道阻尼,在速度空间使平衡分布函数(在波的相速度附近)产生一个平台;而第二项表示弹性碰撞,它的作用是使任何偏离热平衡的分布函数,在平均碰撞的时间尺度上趋于麦克斯韦热平衡分布——也就是消除这个平台. 最后,在达到稳态时,方程右面的两项应该相互抵消,

这时形成的稳态分布是一个在波的相速度处略有隆起，但并不平坦的非热平衡分布．它能在波存在的时间范围内持续地驱动等离子体的非感应电流．

原则上，任何能通过波-粒子、波-波相互作用而使平衡的电子速度分布函数在平行磁场方向上出现非对称隆起的动理学机制，都可以驱动出非感应的稳态电流．上面给出的只是最简单、最直接的一种机制．下节还将讨论另一种常采取的驱动方式．至于其他的、较为复杂和间接的驱动机制，这里就不介绍了．有兴趣的读者可以参考其他书籍和文献，文献[1]是一本较好的入门参考书．

以上的讨论，说明了波驱动电流在定性上是可行的．但为了能用最节省的方法来驱动出非感应电流，必须进一步讨论波驱动电流的效率，也即如何能尽量提高电流密度与波功率的比值(J/P)．在 17.1 节，首先对这个问题作一简单、定性的讨论，然后在 17.2 节中通过对加入了福克尔-普朗克碰撞项的准线性方程求解析解，来作比较更定量一点的分析．从动理学理论的角度来看，电流驱动是一个全面考虑了(无碰撞的波-粒子相互作用和弹性碰撞)两种动理学效应共同影响的不可多得的范例．

17.1　唯象讨论

外加电磁波在等离子体中驱动出电流，主要依靠两种不同的动理学波-粒子共振相互作用机制：平行于磁场方向的逆朗道阻尼，和垂直于磁场方向的回旋加热．上面谈的只是第一种机制，本节还将给出第二种机制的唯象描述．

17.1.1　逆朗道阻尼(平行磁场方向)

当波沿磁场方向传播(或有平行磁场方向的 $k_\parallel$)时，可以通过逆朗道阻尼机制加速速度略低于波(平行磁场)相速度的电子

$v_\parallel \gtrsim v_{ph}=\omega/k_\parallel$．假若在一个平均碰撞时间($\tau_c$)内，被加速电子的速度从

$$v_\parallel \rightarrow v_\parallel + \delta v_\parallel,$$

于是在 τ_c 时间内，这个电子的动能相应增加

$$\varepsilon = mv_\parallel \delta v_\parallel,$$

同时这个电子便会贡献电流密度

$$j = q\delta v_\parallel. \tag{17.2}$$

而这个电子的功率(单位时间内的能量)增大量为

$$p = \frac{\varepsilon}{\tau_c} = \nu_c\varepsilon = m\nu v_\parallel \delta v_\parallel. \tag{17.3}$$

如欲保持稳定的驱动电流，则电子所增功率应该由外加电磁波来提供，也即外波源至少要输入这么多的功率．由此，可以估算出驱动效率为

$$\frac{j}{p} = \frac{q}{m\nu v_\parallel}. \tag{17.4}$$

考虑到带电粒子的碰撞频率对等离子体参数有以下依赖关系

$$\nu_c \propto \frac{n}{v_t^3} = \frac{n}{(v_\parallel^2+v_\perp^2)^{3/2}},$$

结果有

$$\frac{j}{p} \propto \frac{q}{m}\frac{(v_\parallel^2+v_\perp^2)^{3/2}}{nv_\parallel} \propto \frac{T}{n}. \tag{17.5}$$

利用上面的结果可以讨论驱动效率对外加电磁波相速(因而频率)的依赖关系(图 17.1)．

(i) 对于低频电磁波，因为有

$$v_\parallel \gtrsim v_{ph} \ll v_t = \sqrt{v_\parallel^2 + v_\perp^2},$$

故近似地有 $v_t \sim v_\perp$，结果得到

$$\frac{j}{p} \propto \frac{1}{v_\parallel} \sim \frac{1}{v_{ph}}. \tag{17.6}$$

(ii) 对于高频电磁波，$v_{ph} \gg v_t$，故有

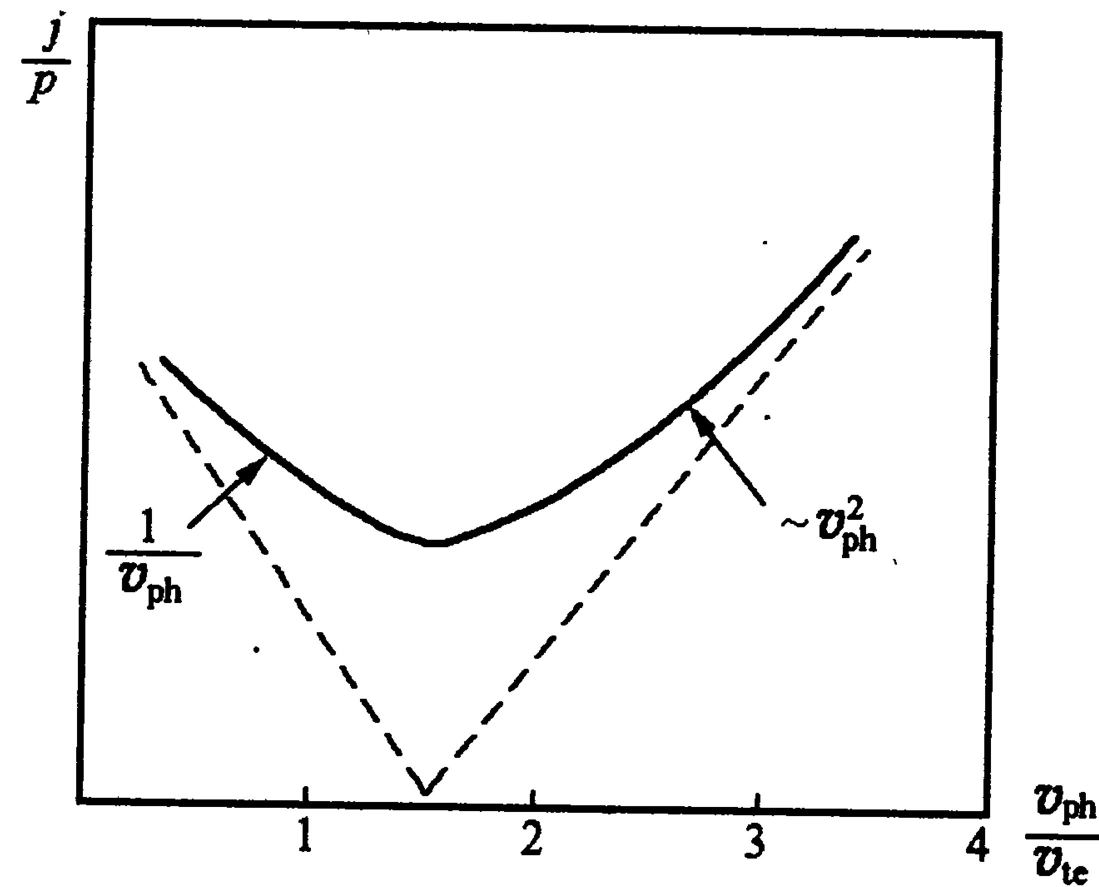


图 17.1 驱动电流的效率与电磁波相速度关系图

$$v_\parallel \gtrsim v_{ph} \gg v_\perp,$$

结果有

$$\frac{j}{p} \propto v_\parallel^2 \sim v_{ph}^2. \tag{17.7}$$

这表明无论在低频端还是高频端都会有较高的驱动效率，在低频段我们通常利用阿尔文波来驱动电流，而在高频段可以用低杂波、电子回旋波，等等来驱动电流. 目前，用得最多和最成功的是低混杂波驱动电流.

17.1.2 回旋加热(垂直磁场方向)

波-粒子的另一种共振型相互作用是回旋共振. 当电子回旋波注入磁化等离子体时，电子在垂直于磁场方向上被加速，使 $v_\perp \to v_\perp + \delta v_\perp$. 结果电子的总速度 $v=\sqrt{v_\parallel^2+v_\perp^2}$ 增大，进而碰撞频率下降，使平行方向的电子摩擦阻力下降. 最后使平衡时电子平行速度增大，和上面的逆朗道阻尼机制达到了同样的效果.

在波注入之前，电子在平行磁场方向的运动方程为

$$\frac{dv_\parallel}{dt} = -\frac{e}{m}E + \nu_c v_\parallel.$$

其中 E 是外加的感应电场(如果存在其他的力项，也可以等效地折入这里)，当达到稳态时摩擦力和电场加速力相抵消，

$$\nu_c v_\parallel = \frac{e}{m}E.$$

在电子回旋波注入并加热电子后，上式变成

$$(\nu_c + \delta\nu_c)(v_\parallel + \delta v_\parallel) = \frac{e}{m}E,$$

于是由 $\nu_c v_\parallel = (\nu_c + \delta\nu_c)(v_\parallel + \delta v_\parallel)$ 可以得出电子平行速度的增量为

$$\delta v_\parallel = -\frac{\delta\nu_c}{\nu_c} v_\parallel. \tag{17.8}$$

考虑到

$$\nu_c \propto \frac{1}{v_t^3}, \quad \Rightarrow \quad \delta\nu_c = -\frac{3}{2}\frac{2v_\perp \delta v_\perp}{v^5} = -3\nu_c \frac{v_\perp \delta v_\perp}{v_\parallel^2 + v_\perp^2},$$

按前面的办法，同样可求出每个电子平均驱动出的电流

$$j = q\delta v_\parallel = -q\frac{\delta\nu_c}{\nu_c}v_\parallel, \tag{17.9}$$

以及维持这个电流所需的波功率

$$p = mv_\perp \delta v_\perp. \tag{17.10}$$

所以最后得驱动效率

$$\frac{j}{p} = \frac{3qv_\parallel}{m\nu_c(v_\parallel^2 + v_\perp^2)} \propto \frac{3qv_\parallel(v_\parallel^2 + v_\perp^2)^{1/2}}{nm} \propto \frac{T}{n}. \tag{17.11}$$

17.1.3 总驱动效率

按定义，总的驱动电流为

$$I = njA, \quad A = \pi a^2,$$

其中 a，A 分别是小截面的半径和面积. 总的波吸收功率为

$$P = npV, \quad V = 2\pi R \cdot A,$$

其中 R 是环的大半径，V 是整个等离子体环的体积. 于是有总驱

动效率

$$\frac{I}{P}=\frac{1}{2\pi R}\frac{j}{p}\propto\frac{1}{R}. \tag{17.12}$$

可以看到,它不但和驱动过程的动理学机制有关,还和环的几何尺寸有关.反过来,由实验测量到的 I 和 P,可以得出

$$\frac{j}{p}=2\pi\frac{RI}{P}\propto\frac{RI}{P}.$$

正是这个量(已经排除了几何因素的影响)才可以直接和动理学理论的估算值作比较.

17.2 动理学分析

本节将从带福克尔-普朗克碰撞算子的准线性方程出发,导出高频波驱动电流的效率.依照的是 Fisch 第一次提出波驱动电流时用的方法,当时他仅是一个博士生.现在,波驱动电流的动理学理论虽然更完备、更准确了(例如全面计入了波从天线的发射,波在非均匀环形等离子体中的传播反射和吸收,以及最后导致的电子平衡速度分布函数在空间的剖面).但这里依照 Fisch 的方法给出的描述仍不失为一个极好的入门参考资料.

由于对等离子体电流作出主要贡献的是电子在平行磁场方向的速度,故出发方程(假定无平衡外电场,等离子体是空间均匀的并采取平板几何模型)是

$$\frac{\partial f_e}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial v_{e\parallel}}D(v_{e\parallel})\frac{\partial f_e}{\partial v_{e\parallel}}+\left(\frac{\partial f_e}{\partial t}\right)_{c\parallel}, \tag{17.13}$$

其中 $v_{e\parallel}$ 是 $\boldsymbol{v}_e$ 中与磁场方向一致的分量.下面将略去所有表示电子的下标.存在弱直流电场时,此问题解析解可参考文献[2].

17.2.1 碰撞算子的简化

对福克尔-普朗克碰撞算子的一般表达式

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_c=\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{v}}\left[-\cdot\langle\Delta\boldsymbol{v}\rangle f+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{v}}:(\langle\Delta\boldsymbol{v}\Delta\boldsymbol{v}\rangle f)\right]$$

可以作简化:利用

$$\left(\frac{\partial f_M}{\partial t}\right)_c\equiv 0,\quad 及\ f_M\propto\exp\left(-\frac{m}{2T}v^2\right),\quad\Rightarrow\quad\frac{\partial f_M}{\partial \boldsymbol{v}}=-\frac{m}{T}\boldsymbol{v}f_M,$$

结果有

$$-\langle\Delta\boldsymbol{v}\rangle+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{v}}\cdot\langle\Delta\boldsymbol{v}\Delta\boldsymbol{v}\rangle=\frac{m}{T}\boldsymbol{v}\cdot\frac{1}{2}\langle\Delta\boldsymbol{v}\Delta\boldsymbol{v}\rangle.$$

故最后得简化的碰撞算子

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_c=\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{v}}\cdot\left[\frac{1}{2}\langle\Delta\boldsymbol{v}\Delta\boldsymbol{v}\rangle\cdot\left(\frac{m}{T}\boldsymbol{v}f+\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{v}}\right)\right].$$

在出发方程(17.13)中的碰撞算子只用到上式的平行磁场分量:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{c\parallel}=\frac{\partial}{\partial v_\parallel}\left[\frac{1}{2}\langle\Delta v_\parallel\Delta v_\parallel\rangle\left(\frac{m}{T}v_\parallel f+\frac{\partial f}{\partial v_\parallel}\right)\right]. \tag{17.14}$$

现在还需要给出扩散系数 $\langle\Delta v_\parallel\Delta v_\parallel\rangle$ 的具体表达式.用 Rosenbluth 势可将它表示成

$$\langle\Delta v_\parallel\Delta v_\parallel\rangle=\Gamma_e\frac{\partial^2}{\partial v_\parallel\partial v_\parallel}G(\boldsymbol{v}),$$

$$G(\boldsymbol{v})=\sum_{\beta=e,i}\left(\frac{e_\beta}{e}\right)^2\int d\boldsymbol{v}_\beta u f(\boldsymbol{v}_\beta),\quad u=|\boldsymbol{u}|=|\boldsymbol{v}_e-\boldsymbol{v}_\beta|.$$

为了得到其明显表达式,下面将采用两个重要的近似.

1. 第一个近似

在波驱动电流时,起作用的是共振电子,但它们的数量很少,因此它们所经受的碰撞绝大多数都来自与非共振粒子的碰撞.对非共振粒子可以假定它们处在热平衡速度分布(即麦克斯韦分布)中.这样在计算势函数 $G(\boldsymbol{v})$ 时可以取 $f(\boldsymbol{v}_\beta)=f_{\beta M}$(参考式(15.46)):

$$G^M(\boldsymbol{v})=\sum_\beta G_\beta^M(\boldsymbol{v})$$

$$=\sum_\beta n_\beta Z_\beta^2\left[\left(v+\frac{1}{2a_\beta^2 v}\right)\Phi(a_\beta v)+\frac{\exp(-a_\beta^2 v^2)}{a_\beta\sqrt{\pi}}\right],$$

其中 $a_\beta^2=m_\beta/2T_\beta=1/v_{\beta t}^2$. 如果令 $x_\beta=a_\beta v=v/v_{\beta t}$,则势函数可用这个无量纲参数进一步表示成

$$G^{M}(\boldsymbol{v})=\sum_\beta \frac{n_\beta Z_\beta^2}{a_\beta}\left[\left(x_\beta+\frac{1}{2x_\beta}\right)\Phi(x_\beta)+\frac{\exp(-x_\beta^2)}{\sqrt{\pi}}\right], \quad (17.15)$$

其中 $\Phi(x_\beta)$是误差函数

$$\Phi(x_\beta)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-y^2}dy, \quad \Phi'(x_\beta)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}.$$

在求扩散系数时,涉及对速度的二阶微商,例如对于电子-电子碰撞(β=e),

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial v_\parallel\partial v_\parallel}G_e^{M}(\boldsymbol{v})&=\frac{n_e}{a_e}a_e^2\frac{\partial^2}{\partial x_\parallel\partial x_\parallel}\left[\left(x+\frac{1}{2x}\right)\Phi(x)\right.\\&\left.\quad+\frac{\exp(-x^2)}{\sqrt{\pi}}\right], \quad x=x_e=a_e v\\&=n_e a_e\frac{\partial}{\partial x_\parallel}\left[\left(\frac{x_\parallel}{x}-\frac{x_\parallel}{2x^3}\right)\Phi(x)+\left(x+\frac{1}{2x}\right)\right.\\&\quad\left.\cdot\Phi'(x)\frac{x_\parallel}{x}-\frac{2x_\parallel\exp(-x^2)}{\sqrt{\pi}}\right]\\&=n_e a_e\frac{\partial}{\partial x_\parallel}\left[\left(\frac{x_\parallel}{x}-\frac{x_\parallel}{2x^3}\right)\Phi(x)+\frac{x_\parallel}{x^2}\frac{\exp(-x^2)}{\sqrt{\pi}}\right],\end{aligned}$$

其中用到了 $x^2=x_\parallel^2+x_\perp^2$及

$$\frac{\partial x}{\partial x_\parallel}=\frac{x_\parallel}{x}, \quad \frac{\partial}{\partial x_\parallel}\frac{1}{x}=-\frac{x_\parallel}{x^3}, \quad \frac{\partial}{\partial x_\parallel}\frac{1}{x^3}=-\frac{3x_\parallel}{x^5}.$$

2. 第二个近似

由于这里讨论的是高频电磁波驱动电流的情况,故可以取高相速近似,即取

$$x\gg 1(v\gg v_t), \quad \Rightarrow \quad \Phi(x)\sim 1, \Phi'(x)\sim 0.$$

结果上面的二阶导数进一步简化成

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial v_\parallel\partial v_\parallel}G_e^{M}(\boldsymbol{v})&\approx n_e a_e\frac{\partial}{\partial x_\parallel}\left(\frac{x_\parallel}{x}-\frac{x_\parallel}{2x^3}\right)\\&=n_e a_e\left[\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^3}\right)+x_\parallel\left(-\frac{x_\parallel}{x^3}+\frac{3x_\parallel}{2x^5}\right)\right]\\&=n_e a_e\left(\frac{x^2-x_\parallel^2}{x^3}-\frac{x^2-3x_\parallel^2}{2x^5}\right)\\&=n_e\left(\frac{v_\perp^2}{v^3}-\frac{v^2-3v_\parallel^2}{2a_e^2v^5}\right).\end{aligned}$$

对于电子-离子碰撞(β=i),通过同样的近似可得

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2}{\partial v_\parallel\partial v_\parallel}G_i^{M}(\boldsymbol{v})\\&(\text{由 } x=x_i=a_i v)=\frac{n_i Z_i^2}{a_i}a_i^2\frac{\partial^2}{\partial x_\parallel\partial x_\parallel}\left[\left(x+\frac{1}{2x}\right)\Phi(x)+\frac{\exp(-x^2)}{\sqrt{\pi}}\right]\\&\approx n_i Z_i^2\left(\frac{v_\perp^2}{v^3}-\frac{v^2-3v_\parallel^2}{2a_i^2v^5}\right), \quad \text{当 } x\gg 1.\end{aligned}$$

所以,最后得摩擦系数

$$\begin{aligned}\langle\Delta v_\parallel\Delta v_\parallel\rangle&=\Gamma_e\left[n_e\left(\frac{v_\perp^2}{v^3}-\frac{v^2-3v_\parallel^2}{2a_e^2v^5}\right)+n_i Z_i^2\left(\frac{v_\perp^2}{v^3}-\frac{v^2-3v_\parallel^2}{2a_i^2v^5}\right)\right]\\(\text{由 } n_e=n_i Z_i)&=\Gamma_e n_e\left[(1+Z_i)\frac{v_\perp^2}{v^3}-\left(\frac{1}{2a_e^2}+\frac{Z_i}{2a_i^2}\right)\frac{v^2-3v_\parallel^2}{v^5}\right]\\&=\Gamma_e n_e\left[(1+Z_i)\frac{v_\perp^2}{v^3}-\frac{1}{2a_e^2}\left(1+Z_i\frac{m_e T_i}{m_i T_e}\right)\frac{v^2-3v_\parallel^2}{v^5}\right]\\&\approx\Gamma_e n_e\left[(1+Z_i)\frac{v_\perp^2}{v^3}-\frac{1}{2a_e^2}\frac{v^2-3v_\parallel^2}{v^5}\right].\end{aligned}$$

其中最后一步用到了 $m_e/m_i\ll 1, T_i\sim T_e$.

将上式代入动理学方程后,得

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial t}&=\frac{\partial}{\partial v_\parallel}\left\{D(v_\parallel)\frac{\partial f}{\partial v_\parallel}+\frac{n_e\Gamma_e}{2}\left[(1+Z_i)\frac{v_\perp^2}{v^3}-\frac{1}{2a^2}\frac{v^2-3v_\parallel^2}{v^5}\right]\right.\\&\quad\left.\cdot\left(\frac{m}{T}v_\parallel f+\frac{\partial f}{\partial v_\parallel}\right)\right\},\end{aligned} \quad (17.16)$$

其中 $a^2=a_e^2=m_e/(2T_e)$. 因为这个方程只和 $v_\parallel$ 有关,故可以把速度分布函数分成两部分,

$$f(\boldsymbol{v}) = F(v_\parallel) f_{\perp M}(v_\perp^2), \quad f_{\perp M}(v_\perp^2) = \frac{m}{2\pi T} e^{-a^2 v_\perp^2}.$$

然后将上面的方程两面同时对$\iint \cdots v_\perp \mathrm{d}v_\perp \mathrm{d}\varphi$积分，由于其中只有$\langle \Delta v_\parallel \Delta v_\parallel \rangle$才和积分有关，所以只需考虑对它的积分，

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^\infty \frac{v_\perp^2}{v^3} f_{\perp M}(v_\perp) v_\perp \, \mathrm{d}v_\perp$$

$$= \frac{m}{T} \int_0^\infty \frac{v_\perp^2}{(v_\parallel^2 + v_\perp^2)^{3/2}} e^{-a^2 v_\perp^2} v_\perp \mathrm{d}v_\perp$$

$$= \frac{m}{T} \left[\int_0^\infty \frac{v_\perp^2 + v_\parallel^2}{(v_\parallel^2 + v_\perp^2)^{3/2}} e^{-a^2 v_\perp^2} v_\perp \mathrm{d}v_\perp - v_\parallel^2 \int_0^\infty \frac{1}{(v_\parallel^2 + v_\perp^2)^{3/2}} e^{-a^2 v_\perp^2} v_\perp \mathrm{d}v_\perp \right]$$

$$= \frac{m}{T} \left[1 - v_\parallel^2 \left(-\frac{1}{v_\parallel} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}v_\parallel} \right) \right] \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{v_\parallel^2 + v_\perp^2}} e^{-a^2 v_\perp^2} v_\perp \mathrm{d}v_\perp$$

$$= \frac{m}{T} \left(1 + v_\parallel \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}v_\parallel} \right) \frac{\sqrt{\pi}}{2a} [1 - \Phi(a v_\parallel)] e^{a^2 v_\parallel^2}$$

$$(\text{由 } x = a v_\parallel) = \frac{m}{T} \left(1 + x \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \right) \frac{\sqrt{\pi}}{2a} [1 - \Phi(x)] e^{x^2}$$

$$(\text{当 } x \gg 1) \approx \frac{m}{T} \frac{\sqrt{\pi}}{2a} \left(1 + x \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \right) \left(\frac{1}{x\sqrt{\pi}} - \frac{1}{2x^3\sqrt{\pi}} \right)$$

$$= \frac{m}{T} \frac{\sqrt{\pi}}{2a} \frac{1}{x^3 \sqrt{\pi}}$$

$$= \frac{2T}{m} \frac{1}{v_\parallel^3}.$$

同理可进行另两个积分，得

$$\int \frac{1}{v^3} f_{\perp M}(v_\perp^2) v_\perp \, \mathrm{d}v_\perp \, \mathrm{d}\varphi$$

$$= \frac{m}{T} \int_0^\infty \frac{\exp(-a^2 v_\perp^2)}{(v_\parallel^2 + v_\perp^2)^{3/2}} v_\perp \, \mathrm{d}v_\perp$$

$$= -\frac{m}{T} \frac{a\sqrt{\pi}}{2} \frac{1}{x} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \{ [1 - \Phi(x)] e^{x^2} \}$$

$$\sim -\frac{m}{T} \frac{a\sqrt{\pi}}{2} \frac{1}{x} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \frac{1}{\sqrt{\pi}\, x}$$

$$= \frac{1}{v_\parallel^3}.$$

$$\int \frac{1}{v^5} f_{\perp M}(v_\perp^2) v_\perp \, \mathrm{d}v_\perp \, \mathrm{d}\varphi$$

$$= -\frac{1}{3v_\parallel} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}v_\parallel} \int \frac{1}{v^3} f_{\perp M}(v_\perp^2) v_\perp \, \mathrm{d}v_\perp \, \mathrm{d}\varphi$$

$$= -\frac{1}{3v_\parallel} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}v_\parallel} \frac{1}{v_\parallel^3}$$

$$= \frac{1}{v_\parallel^5}.$$

将这些都代入动理学方程后，得

$$\frac{\partial F(v_\parallel)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial v_\parallel} \left\{ D(v_\parallel) \frac{\partial}{\partial v_\parallel} F(v_\parallel) + \frac{\Gamma_e n_e}{2} \left[(1 + Z_i) \frac{2T}{m} \frac{1}{v_\parallel^3} - \frac{T}{m} \left(\frac{1}{v_\parallel^3} - \frac{3 v_\parallel^2}{v_\parallel^5} \right) \right] \left(\frac{m}{T} v_\parallel F(v_\parallel) + \frac{\partial F(v_\parallel)}{\partial v_\parallel} \right) \right\}$$

$$= \frac{\partial}{\partial v_\parallel} \left\{ D(v_\parallel) \frac{\partial}{\partial v_\parallel} F(v_\parallel) + \Gamma_e n_e (2 + Z_i) \frac{T}{m} \frac{1}{v_\parallel^3} \left(\frac{m}{T} v_\parallel F(v_\parallel) + \frac{\partial F(v_\parallel)}{\partial v_\parallel} \right) \right\}$$

$$= \frac{\partial}{\partial v_\parallel} \left\{ D(v_\parallel) \frac{\partial}{\partial v_\parallel} F(v_\parallel) + \frac{\Gamma_e n_e (2 + Z_i)}{v_\parallel^3} \left(v_\parallel F(v_\parallel) + \frac{T}{m} \frac{\partial F(v_\parallel)}{\partial v_\parallel} \right) \right\}$$

$$= \frac{\partial}{\partial v_\parallel} \left\{ D(v_\parallel) \frac{\partial}{\partial v_\parallel} F(v_\parallel) + \nu(v_\parallel) \left(v_\parallel F(v_\parallel) + \frac{T}{m} \frac{\partial F(v_\parallel)}{\partial v_\parallel} \right) \right\}.$$

上式最后一个等号右面第一项是波-粒子共振相互作用引起的速

度空间扩散项，而第二项就是快速电子的福克尔-普朗克碰撞算子. 这种形式的碰撞算子首先见于 Vedenov 的文章中[3]. 本节给出了它的详细推导过程，它不仅可以用在这里，还可以有更广泛的用途.

17.2.2 准线性方程的解析解

这里给出上面动理学方程的解析解. 首先对它进行无量纲化，令

$$u=\frac{v_{\parallel}}{\sqrt{T/m}}=\frac{v_{\parallel}}{v_{\mathrm{t}}},\quad 即\ v_{\parallel}=uv_{\mathrm{t}}.$$

于是其他量的无量纲化可表示如下

$$\nu(v_{\parallel})=\nu(v_{\mathrm{t}})\frac{1}{u^3},$$

$$\nu(v_{\mathrm{t}})=\frac{\Gamma_{\mathrm{e}}n_{\mathrm{e}}(2+Z_{\mathrm{i}})}{v_{\mathrm{t}}^3}=\frac{4\pi(2+Z_{\mathrm{i}})n_{\mathrm{e}}e^4\ln\Lambda}{m_{\mathrm{e}}^2v_{\mathrm{t}}^3}.$$

故

$$\frac{\partial F(u)}{\partial t}=\frac{1}{v_{\mathrm{t}}}\frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{D(v_{\parallel})}{v_{\mathrm{t}}}\frac{\partial F(u)}{\partial u}+\frac{\nu(v_{\mathrm{t}})}{u^3}\left(uv_{\mathrm{t}}F(u)+v_{\mathrm{t}}\frac{\partial F(u)}{\partial u}\right)\right]$$
$$=\frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{D(v_{\mathrm{t}}u)}{v_{\mathrm{t}}^2}\frac{\partial F(u)}{\partial u}+\frac{\nu(v_{\mathrm{t}})}{u^3}\left(uF(u)+\frac{\partial F(u)}{\partial u}\right)\right].$$

再令

$$\tau=\nu(v_{\mathrm{t}})t,\quad D(u)=\frac{D(uv_{\mathrm{t}})}{\nu(v_{\mathrm{t}})v_{\mathrm{t}}^2}.$$

最后可得无量纲化的动理学方程

$$\frac{\partial F(u)}{\partial \tau}=\frac{\partial}{\partial u}\left[\left(D(u)+\frac{1}{u^3}\right)\frac{\partial F(u)}{\partial u}+\frac{1}{u^2}F(u)\right].\tag{17.17}$$

其静态方程为

$$\left(D(u)+\frac{1}{u^3}\right)\frac{\partial F(u)}{\partial u}+\frac{1}{u^2}F(u)=0.\tag{17.18}$$

而静态解很容易得出

$$\ln F(u)=-\int\frac{1/u^2}{D(u)+1/u^3}\mathrm{d}u=-\int\frac{u\mathrm{d}u}{1+D(u)u^3},\tag{17.19}$$

其中的扩散系数 $D(u)$和波-粒子相互作用的细节有关，不易精确地给出. 在定性的估算中，可以参照前面给出静电波湍动时的扩散系数

$$D(v)=\frac{8\pi^2e^2}{m^2}\frac{1}{v}\varepsilon_k(t)\big|_{k=\omega_k/v},$$

而假定

$$D(u)=\frac{D_0}{u},\tag{17.20}$$

其中 D_0 是一个常数因子(这相当于在静电波湍动中取 $\varepsilon_k(t)\big|_{k=\omega_k/v}=$常数). 也有把 $D(u)$取成各种不同形式 u 函数(多数为 u 的幂级数)的尝试，但对电流驱动的定性结果并没有多大影响.

在取了上面形式的扩散系数后，可得

$$\ln F=-\int\frac{u\mathrm{d}u}{1+D_0u^2}=-\frac{1}{2D_0}\ln(1+D_0u^2).$$

于是最后得动理学方程的定态解

$$F(u)=C\frac{1}{(1+D_0u^2)^{1/(2D_0)}}.\tag{17.21}$$

这个解只存在于电子速度空间中 $u_1<\omega_k/k<u_2$ 的区域中，其中(u_1,u_2)是外加电磁波相速度所占据相空间(图 17.2). 在这个区域外，电子速度分布函数应当取热平衡分布(麦克斯韦分布). 这样整个电子分布函数应由三部分组成：

$$F_1=C_1\mathrm{e}^{-u^2/2},\quad u\leqslant u_1,\tag{17.22}$$

$$F_2=C_2\frac{1}{(1+D_0u^2)^{1/(2D_0)}},\quad u_1\leqslant u\leqslant u_2,\tag{17.23}$$

$$F_3=C_3\mathrm{e}^{-u^2/2},\quad u\geqslant u_2,\tag{17.24}$$

其中的三个待定常数可以由两个连接条件和一个归一化要求完全

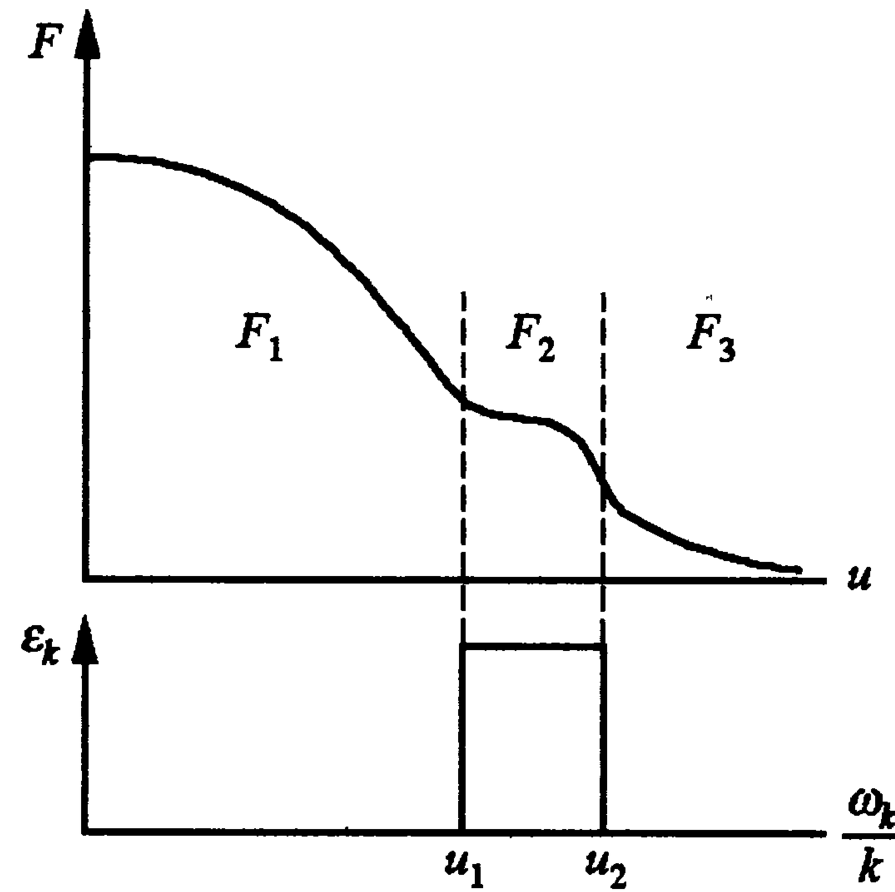


图 17.2 电子定态速度分布函数图

定出. 第一个连接条件是

$$F_1(u_1) = F_2(u_1), \quad 当\ u = u_1,$$

由此得

$$C_2 = C_1(1 + D_0u_1^2)^{1/(2D_0)}e^{-u_1^2/2}. \tag{17.25}$$

第二个连接条件是

$$F_2(u_2) = F_3(u_2), \quad 当\ u = u_2,$$

由此得

$$C_3 = C_1\left(\frac{1 + D_0u_1^2}{1 + D_0u_2^2}\right)^{1/(2D_0)} e^{(u_2^2-u_1^2)/2}. \tag{17.26}$$

这样完整的电子速度分布函数就变成

$$F_1 = C_1e^{-u^2/2}, \quad u \leqslant u_1, \tag{17.27}$$

$$F_2 = C_1\left(\frac{1 + D_0u_1^2}{1 + D_0u^2}\right)^{1/(2D_0)} e^{-u_1^2/2}, \quad u_1 \leqslant u \leqslant u_2, \tag{17.28}$$

$$F_3 = C_1\left(\frac{1 + D_0u_1^2}{1 + D_0u_2^2}\right)^{1/(2D_0)} e^{(u_2^2-u_1^2)/2}e^{-u^2/2}, \quad u \geqslant u_2. \tag{17.29}$$

剩余的 C_1，由$\int F\mathrm{d}u = n_e$ 来定. 不过在计算波驱动电流的效率时，并不需要 C_1 的明显表达式，所以这里就不给出了.

17.2.3 高频电磁波所驱动的电流

用上面得出的电子分布函数，可以容易地算出等离子体中被驱动出的(无量纲化的)电流

$$\hat{j} = C_1\int_{-\infty}^{u_1} e^{-u^2/2}u\mathrm{d}u + C_1e^{-u_1^2/2}\int_{u_1}^{u_2}\left(\frac{1 + D_0u_1^2}{1 + D_0u^2}\right)^{1/(2D_0)} u\mathrm{d}u$$

$$+ C_1\left(\frac{1 + D_0u_1^2}{1 + D_0u_2^2}\right)^{1/(2D_0)} e^{(u_2^2-u_1^2)/2}\int_{u_2}^{\infty} e^{-u^2/2}u\mathrm{d}u$$

$$= C_1\Bigg[- e^{-u_1^2/2} + (1 + D_0u_1^2)^{1/(2D_0)}e^{-u_1^2/2}\frac{1}{2D_0}\int_{u_1}^{u_2}\frac{\mathrm{d}(1 + D_0u^2)}{(1 + D_0u^2)^{1/(2D_0)}}$$

$$+ \left(\frac{1 + D_0u_1^2}{1 + D_0u_2^2}\right)^{1/(2D_0)} e^{(u_2^2-u_1^2)/2}e^{-u_2^2/2}\Bigg]$$

$$= C_1e^{-u_1^2/2}\Bigg\{\left(\frac{1 + D_0u_1^2}{1 + D_0u_2^2}\right)^{1/(2D_0)} - 1 + \frac{(1 + D_0u_1^2)^{1/(2D_0)}}{2D_0(1 - 1/(2D_0))}$$

$$\times\left[(1 + D_0u_2^2)^{1-1/(2D_0)} - (1 + D_0u_1^2)^{1-1/(2D_0)}\right]\Bigg\}.$$

当外来电磁波的强度足够大时，有 $D_0 \gg 1$，则

$$\frac{1}{2D_0} \ll 1, \quad (\cdots)^{1/(2D_0)} \sim 1.$$

这时波所驱动的稳态电流就近似成

$$\hat{j} \approx F_M(u_1^2)\left[\frac{1}{2D_0}(D_0u_2^2 - D_0u_1^2)\right]$$

$$= \frac{1}{2}(u_2^2 - u_1^2)F_M(u_1^2),$$

$$F_M(u_1^2) = C_1e^{-u_1^2/2}.$$

令

$$u_0 = \frac{1}{2}(u_2 + u_1), \quad \Delta u = u_2 - u_1$$

分别为波的频谱中心和频宽，然后取宽谱近似

$$\frac{\Delta u}{u_0} \sim 1, \quad u_0 \gg 1(v_{\parallel} \gg v_t).$$

最后得出波驱动的稳态电流密度(无量纲化后的)为

$$\hat{j} \approx u_0 \Delta u F_M(u_1^2). \tag{17.30}$$

将动理学方程两边同乘 $u^2/2$ 后对速度空间求积分,可以得到维持稳态电流时所需要提供的波功率

$$\int \frac{1}{2}u^2 \frac{\partial F(u)}{\partial \tau}\mathrm{d}u \equiv 0 = \int \frac{1}{2}u^2 \frac{\partial}{\partial u}\left[D(u)\frac{\partial F(u)}{\partial u}\right]\mathrm{d}u + \int \frac{1}{2}u^2 \frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{1}{u^3}\frac{\partial F(u)}{\partial u} + \frac{F(u)}{u^2}\right]\mathrm{d}u.$$

上式中最后一个积分是单位时间内因碰撞而从粒子动能转化成的热能,这部分能量由前一项供给——它即是电磁波通过共振相互作用传给粒子系的功率,因此可以从这两项中的任一项来计算维持稳态波驱动电流所需要的波功率. 下面我们从第一个积分来进行计算(无量纲化的)波功率

$$\begin{aligned}\hat{p} &= \frac{1}{2}\int_{u_1}^{u_2} u^2 \frac{\partial}{\partial u}\left[D(u)\frac{\partial F(u)}{\partial u}\right]\mathrm{d}u \\ &= -\int_{u_1}^{u_2} uD(u)\frac{\partial F(u)}{\partial u}\mathrm{d}u \\ \left(\text{由 } D(u) = \frac{D_0}{u}\right) &= -D_0[F(u_2) - F(u_1)] \\ &= -D_0 F_M(u_1^2)\left[\left(\frac{1+D_0u_1^2}{1+D_0u_2^2}\right)^{1/(2D_0)} - 1\right].\end{aligned}$$

当 $D_0 \gg 1$ 时,有

$$\left(\frac{1+D_0u_1^2}{1+D_0u_2^2}\right)^{1/(2D_0)} - 1 \approx \left(\frac{u_1}{u_2}\right)^{1/D_0} - 1 \approx \left(\frac{u_0 - \Delta u/2}{u_0 + \Delta u/2}\right)^{1/D_0} - 1 \approx -\frac{\Delta u}{2D_0 u_0}.$$

最后得出

$$\hat{p} = \frac{1}{2}F_M(u_1^2)\frac{\Delta u}{u_0}. \tag{17.31}$$

17.2.4 波驱动电流的效率

利用上面得到的驱动电流及波功率可以得出(无量纲化的)驱动效率

$$\frac{\hat{j}}{\hat{p}} \approx \frac{F_M u_0 \Delta u}{\frac{1}{2}F_M \frac{\Delta u}{u_0}} = 2u_0^2. \tag{17.32}$$

这表明,高频电磁波驱动电流的效率正比于波的(中心)相速的平方,或者说正比于共振粒子的(平均)速度平方. 因此,频率高的波有优势.

上面给出的表达式是无量纲的,为了估算其实际值,需要把它们恢复到实用单位. 首先来看电流. $\hat{j}$ 是归一到 nev_t 的,而用来归一的量本身的单位是(以下把等式右边各个表达式对应的 nev_t 的单位列于式子最右端)

$$\begin{aligned}nev_t &= n[\mathrm{cm^{-3}}]e(\mathrm{esu})\sqrt{\frac{T[\mathrm{erg}]}{m_e[\mathrm{g}]}} && \mathrm{statampere/cm^2} \\ &= n[\mathrm{cm^{-3}}]e(\mathrm{esu})\sqrt{\frac{T[\mathrm{erg}]}{m_e[\mathrm{g}]}}\frac{1}{3\times10^5} && \mathrm{A/m^2} \\ &= n_{14}T_{10}^{1/2}\frac{e(\mathrm{esu})}{\sqrt{m_e[\mathrm{g}]}}\sqrt{1.6\times10^{-12}\times10^4} \\ &\quad \times 10^{14}\frac{1}{3\times10^5} && \mathrm{A/m^2} \\ &= 6.7\times10^8 n_{14}T_{10}^{1/2}. && \mathrm{A/m^2}\end{aligned}$$

其中方括号内为其左侧物理量取定的单位,esu 表示静电单位制,statampere 是静电安培,n_{14}表示以$10^{14}\mathrm{cm^{-3}}$为单位的电子数密度,T_{10}表示以 10 keV 为单位的电子温度. 乘上这个因子,就得到 SI 单位制下的电流表达式

$$j = 6.7 \times 10^8 n_{14} T_{10}^{1/2} F_M(u_1^2) u_0 \Delta u, \qquad \mathrm{A/m^2} \quad (17.33)$$

其中 $u_0, u_1, \Delta u$ 仍是无量纲的量.

波功率是归一到 $\nu(v_t) n_e T_e$ 的，而

$$\nu(v_t) n_e T_e = \nu(v_t)(\mathrm{s^{-1}}) n_e(\mathrm{cm^{-3}}) T_e(\mathrm{erg}) \qquad \mathrm{erg/(s \cdot cm^{-3})}$$

$$= \nu(v_t)(\mathrm{s^{-1}}) n_e(\mathrm{cm^{-3}}) T_e(\mathrm{erg})/10. \qquad \mathrm{W/m^3}$$

其中碰撞频率可按定义，进一步用等离子体的基本参量表示出来，

$$\nu(v_t) = \frac{4\pi(2 + Z_i) n_e e^4}{m_e^2 v_t^3} \ln \Lambda. \qquad \mathrm{1/s}$$

取 $Z_i = 1, v_t = \sqrt{T_e/m_e}$，以及库仑对数（见《等离子体物理原理》[4]）

$$\ln \Lambda^{e-i} \doteq 16.04 - \frac{1}{2}\ln n_{13} + \ln T_1$$

$$= 17.19 - \frac{1}{2}\ln n_{14} + \ln T_{10} \approx 17.19,$$

将它们代入前式，得

$$\nu(v_t) n_e T_e = 9.0 \times 10^9 \frac{n_{14}^2}{T_{10}^{1/2}}. \qquad \mathrm{W/m^3} \quad (17.34)$$

因此维持稳态电流所需的波功率是

$$p = 4.5 \times 10^9 n_{14}^2 T_{10}^{-1/2} F_M(u_1^2) \frac{\Delta u}{u_0}, \quad \mathrm{W/m^3} \quad (17.35)$$

而（理论上预期的）驱动效率则变成

$$\eta_{LH}^{theo} = \frac{j}{p} = 0.15 n_{14}^{-1} T_{10} u_0^2. \qquad \mathrm{(A \cdot m)/W} \quad (17.36)$$

在实验上，常定义（排除了环几何尺寸的影响后的）低杂波的驱动效率（见 17.1.3 小节的讨论）为

$$\eta_{LH}^{exp} = \frac{\bar{n}_e[10^{20}\mathrm{m^{-3}}] I_{LH}[\mathrm{mA}] R_0[\mathrm{m}]}{P_{LH}[\mathrm{mW}]}. \qquad (17.37)$$

其中 I_{LH}, P_{LH} 分别是被驱动的总电流和低杂波注入的功率.

参考文献

[1] Cairns R A. Radiofrequency Heating of Plasmas. Adam Hilger, Bristol, 1991. Chapter 6

[2] Borrass. Plasma Physics and Controlled Fusion, **26**(11)(1984)1299

[3] Vedenov A A. *in* Reviews of Plasma Physics, Vol. 3. Consultants Bureau, New York, 1967. 229

[4] 马腾才，胡希伟，陈银华. 等离子体物理原理. 合肥：中国科技大学出版社，1988

第十八章　碰撞积分的数学理论
——BBGKY 途径简介

前面介绍的碰撞算子都有一系列的严格限制，如两体碰撞、碰撞前后粒子作自由（均速直线）运动，等等. 但在实际情况中，往往在等离子体中存在外磁场、外电场以及外电磁波场，一般也普遍地存在着湍动的自洽波场，它们都会影响碰撞前后带电粒子的运动，使它们增加了额外的关联，从而增大了碰撞的频率，并且使碰撞频率成为这些外场场强或湍动强度的函数. 另一方面当粒子密度很大时，粒子间存在着强耦合，碰撞往往是多体的. 这些情况下的碰撞算子按原有的模型方法是很难得出的. 而这里介绍的 BBGKY 途径就在原则上提供了一种比较严格的能导出各种复杂情况下碰撞积分的系统方法. 但是由于涉及的数学计算非常繁复，甚至得不出解析解，所以至今只对一些很简单的情况给出了结果. 下面就对此作一简单介绍，以便于读者一旦需要时可以想到此方法，并有个可信的出发点.

BBGKY 链式方程组本来是处理强耦合中性粒子系统的一种非平衡统计物理学的方法. 后来经 Dupree 等人的改造，将它引入到带电粒子系中来. 关于前者，可以参考文献[1]，[2]. 而在等离子体中的推广则可参考文献[3]，[4].

18.1　BBGKY 链式方程组

本节将导出链式方程组的表达式. 对于由 N 个带电粒子组成

的体系，原则上可以对它作力学描述：这时系统的状态量是所有粒子的空间坐标及速度的集合

$$\{\boldsymbol{R}_i(t),\dot{\boldsymbol{R}}_i(t)\},\quad i=1,2,\cdots N,$$

这实际上是对所有的粒子一起作轨道描述. 这些状态量的时间演化服从 N 个联立的牛顿方程组

$$m_i\ddot{\boldsymbol{R}}_i(t)=\boldsymbol{F}_i(t),\quad i=1,2,\cdots N. \tag{18.1}$$

为了从这个二阶微分方程组得出任意时刻的轨道，还必须知道 $6N$ 个轨道的初值 $\{\boldsymbol{R}_i(0),\dot{\boldsymbol{R}}_i(0)\}$. 由于粒子数 N 非常巨大（例如对只有 $1\,\mathrm{cm}^3$ 的实验室等离子体体系，$N>10^{10}$），所以无论是解析地解上述方程组还是确切给出所需的初条件（或定解条件）都是无法做到的. 目前用大型计算机可以最多跟踪数量级在 10^8 个粒子的轨道，为了描述一个实际的等离子体体系还需要作较多的近似；但仍然不可能确定每一个粒子的初条件. 在这些粒子轨道模拟的计算中，初条件是以统计物理的方法来设置的——即在给定的体系初始热力学状态（密度、温度及宏观速度，或其他的高阶速度矩）下，随机地设定各个粒子的坐标和速度. 因此这种计算机模拟实际上等价于下面所说的统计物理学描述.

在统计物理的描述中，是以 N 个粒子（在坐标和速度空间）的分布函数

$$f_N(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{v}_1;\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{v}_2;\cdots\boldsymbol{r}_N,\boldsymbol{v}_N;t)$$

作为系统状态函数来对它作描述的. 它代表在 t 时刻、在 $6N$ 维相空间体积元 $\prod_{i=1}^{N}\mathrm{d}\boldsymbol{r}_i\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i$ 中找到这 N 个粒子体系的概率. 对于经典（玻尔兹曼）统计系统，这个函数有归一条件

$$\int f_N\prod_{i=1}^{N}\mathrm{d}\boldsymbol{r}_i\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i=N!.$$

特别是，当体系是空间均匀、并且可以取热力学极限的时候，归一条件可进一步写成

$$\int f_N \prod_{i=1}^{N} \mathrm{d}\boldsymbol{v}_i = \frac{N!}{V^N} = n_0, \quad 当 N \to \infty, 有 V \to \infty.$$

这个状态函数的时间演化服从刘维定理

$$L_N f_N \equiv \left[\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^{N}\left(\boldsymbol{v}_i \cdot \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}_i} + \frac{\boldsymbol{F}_i}{m_i} \cdot \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{v}_i}\right)\right] f_N = 0, \tag{18.2}$$

它实际上表示粒子数守恒. 但 f_N 仍涉及了 $6N$ 维空间的描述，过于复杂. BBGKY 理论就是一种系统方法，它能把 N 体的分布函数约化成一系列 s 体($s=1,2,\cdots,N-1$)的分布函数，并给出了它们所满足的链式方程组.

s 体的约化分布函数被定义为

$$f_s(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{v}_1;\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{v}_2;\cdots \boldsymbol{r}_s,\boldsymbol{v}_s;t) = \frac{1}{(N-s)!}\int f_N \prod_{i=s+1}^{N} \mathrm{d}\boldsymbol{r}_i \mathrm{d}\boldsymbol{v}_i, \tag{18.3}$$

$$\int f_s \prod_{i=1}^{N} \mathrm{d}\boldsymbol{r}_i \mathrm{d}\boldsymbol{v}_i = \frac{N!}{(N-s)!}. \tag{18.4}$$

将刘维方程两边同时作积分$\int\cdots\prod_{i=s+1}^{N}\mathrm{d}\boldsymbol{r}_j\mathrm{d}\boldsymbol{v}_j$，可得 f_s 所满足的演化方程

$$\frac{\partial f_s}{\partial t} + \sum_{i=1}^{s}\boldsymbol{v}_i \cdot \frac{\partial f_s}{\partial \boldsymbol{r}_i} + \frac{1}{(N-s)!}\sum_{i=1}^{N}\int \frac{\boldsymbol{F}_i}{m_i} \cdot \frac{\partial f_N}{\partial \boldsymbol{v}_i}\prod_{j=s+1}^{N}\mathrm{d}\boldsymbol{r}_j\mathrm{d}\boldsymbol{v}_j = 0. \tag{18.5}$$

现在把最后一项中的力分成两大部分：只涉及 N 个粒子体系内粒子间相互作用的内力，和涉及与外加电、磁场以及与这个体系外粒子相互作用的外力

$$\boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{F}_i^{\text{in}} + \boldsymbol{F}_i^{\text{out}}.$$

外力项 $\boldsymbol{F}_i^{\text{out}}$ 在下面的计算中可以移出积分号. 在非相对论情况下，内力由洛伦兹力和静电库仑力组成. 其中的洛伦兹力也可以移出积分号(详见《等离子体物理原理》[5]，55 页)，故在下面将不对它进行讨论，而只对内力项中的静电库仑力进行详细推导. 然后，在最后导出的 f_s 动理学方程中把洛伦兹力直接加进去(见(18.8

式)). 内力项中的静电库仑力为(以下本章中的表达式均采取高斯制)

$$\boldsymbol{F}_i^{\text{in}} = -\sum_{j\neq i}^{N}\frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial \boldsymbol{r}_i},$$

$$\varphi_{ij} \equiv \varphi_{ij}(|\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j|) = \frac{q_i q_j}{|\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j|}. \tag{18.6}$$

于是

$$\frac{\partial f_s}{\partial t} + \sum_{i=1}^{s}\boldsymbol{v}_i \cdot \frac{\partial f_s}{\partial \boldsymbol{r}_i} + \sum_{i=1}^{s}\frac{\boldsymbol{F}_i^{\text{out}}}{m_i} \cdot \frac{\partial f_s}{\partial \boldsymbol{v}_i}$$
$$= \frac{1}{(N-s)!}\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{m_i}\int\sum_{j\neq i}^{N}\frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial \boldsymbol{r}_i} \cdot \frac{\partial f_N}{\partial \boldsymbol{v}_i}\prod_{j=s+1}^{N}\mathrm{d}\boldsymbol{r}_j\mathrm{d}\boldsymbol{v}_j.$$

在上式等号左面最后的外力项中，由于 f_s 只涉及 $i=1,2,\cdots,s$ 的空间和速度坐标，故外力项求和中 $i>s$ 的项，因 $\partial f_s/\partial \boldsymbol{v}_i = 0 (i>s)$ 而消失. 上面方程等号右边就是内力项，可以把其中第二个求和进一步分成两部分：$j=1\to s(j\neq i)$的部分，以及 $j=s+1\to N(j\neq i)$ 的部分，

$$\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{m_i}\int\sum_{j\neq i}^{N}\frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial \boldsymbol{r}_i} \cdot \frac{\partial f_N}{\partial \boldsymbol{v}_i}\prod_{j=s+1}^{N}\mathrm{d}\boldsymbol{r}_j\mathrm{d}\boldsymbol{v}_j$$
$$= \sum_{i=1}^{N}\frac{1}{m_i}\sum_{j\neq i,j=1}^{s}\int\frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial \boldsymbol{r}_i} \cdot \frac{\partial f_N}{\partial \boldsymbol{v}_i}\prod_{j=s+1}^{N}\mathrm{d}\boldsymbol{r}_j\mathrm{d}\boldsymbol{v}_j$$
$$+ \sum_{i=1}^{N}\frac{1}{m_i}\sum_{j\neq i,j=s+1}^{N}\int\frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial \boldsymbol{r}_i} \cdot \frac{\partial f_N}{\partial \boldsymbol{v}_i}\prod_{j=s+1}^{N}\mathrm{d}\boldsymbol{r}_j\mathrm{d}\boldsymbol{v}_j.$$

其中等号右面的第一项可进一步化简，把第一个求和分成两部分，

$$\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{m_i}\sum_{j\neq i,j=1}^{s}\int\frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial \boldsymbol{r}_i} \cdot \frac{\partial f_N}{\partial \boldsymbol{v}_i}\prod_{j=s+1}^{N}\mathrm{d}\boldsymbol{r}_j\mathrm{d}\boldsymbol{v}_j$$
$$= \sum_{i=1}^{s}\frac{1}{m_i}\sum_{j\neq i,j=1}^{s}\frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial \boldsymbol{r}_i} \cdot \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{v}_i}\int f_N\prod_{j=s+1}^{N}\mathrm{d}\boldsymbol{r}_j\mathrm{d}\boldsymbol{v}_j$$
$$+ \sum_{i=s+1}^{N}\frac{1}{m_i}\sum_{j\neq i,j=1}^{s}\int\frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial \boldsymbol{r}_i} \cdot \frac{\partial f_N}{\partial \boldsymbol{v}_i}\mathrm{d}\boldsymbol{r}_i\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i\prod_{j\neq i,j=s+1}^{N}\mathrm{d}\boldsymbol{r}_j\mathrm{d}\boldsymbol{v}_j$$

$$= \sum_{i=1,j=1,j\neq i}^{s} \frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial \boldsymbol{r}_i} \cdot (N-s)! \frac{\partial f_s}{\partial \boldsymbol{v}_i};$$

上式中的第二项为零，原因是其中的

$$\int \frac{\varphi_{ij}}{\partial \boldsymbol{r}_i} \mathrm{d}\boldsymbol{r}_i = \varphi_{ij} \Big|_{r_i=-\infty}^{r_i=\infty} = 0, \quad \int \frac{\partial f_N}{\partial \boldsymbol{v}_i} \mathrm{d}\boldsymbol{v}_i = f_N \Big|_{v_i=-\infty}^{v_i=\infty} = 0.$$

而等号右边的第二项可以逐项展开

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{m_i} \sum_{j\neq i, j=s+1}^{N} \int \frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial \boldsymbol{r}_i} \cdot \frac{\partial f_N}{\partial \boldsymbol{v}_i} \prod_{j=s+1}^{N} \mathrm{d}\boldsymbol{r}_j \mathrm{d}\boldsymbol{v}_j$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{m_i} \Big[\int \frac{\partial \varphi_{is+1}}{\partial \boldsymbol{r}_i} \cdot \frac{\partial f_N}{\partial \boldsymbol{v}_i} \mathrm{d}\boldsymbol{r}_{s+1} \mathrm{d}\,\boldsymbol{v}_{s+1} \prod_{j=s+2}^{N} \mathrm{d}\boldsymbol{r}_j \mathrm{d}\,\boldsymbol{v}_j$$

$$+ \int \frac{\partial \varphi_{is+2}}{\partial \boldsymbol{r}_i} \cdot \frac{\partial f_N}{\partial \boldsymbol{v}_i} \mathrm{d}\boldsymbol{r}_{s+2} \mathrm{d}\,\boldsymbol{v}_{s+2} \prod_{j=s+1, j\neq s+2}^{N} \mathrm{d}\boldsymbol{r}_j \mathrm{d}\,\boldsymbol{v}_j + \cdots$$

$$+ \int \frac{\partial \varphi_{is+k}}{\partial \boldsymbol{r}_i} \cdot \frac{\partial f_N}{\partial \boldsymbol{v}_i} \mathrm{d}\boldsymbol{r}_{s+k} \mathrm{d}\,\boldsymbol{v}_{s+k} \prod_{j=s+1, j\neq s+k}^{N} \mathrm{d}\boldsymbol{r}_j \mathrm{d}\,\boldsymbol{v}_j + \cdots \Big].$$

先来看上式右面的第一项，把它前面的求和分成 $\sum_{i=1}^{s}$ 和 $\sum_{i=s+1}^{N}$ 的两项，后一个求和项在积分中因为 φ_{ij}, f_N 是全微商而能直接积出，但代入无穷远处值后，它们就变成零了；故只剩下第一个求和项，它可以进一步化简，

$$\sum_{i=1}^{s} \frac{1}{m_i} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}_i} \int \varphi_{is+1} \mathrm{d}\boldsymbol{r}_{s+1} \mathrm{d}\boldsymbol{v}_{s+1} \cdot \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{v}_i} \int f_N \prod_{j=s+2}^{N} \mathrm{d}\boldsymbol{r}_j \mathrm{d}\boldsymbol{v}_j$$

$$= \sum_{i=1}^{s} \frac{1}{m_i} \int \frac{\partial \varphi_{is+1}}{\partial \boldsymbol{r}_i} \mathrm{d}\boldsymbol{r}_{s+1} \mathrm{d}\boldsymbol{v}_{s+1} \cdot (N-s-1)! \frac{\partial f_{s+1}}{\partial \boldsymbol{v}_i}.$$

这是前式中的第一项，其他的 $(N-s-1)$ 项经简化后也和这一项完全一样，故整个前式可以写成上式乘以 $(N-s)$.

最后可以得出 s 体约化分布函数所满足的动理学方程（注意：在下式中尚未将内力中的洛伦兹力加入）

$$\frac{\partial f_s}{\partial t} + \sum_{i=1}^{s} \boldsymbol{v}_i \cdot \frac{\partial f_s}{\partial \boldsymbol{r}_i} + \sum_{i=1}^{s} \frac{\boldsymbol{F}_i^{\mathrm{out}}}{m_i} \cdot \frac{\partial f_s}{\partial \boldsymbol{v}_i}$$

$$= \sum_{i,j=1,j\neq i}^{s} \frac{n_0}{m_i} \frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial \boldsymbol{r}_i} \cdot \frac{\partial f_s}{\partial \boldsymbol{v}_i} + \sum_{i=1}^{s} \frac{1}{m_i} \int \frac{\partial \varphi_{is+1}}{\partial \boldsymbol{r}_i} \cdot \frac{\partial f_{s+1}}{\partial \boldsymbol{v}_i} \mathrm{d}\boldsymbol{r}_{s+1} \mathrm{d}\boldsymbol{v}_{s+1}.$$

或把上式更进一步简写成（注意：在下面已经将内力中的洛伦兹力加入）

$$L_s f_s \equiv \Big[\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^{s} \Big(\boldsymbol{v}_i \cdot \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}_i} + \frac{\boldsymbol{F}_i}{m_i} \cdot \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{v}_i} \Big) \Big] f_s$$

$$= \sum_{i=1}^{s} \frac{n_0}{m_i} \int \frac{\partial \varphi_{i,s+1}}{\partial \boldsymbol{r}_i} \cdot \frac{\partial f_{s+1}}{\partial \boldsymbol{v}_i} \mathrm{d}\boldsymbol{r}_{s+1} \mathrm{d}\boldsymbol{v}_{s+1}, \quad s = 1,2,\cdots,N-1, \tag{18.7}$$

其中第 i 个粒子所受的力中已经包括了内力中的洛伦兹力

$$\boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{F}_i^{\mathrm{out}} + \boldsymbol{F}_i^{\mathrm{in}},$$

$$\boldsymbol{F}_i^{\mathrm{in}} = -\sum_{j=1,j\neq i}^{s} \frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial \boldsymbol{r}_i} + \frac{q_i}{c} \boldsymbol{v}_i \times \boldsymbol{B}_i^{\mathrm{in}} \equiv q_i \Big(\boldsymbol{E}_i^{\mathrm{in}} + \frac{\boldsymbol{v}_i}{c} \times \boldsymbol{B}_i^{\mathrm{in}}\Big). \tag{18.8}$$

每个 s 体分布函数所满足的方程中都含有 $s+1$ 体的分布函数，因此上面的方程一个耦合着另一个，形成一个链式的耦合方程组. 完整地解这个方程组显然是不可能的，但在一定的近似条件下，我们可以设法将它在某一 s 体处截断，然后解这个约化了的少体分布函数动理学方程组.

18.2 单粒子和两粒子分布函数的动理学方程

在求碰撞算子时，涉及的是 BBGKY 方程组的头两个方程，即单粒子分布函数 $(s=1)$ 和两粒子分布函数 $(s=2)$ 所满足的联立方程组.

令单粒子和两粒子分布函数分别为

$$f_1(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{v}_1; t) \equiv f(1),$$

$$f_2(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{v}_1; \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{v}_2; t) = f(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{v}_1; t) f(\boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{v}_2; t) + P(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{v}_1; \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{v}_2; t)$$

$$\equiv f(1) f(2) + P(1,2).$$

则单粒子分布函数满足的动理学方程是

$$\frac{\partial f(1)}{\partial t}+\boldsymbol{v}_1\cdot\frac{\partial f(1)}{\partial \boldsymbol{r}_1}+\frac{\boldsymbol{F}^{\text{out}}}{m_1}\cdot\frac{\partial f(1)}{\partial \boldsymbol{v}_1}$$
$$=\frac{n_0}{m_1}\int\frac{\partial\varphi_{12}}{\partial \boldsymbol{r}_1}\cdot\frac{\partial f_2}{\partial \boldsymbol{v}_1}\mathrm{d}\boldsymbol{r}_2\mathrm{d}\boldsymbol{v}_2,$$

$$\frac{\partial f(1)}{\partial t}+\boldsymbol{v}_1\cdot\frac{\partial f(1)}{\partial \boldsymbol{r}_1}+\frac{\boldsymbol{F}^{\text{out}}}{m_1}\cdot\frac{\partial f(1)}{\partial \boldsymbol{v}_1}+\frac{q_1\boldsymbol{E}^{\text{self}}}{m_1}\cdot\frac{\partial f(1)}{\partial \boldsymbol{v}_1}$$
$$=\frac{n_0}{m_1}\int\frac{\partial\varphi_{12}}{\partial \boldsymbol{r}_1}\cdot\frac{\partial P(1,2)}{\partial \boldsymbol{v}_1}\mathrm{d}\boldsymbol{r}_2\mathrm{d}\boldsymbol{v}_2.$$

其中 $\boldsymbol{F}^{\text{out}}$是外加电磁场对带电粒子施加的力，而 $q\boldsymbol{E}^{\text{self}}$则是等离子体中的自洽场，

$$q_1\boldsymbol{E}^{\text{self}}=-n_0\int\frac{\partial\varphi_{12}}{\partial \boldsymbol{r}_1}f(2)\mathrm{d}\boldsymbol{r}_2\mathrm{d}\boldsymbol{v}_2,\tag{18.9}$$

它还应满足麦克斯韦电磁方程组.上述动理学方程中第二个方程的左面就是弗拉索夫方程的左面，而右面即代表因两粒子关联(相互作用)而造成的碰撞积分(算子)，

$$\left(\frac{\partial f(1)}{\partial t}\right)_{\text{c}}=-\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{v}_1}\cdot\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{v}_1;t),\tag{18.10}$$

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{v}_1;t)=-\frac{n_0}{m_1}\int\frac{\partial\varphi_{12}(|\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2|)}{\partial \boldsymbol{r}_1}P(1,2)\mathrm{d}\boldsymbol{r}_2\mathrm{d}\boldsymbol{v}_2.\tag{18.11}$$

上式中的 $\boldsymbol{J}$ 通常被称为碰撞流积分(算子).这样，单粒子分布函数满足(带碰撞项)的动理学方程最后可以写成

$$\frac{\partial f(1)}{\partial t}+\boldsymbol{v}_1\cdot\frac{\partial f(1)}{\partial \boldsymbol{r}_1}+\frac{\boldsymbol{F}^{\text{out}}}{m_1}\cdot\frac{\partial f(1)}{\partial \boldsymbol{v}_1}+\frac{q\boldsymbol{E}^{\text{self}}}{m_1}\cdot\frac{\partial f(1)}{\partial \boldsymbol{v}_1}$$
$$=-\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{v}_1}\cdot\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{v}_1;t).\tag{18.12}$$

把 $s=2$ 的约化方程

$$L_2f_2=\sum_{i=1}^{2}\frac{n_0}{m_i}\int\frac{\partial\varphi_{i3}}{\partial \boldsymbol{r}_i}\cdot\frac{\partial f_3}{\partial \boldsymbol{v}_i}\mathrm{d}\boldsymbol{r}_3\mathrm{d}\boldsymbol{v}_3\tag{18.13}$$

写开，就是

$$\frac{\partial f_2}{\partial t}+\left(\boldsymbol{v}_1\cdot\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}_1}+\boldsymbol{v}_2\cdot\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}_2}\right)f_2+\left(\frac{\boldsymbol{F}_1}{m_1}\cdot\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{v}_1}+\frac{\boldsymbol{F}_2}{m_2}\cdot\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{v}_2}\right)f_2$$

$$=\frac{n_0}{m_1}\int\frac{\partial\varphi_{13}}{\partial \boldsymbol{r}_1}\cdot\frac{\partial f_3}{\partial \boldsymbol{v}_1}\mathrm{d}\boldsymbol{r}_3\mathrm{d}\boldsymbol{v}_3+\frac{n_0}{m_2}\int\frac{\partial\varphi_{23}}{\partial \boldsymbol{r}_2}\cdot\frac{\partial f_3}{\partial \boldsymbol{v}_2}\mathrm{d}\boldsymbol{r}_3\mathrm{d}\boldsymbol{v}_3.$$

上式最后两项中的三粒子分布函数可以写成

$$f_3(1,2,3)=f(1)f(2)f(3)+f(1)P(2,3)+f(2)P(3,1)$$
$$+f(3)P(1,2)+T(1,2,3),$$

其中 T 是三体关联函数.在

$$T\ll fP\ll fff\tag{18.14}$$

的假定下，可以相对 fff 略去三体关联 T，相对 ff 略去两体关联 P，而得出封闭的两粒子关联函数动理学方程

$$\frac{\partial P(1,2)}{\partial t}+\left(\boldsymbol{v}_1\cdot\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}_1}+\boldsymbol{v}_2\cdot\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}_2}\right)P(1,2)$$
$$+\left(\frac{\boldsymbol{F}_1^{\text{out}}}{m_1}\cdot\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{v}_1}+\frac{\boldsymbol{F}_2^{\text{out}}}{m_2}\cdot\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{v}_2}\right)P(1,2)$$
$$+\left(\frac{q_1\boldsymbol{E}^{\text{self}}(1)}{m_1}\cdot\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{v}_1}+\frac{q_2\boldsymbol{E}^{\text{self}}(2)}{m_2}\cdot\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{v}_2}\right)P(1,2)$$
$$=\frac{\partial\varphi_{12}}{\partial \boldsymbol{r}_1}\cdot\left(\frac{f(2)}{m_1}\frac{\partial f(1)}{\partial \boldsymbol{v}_1}-\frac{f(1)}{m_2}\frac{\partial f(2)}{\partial \boldsymbol{v}_2}\right)+\frac{n_0}{m_1}\frac{\partial f(1)}{\partial \boldsymbol{v}_1}$$
$$\cdot\int\frac{\partial\varphi_{13}}{\partial \boldsymbol{r}_1}P(2,3)\mathrm{d}\boldsymbol{r}_3\mathrm{d}\boldsymbol{v}_3+\frac{n_0}{m_2}\frac{\partial f(2)}{\partial \boldsymbol{v}_2}$$
$$\cdot\int\frac{\partial\varphi_{23}}{\partial \boldsymbol{r}_2}P(1,3)\mathrm{d}\boldsymbol{r}_3\mathrm{d}\boldsymbol{v}_3.\tag{18.15}$$

18.3 热平衡时的两粒子关联函数 P_{eq}

在热平衡态，可以合理地假定两粒子关联函数有如下形式：

$$P(1,2)=f_{\text{M}}(\boldsymbol{v}_1)f_{\text{M}}(\boldsymbol{v}_2)p(r_{12}),\quad r_{12}=|\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2|,\tag{18.16}$$

其中 f_{M} 是温度为 T 的麦克斯韦分布，而 $p(r_{12})\ll 1$ 是一阶小量.将它代入静态的两粒子关联函数所满足的动理学方程，得关于 $p(r_{12})$的静态方程

$$(\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_2)\cdot\left[\frac{\partial p(r_{12})}{\partial \boldsymbol{r}_1}+\frac{1}{T}\frac{\partial\varphi_{12}}{\partial \boldsymbol{r}_1}\right]$$

$$= -\frac{n}{T}\int d\boldsymbol{r}_3\left[\boldsymbol{v}_1\cdot\frac{\partial\varphi_{13}}{\partial\boldsymbol{r}_1}p(r_{23})+\boldsymbol{v}_2\cdot\frac{\partial\varphi_{23}}{\partial\boldsymbol{r}_2}p(r_{13})\right].$$

上式左面第一项来自方程(18.15)左边的第二项,上式左面第二项来自方程(18.15)右边的第一项,方程(18.15)左边的外力项为零,而自洽场项因是二阶小量被略去.上式等号右面的项来自方程(18.15)右面的最后两项.由于 $p(r_{12})$和速度无关,故可以不失一般性而在上式中令 $\boldsymbol{v}_2=0$ 后求解

$$\frac{\partial p(r_{12})}{\partial\boldsymbol{r}_1}+\frac{1}{T}\frac{\partial\varphi_{12}}{\partial\boldsymbol{r}_1}=-\frac{n}{T}\int p(r_{23})\frac{\partial\varphi_{13}}{\partial\boldsymbol{r}_1}d\boldsymbol{r}_3. \quad (18.17)$$

对上面的方程两边同时取散度 $\nabla\cdot$,并利用泊松方程

$$\nabla^2_{r_{12}}\varphi_{12}(r_{12})=-4\pi q^2\delta(r_{12}), \quad (18.18)$$

可得关于 $p(r_{12})$的二阶常微分方程及其解

$$\nabla^2_{r_{12}}p(r_{12})-\frac{4\pi q^2}{T}\delta(r_{12})=\frac{4\pi nq^2}{T}\int p(r_{23})\delta(r_{13})d\boldsymbol{r}_3,$$

$$(\nabla^2_{r_{12}}-k_D^2)p(r_{12})=\frac{4\pi q^2}{T}\delta(r_{12}),\quad k_D^2=\frac{4\pi nq^2}{T}=\frac{1}{\lambda_D^2},$$

$$p(r_{12})=\frac{1}{T}\frac{q^2}{r_{12}}e^{-k_D r_{12}}.$$

很明显,这个关联函数具有屏蔽库仑势的形式.如果在上面的微分方程中略去积分项$\int d\boldsymbol{r}_3 p(r_{23})\cdots$,则相应的关联函数解是普通的库仑势

$$p^0(r_{12})=\frac{1}{T}\frac{q^2}{r_{12}}.$$

这就可以看出,积分项表示两个粒子(1,2)外的其他粒子对它们之间关联 $p(r_{12})$影响的叠加.其物理上的图像是:在热平衡的等离子体中,这些影响的总效果相当于在每个粒子周围包上了一层异种电荷的云,从而屏蔽了普通的库仑势而使它变成了屏蔽库仑势.所以这个解是库仑屏蔽的动理学描述(在《等离子体物理原理》[5]一书中给出的是库仑屏蔽的流体描述),因此这些积分项在有的文献中也被称为极化项或极化效应项,其实也许把它们称为屏蔽项更直观.

对于处在热力学平衡态及其附近的静止等离子体体系,库仑屏蔽的动理学描述和流体描述是完全相同的;但对于处在非热力学平衡态的(弛豫)等离子体体系,流体描述原则上不再适用,这时只能用动理学方法来进行描述.在本章 18.5 节,18.6.6 小节的最后,都对这些情况下非静态、非平衡,以及非线性的等效静电势作了讨论.在文献[6]这一专著中,可以找到非热力学平衡等离子体体系中屏蔽效应更仔细的动理学描述.

18.4 无磁场时的朗道方程

前面所给出的两粒子碰撞微分算子——朗道算子,是从模型方法得出的.本节可以证明,朗道算子也可以从 BBGKY 头两个链式方程在一定的近似下导出,这就证明了本章要介绍的推导更一般碰撞算子(积分)方法的可信性.

在无外磁场时,粒子在关联长度之外的空间中作匀速直线运动.这时可以由 $P(1,2)$满足的动理学方程导出朗道碰撞项.为了简单,在下面的推导中采用屏蔽库仑势而不是库仑势,但同时去掉 $P(1,2)$方程最右面的极化效应(积分)项.由于在热力学平衡态下,这些极化项的作用就是贡献屏蔽效应,故可以合理地认为,对于偏离热力学平衡态不远的等离子体体系,上面的做法离实际情况并不远.这样两粒子关联函数所满足的方程就是

$$\frac{\partial P(1,2)}{\partial t}+\boldsymbol{v}_1\cdot\frac{\partial P(1,2)}{\partial\boldsymbol{r}_1}+\boldsymbol{v}_2\cdot\frac{\partial P(1,2)}{\partial\boldsymbol{r}_2}$$
$$=\frac{\partial\varphi_{12}}{\partial\boldsymbol{r}_1}\cdot\left[\frac{f(2)}{m_1}\frac{\partial f(1)}{\partial\boldsymbol{v}_1}-\frac{f(1)}{m_2}\frac{\partial f(2)}{\partial\boldsymbol{v}_2}\right]. \quad (18.19)$$

这个方程可以借助格林函数的方法来求解.上述非齐次方程所对应的格林函数满足方程

$$\frac{\partial G(1,2)}{\partial t}+\boldsymbol{v}_1\cdot\frac{\partial G(1,2)}{\partial \boldsymbol{r}_1}+\boldsymbol{v}_2\cdot\frac{\partial G(1,2)}{\partial \boldsymbol{r}_2}$$
$$=\delta(t-t')\delta(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_1')\delta(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_2'),\qquad(18.20)$$

其解是已知的，

$$G(1,2)=\theta(t-t')\delta(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_1'-\boldsymbol{v}_1(t-t'))$$
$$\cdot\delta(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_2'-\boldsymbol{v}_2(t-t')),\qquad(18.21)$$
$$\theta=\begin{cases}1, & t>0,\\ 0, & t<0.\end{cases}$$

于是关联函数为

$$P(1,2)$$
$$=\int dt'd\boldsymbol{r}_1'd\boldsymbol{r}_2'G(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_1';\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r}_2';t,t')\frac{\partial\varphi(r_{12}')}{\partial \boldsymbol{r}_1'}$$
$$\cdot\left[\frac{\partial f(\boldsymbol{r}_1',\boldsymbol{v}_1,t')}{\partial \boldsymbol{v}_1}\frac{f(\boldsymbol{r}_2',\boldsymbol{v}_2,t')}{m_1}-\frac{\partial f(\boldsymbol{r}_2',\boldsymbol{v}_2,t')}{\partial \boldsymbol{v}_2}\frac{f(\boldsymbol{r}_1',\boldsymbol{v}_1,t')}{m_2}\right]$$
$$=\int dt'\frac{\partial\varphi(|\boldsymbol{r}_{12}-(\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_2)(t-t')|)}{\partial \boldsymbol{r}_{12}}$$
$$\cdot\left[\frac{\partial f(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{v}_1(t-t'),\boldsymbol{v}_1,t')}{\partial \boldsymbol{v}_1}\frac{f(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{v}_2(t-t'),\boldsymbol{v}_2,t')}{m_1}\right.$$
$$\left.-\frac{\partial f(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{v}_2(t-t'),\boldsymbol{v}_2,t')}{\partial \boldsymbol{v}_2}\frac{f(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{v}_1(t-t'),\boldsymbol{v}_1,t')}{m_2}\right].$$

上面最后一个等式是将格林函数的明显表达式代入后，再利用 δ 函数的积分而直接求出的. 对于剩余的一重积分 $\int\cdots dt'$，可以采取近似的方法积出. 首先应该注意到：因为 φ_{12}取作了屏蔽库仑势，故它是一个短程势，只在它的宗量小于德拜半径的范围内，

$$|\boldsymbol{r}_{12}-(\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_2)(t-t')|\leqslant\lambda_D\qquad(18.22)$$

才不显著为零. 换算成时间间隔，这相当于只有在

$$(t-t')\leqslant\frac{\lambda_D}{|\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_2|}\sim\frac{1}{\omega_p}\qquad(18.23)$$

的时间内势能 φ_{12}才不显著为零. 考虑到 ω_p^{-1} 是非磁化等离子体中最短的时间尺度，而分布函数（由于碰撞而发生）显著变化的时间尺度是平均碰撞时间 τ_c，一般总有 $\tau_c\gg\omega_p^{-1}$（$\nu_c\ll\omega_p$）. 将上面对时间 $\int dt'$ 的积分变成对 $\int d(t-t')=\int d\tau$ 的积分后，在积分值不显著为零的时间内，被积函数中的速度分布函数可以近似为

$$f(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{v}_1(t-t'),\boldsymbol{v}_1,t')\sim f(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{v}_1,t),$$

也即它们与积分变量无关. 这样可以将被积函数中方括号内的所有项都移出积分号，从而得到

$$P(1,2)=\left[\frac{f(2)}{m_1}\frac{\partial f(1)}{\partial \boldsymbol{v}_1}-\frac{f(1)}{m_2}\frac{\partial f(2)}{\partial \boldsymbol{v}_2}\right]$$
$$\cdot\int_0^\infty\frac{\partial\varphi(|\boldsymbol{r}_{12}-(\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_2)\tau|)}{\partial \boldsymbol{r}_{12}}d\tau.\qquad(18.24)$$

其中积分的上限取成无穷大是为了表达的方便，因为被积函数在 $\tau>\omega_p^{-1}$ 时自动变成零，故这样取积分上限对积分的结果不会有影响. 把上式代入单粒子动理学方程中的碰撞算子表达式(18.10)和(18.11)，就得到

$$\left(\frac{\partial f(1)}{\partial t}\right)_c=\frac{n_0}{m_1}\int d\boldsymbol{r}_2d\boldsymbol{v}_2\frac{\partial\varphi(\boldsymbol{r}_{12})}{\partial \boldsymbol{r}_{12}}\cdot\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{v}_1}\left\{\left[\frac{f(2)}{m_1}\frac{\partial f(1)}{\partial \boldsymbol{v}_1}\right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{f(1)}{m_2}\frac{\partial f(2)}{\partial \boldsymbol{v}_2}\right]\cdot\int_0^\infty\frac{\partial\varphi(|\boldsymbol{r}_{12}-(\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_2)\tau|)}{\partial \boldsymbol{r}_{12}}d\tau\right\}.$$

其中对 $\int d\boldsymbol{r}_2\cdots$ 和 $\int d\tau\cdots$ 的积分可以完成，这时要用到两个重要的技巧. 这两个技巧具有普适性，还可以用在其他的用 BBGKY 链式方程求碰撞算子的问题中.

第一个重要的技巧是：在进行积分 $\int d\boldsymbol{r}_2\cdots$ 时，利用空间傅氏变换将屏蔽库仑势写成

$$\varphi(r)=\frac{q_1q_2}{2\pi}\int d\boldsymbol{k}\frac{1}{k^2+k_D^2}e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}},\quad k_D=\frac{1}{\lambda_D}.\qquad(18.25)$$

这样碰撞算子就变成

$$\left(\frac{\partial f(1)}{\partial t}\right)_c=-\frac{q_1^2q_2^2n_0}{4\pi^4m_1}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{v}_1}\cdot\int d\boldsymbol{r}_2d\boldsymbol{v}_2d\boldsymbol{k}d\boldsymbol{l}\boldsymbol{k}\frac{1}{k^2+k_D^2}\exp(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}_{12})$$

$$\times \int_0^\infty d\tau \frac{\exp\{i\boldsymbol{l}\cdot[\boldsymbol{r}_{12}-(\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_2)\tau]\}}{l^2+k_D^2}$$

$$\times \boldsymbol{l}\cdot\left[\frac{f(2)}{m_1}\frac{\partial f(1)}{\partial \boldsymbol{v}_1}-\frac{f(1)}{m_2}\frac{\partial f(2)}{\partial \boldsymbol{v}_2}\right].$$

在对$\int d\boldsymbol{r}_2\cdots$作积分时，被积函数中含有$\boldsymbol{r}_{12}$，而只有当它小于德拜半径时屏蔽库仑势才不为零. 因此当$\boldsymbol{r}_1$给定时，$\int d\boldsymbol{r}_2\cdots$中的被积函数只在$0\to\lambda_D$的空间中才有非零值. 被积函数中的分布函数$f(2)=f(\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{v}_2)$的坐标变量可写成$\boldsymbol{r}_2=\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_{12}\approx\boldsymbol{r}_1-\lambda_D$. 但分布函数在空间发生显著变化的特征长度是平均自由程$\lambda_c\gg\lambda_D$，所以$f(\boldsymbol{r}_2)=f(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_{12})\approx f(\boldsymbol{r}_1)$，也就是说它与$\boldsymbol{r}_2$无关，可以移到$\int d\boldsymbol{r}_2\cdots$的积分号外. 结果有

$$\left(\frac{\partial f(1)}{\partial t}\right)_c=-\frac{q_1^2q_2^2n_0}{4\pi^4m_1}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{v}_1}\cdot\int d\boldsymbol{v}_2 d\boldsymbol{k} d\boldsymbol{l}\boldsymbol{k}\frac{1}{k^2+k_D^2}$$

$$\times\left(\int_0^\infty d\tau\exp[-i\boldsymbol{l}\cdot(\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_2)\tau]\right)\frac{1}{l^2+k_D^2}$$

$$\times \boldsymbol{l}\cdot\left[\frac{f(2)}{m_1}\frac{\partial f(1)}{\partial \boldsymbol{v}_1}-\frac{f(1)}{m_2}\frac{\partial f(2)}{\partial \boldsymbol{v}_2}\right]$$

$$\times\left(\int d\boldsymbol{r}_2\exp[i(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{l})\cdot\boldsymbol{r}_{12}]\right).$$

首先进行对$\int d\boldsymbol{r}_2\cdots$的积分，利用

$$\int d\boldsymbol{r}_2\exp[i(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{l})\cdot\boldsymbol{r}_{12}]=\int d\boldsymbol{r}_{12}\exp[i(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{l})\cdot\boldsymbol{r}_{12}]$$

$$=(2\pi)^3\delta(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{l}),$$

然后再对$\int d\boldsymbol{l}\cdots\delta(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{l})$积分，并利用δ函数的性质，得

$$\left(\frac{\partial f(1)}{\partial t}\right)_c=\frac{(2\pi)^3q_1^2q_2^2n_0}{4\pi^4m_1}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{v}_1}\cdot\int d\boldsymbol{v}_2 d\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}\frac{1}{(k^2+k_D^2)^2}$$

$$\times\left(\int_0^\infty d\tau\exp[i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_2)\tau]\right)$$

$$\times \boldsymbol{k}\cdot\left[\frac{f(2)}{m_1}\frac{\partial f(1)}{\partial \boldsymbol{v}_1}-\frac{f(1)}{m_2}\frac{\partial f(2)}{\partial \boldsymbol{v}_2}\right].$$

接下来对$\int d\tau\cdots$求积，利用 Plemelj 公式，有

$$\int_0^\infty d\tau\exp[i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_2)\tau]$$

$$=\pi\delta(\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_2))-i\frac{\mathscr{P}}{\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_2)}.$$

这是一个复函数，但碰撞算子应该是实的，故上式中只有实部——δ函数对它有贡献. 这样，最后得

$$\left(\frac{\partial f(1)}{\partial t}\right)_c=\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{v}_1}\cdot\left(\frac{2q_1^2q_2^2n_0}{m_1}\int d\boldsymbol{v}_2\int d\boldsymbol{k}\frac{\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}}{(k^2+k_D^2)^2}\delta(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{g})\right)$$

$$\cdot\left[\frac{f(2)}{m_1}\frac{\partial f(1)}{\partial \boldsymbol{v}_1}-\frac{f(1)}{m_2}\frac{\partial f(2)}{\partial \boldsymbol{v}_2}\right]$$

$$=\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{v}_1}\cdot\frac{2q_1^2q_2^2n_0}{m_1}\int d\boldsymbol{v}_2\overset{\Rightarrow}{\boldsymbol{Q}}\cdot\left[\frac{f(2)}{m_1}\frac{\partial f(1)}{\partial \boldsymbol{v}_1}-\frac{f(1)}{m_2}\frac{\partial f(2)}{\partial \boldsymbol{v}_2}\right] \tag{18.26}$$

$$=-\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{v}_1}\cdot\boldsymbol{J}. \tag{18.27}$$

上面已令$\boldsymbol{g}=\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_2$，倒数第二个表达式(18.26)通常称为碰撞算子的 Balescu-Lenard-Guersey(BLG)形式. 而最后的式子中碰撞流算子定义成

$$\boldsymbol{J}=-\frac{2q_1^2q_2^2n_0}{m_1}\int d\boldsymbol{v}_2\overset{\Rightarrow}{\boldsymbol{Q}}\cdot\left[\frac{f(2)}{m_1}\frac{\partial f(1)}{\partial \boldsymbol{v}_1}-\frac{f(1)}{m_2}\frac{\partial f(2)}{\partial \boldsymbol{v}_2}\right], \tag{18.28}$$

$$\overset{\Rightarrow}{\boldsymbol{Q}}=\int d\boldsymbol{k}\frac{\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}}{(k^2+k_D^2)^2}\delta(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{g}). \tag{18.29}$$

第二个重要技巧是：利用以$\boldsymbol{g}=\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_2$为对称轴的球坐标，来完成积分$\int d\boldsymbol{k}\cdots$(见图 18.1)：

$$Q_{ij}=\int\frac{k_ik_j}{(k^2+k_D^2)^2}$$

$$\cdot\delta(kg\cos\theta)\sin\theta d\theta d\varphi k^2 dk,$$

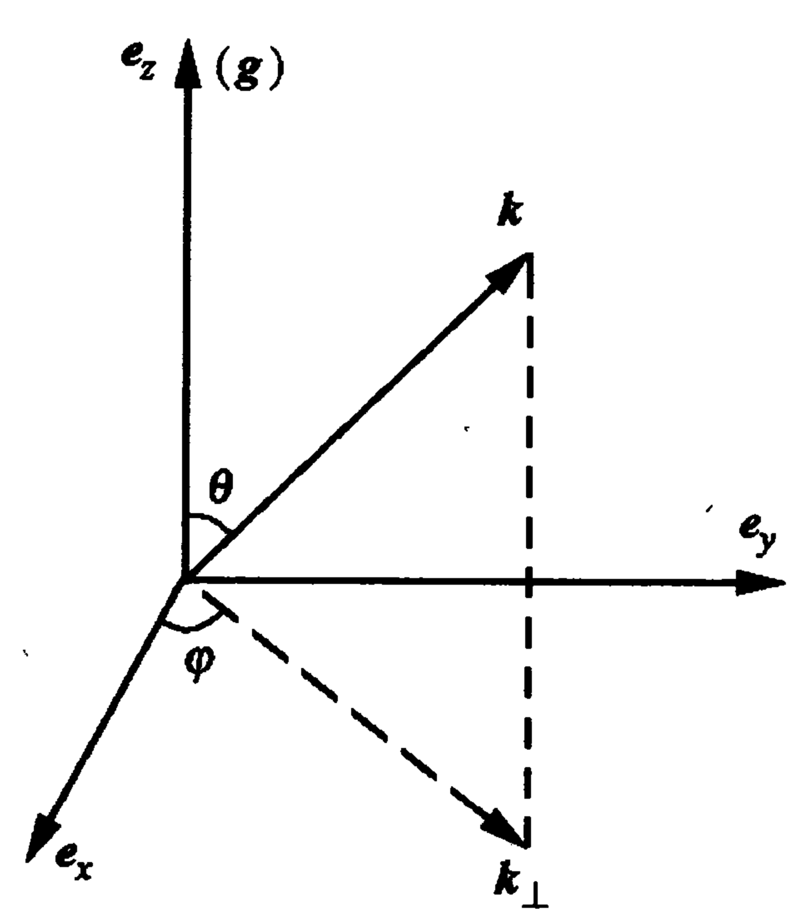


图18.1 k 空间坐标图

$$k_x = k\sin\theta\cos\varphi,$$
$$k_y = k\sin\theta\sin\varphi,$$
$$k_z = k\cos\theta.$$

利用

$$\delta(kg\cos\theta) = \frac{1}{kg}\delta(\cos\theta), \quad \boldsymbol{g} = g\boldsymbol{e}_z,$$

完成对$\int\cdots\sin\theta d\theta$ 的积分后,积分可以分成两个独立的因子,

$$\overset{\leftrightarrow}{Q} = \frac{1}{g}\overset{\leftrightarrow}{\Theta}\int_0^\infty \frac{k^3 dk}{(k^2+k_D^2)^2}, \tag{18.30}$$

其中第一项是对于$\int d\varphi\cdots$的积分.结果是

$$\overset{\leftrightarrow}{\Theta} = \begin{pmatrix} \pi & 0 & 0 \\ 0 & \pi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \pi(\boldsymbol{e}_x\boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_y\boldsymbol{e}_y) = \pi\frac{g^2\overset{\leftrightarrow}{I} - \boldsymbol{gg}}{g^2}. \tag{18.31}$$

而第二项可以进一步化为

$$\int_0^\infty \frac{k^3 dk}{(k^2+k_D^2)^2} = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{x dx}{(x+k_D^2)^2}$$
$$= \frac{1}{2}\left[\frac{k_D^2}{x+k_D^2} + \ln(x+k_D^2)\right]\Bigg|_0^\infty.$$

上式中的第二项在取上限时是对数发散的.因此需要对积分上限作截断,取

$$x_{max} = k_{max}^2 = \frac{1}{r_{min}^2}, \quad r_{min} \approx \frac{q_1 q_2}{T},$$

其中 r_{min}是系统处在热力学平衡态时,两粒子间可能的最短间距——即当粒子间的相对动能完全转成势能时所达到的最近距离.将它代入前面的积分后,有

$$\int_0^\infty \frac{k^3 dk}{(k^2+k_D^2)^2} \approx \int_0^{k_{max}} \frac{k^3 dk}{(k^2+k_D^2)^2}$$
$$= \frac{1}{2}\left[\frac{k_D^2}{k_{max}^2+k_D^2} + \ln(k_{max}^2+k_D^2) - 1 - \ln k_D^2\right].$$

一般

$$\lambda_D \gg r_{min}, \quad \Rightarrow \quad k_{max} \gg k_D = 1/\lambda_D,$$

故

$$\int_0^\infty \frac{k^3 dk}{(k^2+k_D^2)^2} \approx \ln\left(\frac{\lambda_D}{r_{min}}\right) \equiv \ln\Lambda, \tag{18.32}$$

即它正好是经典的库仑对数.这样,最后得

$$\overset{\leftrightarrow}{Q} = \pi\frac{g^2\overset{\leftrightarrow}{I}}{g^3}\ln\Lambda = \pi\frac{\partial^2 g}{\partial \boldsymbol{v}_1\partial \boldsymbol{v}_1}\ln\Lambda, \tag{18.33}$$

以及碰撞算子

$$\left(\frac{\partial f(1)}{\partial t}\right)_c$$
$$= \frac{2q_1^2q_2^2n_0}{m_1}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{v}_1}\cdot\int d\boldsymbol{v}_2\overset{\leftrightarrow}{Q}\cdot\left[\frac{f(2)}{m_1}\frac{\partial f(1)}{\partial \boldsymbol{v}_1} - \frac{f(1)}{m_2}\frac{\partial f(2)}{\partial \boldsymbol{v}_2}\right] \tag{18.34}$$

$$= \frac{\Gamma_1}{2}m_1\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{v}_1}\cdot\int d\boldsymbol{v}_2\frac{\partial^2 g}{\partial \boldsymbol{v}_1\partial \boldsymbol{v}_1}\cdot\left[\frac{f(2)}{m_1}\frac{\partial f(1)}{\partial \boldsymbol{v}_1} - \frac{f(1)}{m_2}\frac{\partial f(2)}{\partial \boldsymbol{v}_2}\right], \tag{18.35}$$

其中

$$\Gamma_1 = \frac{4\pi n_0 q_1^2 q_2^2}{m_1^2}\ln\Lambda, \tag{18.36}$$

这正是前面给出的朗道碰撞算子(15.19)式.

18.5 均匀磁场下的碰撞算子

在等离子体中存在磁场时,两体关联函数 $P(1,2)$服从的动理学方程增加了速度的导数项

$$\frac{\partial P}{\partial t}+\left(\boldsymbol{v}_1\cdot\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}_1}+\boldsymbol{v}_2\cdot\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}_2}\right)P+\left(\frac{\boldsymbol{F}_1}{m_1}\cdot\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{v}_1}+\frac{\boldsymbol{F}_2}{m_2}\cdot\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{v}_2}\right)P$$
$$=\left(\frac{1}{m_1}\frac{\partial\varphi_{12}}{\partial \boldsymbol{r}_1}\cdot\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{v}_1}+\frac{1}{m_2}\frac{\partial\varphi_{12}}{\partial \boldsymbol{r}_2}\cdot\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{v}_2}\right)f_1(1)f_2(2),$$

其中的力项 $\boldsymbol{F}_1,\boldsymbol{F}_2$ 即是带电粒子在均匀磁场中所受到的洛伦兹力. 这个方程的求解可以采用“沿未扰动轨道积分法”. 即取带电粒子在均匀磁场中的轨道为(其中 $\boldsymbol{b}$ 是磁场方向的单位矢量)

$$\boldsymbol{r}_i(t)=\boldsymbol{r}_i+\boldsymbol{v}_{i\perp}\frac{\sin\omega_c t}{\omega_c}-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{v}_{i\perp}\frac{\cos\omega_c t-1}{\omega_c}+v_{i\parallel}t\boldsymbol{b},$$
$$\boldsymbol{v}_i(t)=\boldsymbol{v}_{i\perp}\cos\omega_c t+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{v}_{i\perp}\sin\omega_c t+v_{i\parallel}\boldsymbol{b}.$$

它和相空间坐标有以下关系

$$\boldsymbol{r}_i(0)=\boldsymbol{r}_i,\quad \boldsymbol{v}_i(0)=\boldsymbol{v}_i. \tag{18.37}$$

这样,关联函数在拉格朗日坐标(也即轨道坐标)系中可以写作

$$P(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{v}_1;\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{v}_2;t)=P(\boldsymbol{r}_1(t),\boldsymbol{v}_1(t);\boldsymbol{r}_2(t),\boldsymbol{v}_2(t);t).$$

而它所满足的动理学方程就变成

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}\equiv\left[\frac{\partial}{\partial t}+\boldsymbol{v}_1(t)\cdot\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}_1(t)}+\boldsymbol{v}_2(t)\cdot\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}_2(t)}+\frac{\boldsymbol{F}_1(t)}{m_1}\cdot\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{v}_1(t)}+\frac{\boldsymbol{F}_2(t)}{m_2}\cdot\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{v}_2(t)}\right]P$$
$$=\left[\frac{1}{m_1}\frac{\partial\varphi_{12}(t)}{\partial \boldsymbol{r}_1(t)}\cdot\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{v}_1(t)}+\frac{1}{m_2}\frac{\partial\varphi_{12}(t)}{\partial \boldsymbol{r}_2(t)}\cdot\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{v}_2(t)}\right]\cdot f_1(\boldsymbol{v}_1(t))f_2(\boldsymbol{v}_2(t)).$$

直接对时间积分后,得(为了表示上的简单,下面令两粒子的质量相同,$m_2=m_1$)

$$P(t)=\frac{1}{m_1}\int_0^t\frac{\partial\varphi_{12}(t')}{\partial \boldsymbol{r}_1(t')}\cdot\left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{v}_1(t')}-\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{v}_2(t')}\right)\cdot f_1(\boldsymbol{v}_1(t'))f_2(\boldsymbol{v}_2(t'))\mathrm{d}t'. \tag{18.38}$$

按(18.11)式的定义,可得碰撞流

$$\boldsymbol{J}=-\frac{n_0}{m_1}\int\mathrm{d}\boldsymbol{r}_2\mathrm{d}\boldsymbol{v}_2\frac{\partial\varphi_{12}}{\partial \boldsymbol{r}_1}P(t\to\infty)$$

$$=-\frac{n_0}{m_1^2}\int\mathrm{d}\boldsymbol{r}_2\mathrm{d}\boldsymbol{v}_2\frac{\partial\varphi_{12}}{\partial \boldsymbol{r}_1}\int_0^\infty\frac{\partial\varphi_{12}(t)}{\partial \boldsymbol{r}_1(t)}\cdot\left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{v}_1(t)}-\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{v}_2(t)}\right)f_1(\boldsymbol{v}_1(t))f_2(\boldsymbol{v}_2(t))\mathrm{d}t.$$

上式中的时间定积分已经改成$\int_0^\infty\cdots\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^0\cdots\mathrm{d}t$. 之所以在碰撞流中取 $P(t\to\infty)$是因为碰撞算子因而碰撞流是在碰撞时间尺度上的物理量,而由(18.38)式求得的关联函数一般包括了各种时间尺度的物理过程. 利用

$$\frac{\partial f(\boldsymbol{v}(\tau))}{\partial \boldsymbol{v}(\tau)}=\boldsymbol{v}_\perp(\tau)\frac{1}{2}\frac{\partial f(\boldsymbol{v}(\tau))}{\partial v_\perp^2(\tau)}+\boldsymbol{v}_\parallel(\tau)\frac{1}{2}\frac{\partial f(\boldsymbol{v}(\tau))}{\partial v_\parallel^2(\tau)}$$
$$=\boldsymbol{v}_\perp(\tau)\frac{1}{2}\frac{\partial f(\boldsymbol{v}(\tau))}{\partial v_\perp^2(\tau)}+\boldsymbol{b}\frac{\partial f(\boldsymbol{v}(\tau))}{\partial v_\parallel(\tau)}$$
$$\equiv\left(\frac{\boldsymbol{v}_\perp(\tau)\boldsymbol{v}_\perp}{v_\perp^2}+\boldsymbol{bb}\right)\cdot\left(\boldsymbol{v}_\perp\frac{1}{2}\frac{\partial f(\boldsymbol{v}(\tau))}{\partial v_\perp^2(\tau)}+\boldsymbol{b}\frac{\partial f(\boldsymbol{v}(\tau))}{\partial v_\parallel(\tau)}\right)$$
$$=\left(\frac{\boldsymbol{v}_\perp(\tau)\boldsymbol{v}_\perp}{v_\perp^2}+\boldsymbol{bb}\right)\cdot\frac{\partial f(\boldsymbol{v})}{\partial \boldsymbol{v}},\quad\frac{\partial f(\boldsymbol{v}(\tau))}{\partial \boldsymbol{v}(\tau)}=\frac{\partial f(\boldsymbol{v})}{\partial \boldsymbol{v}}.$$

于是碰撞流可改写成

$$\boldsymbol{J}=-\frac{n_0}{m_1^2}\int\mathrm{d}\boldsymbol{r}_2\mathrm{d}\boldsymbol{v}_2\frac{\partial\varphi_{12}}{\partial \boldsymbol{r}_1}\int_{-\infty}^0\frac{\partial\varphi_{12}(t)}{\partial \boldsymbol{r}_1(t)}\cdot\left[\left(\frac{\boldsymbol{v}_{1\perp}(t)\boldsymbol{v}_{1\perp}}{v_{1\perp}^2}+\boldsymbol{bb}\right)\cdot\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{v}_1(t)}-\left(\frac{\boldsymbol{v}_{2\perp}(t)\boldsymbol{v}_{2\perp}}{v_{2\perp}^2}+\boldsymbol{bb}\right)\cdot\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{v}_2(t)}\right]f_1(\boldsymbol{v}_1(t))f_2(\boldsymbol{v}_2(t))\mathrm{d}t.$$

在进行上式中的积分时,首先完成对坐标的积分

$$\int\mathrm{d}\boldsymbol{r}_2\frac{\partial\varphi_{12}}{\partial \boldsymbol{r}_1}\frac{\partial\varphi_{12}(t)}{\partial \boldsymbol{r}_1(t)}\equiv\int\mathrm{d}\boldsymbol{r}_{12}\frac{\partial\varphi_{12}}{\partial \boldsymbol{r}_{12}}\frac{\partial\varphi_{12}(t)}{\partial \boldsymbol{r}_{12}(t)}.$$

为此,利用库仑势的傅氏变换

$$\varphi_{12}=\int\mathrm{d}\boldsymbol{k}\varphi_k\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}_{12}},\quad\varphi_{12}(t)=\int\mathrm{d}\boldsymbol{k}'\varphi_{k'}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{r}_{12}(t)}.$$

代入上述积分后,就得到

$$\int\mathrm{d}\boldsymbol{r}_2\frac{\partial\varphi_{12}}{\partial \boldsymbol{r}_1}\frac{\partial\varphi_{12}(t)}{\partial \boldsymbol{r}_1(t)}$$

$$= \int \mathrm{d}\boldsymbol{r}_{12}\mathrm{d}\boldsymbol{k}\mathrm{d}\boldsymbol{k}'(\mathrm{i}\boldsymbol{k})(\mathrm{i}\boldsymbol{k}')\varphi_k\varphi_{k'}$$

$$\times \exp\mathrm{i}[\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}_{12} + \boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{r}_{12}(t)]\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}_{12} + \boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{r}_{12}(t)$$

$$(\text{令 } \Delta\boldsymbol{r}_{12}(t) = \boldsymbol{r}_{12}(t) - \boldsymbol{r}_{12})$$

$$= \boldsymbol{k}'\cdot\Delta\boldsymbol{r}_{12}(t) + (\boldsymbol{k}'+\boldsymbol{k})\cdot\boldsymbol{r}_{12}$$

$$= \int \mathrm{d}\boldsymbol{k}\mathrm{d}\boldsymbol{k}'(-1)\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}'\varphi_k\varphi_{k'}\exp(\mathrm{i}\boldsymbol{k}'\cdot\Delta\boldsymbol{r}_{12}(t))$$

$$\times \int \mathrm{d}\boldsymbol{r}_{12}\exp\cdot[\mathrm{i}(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k}')\boldsymbol{r}_{12}]$$

$$\times \int \mathrm{d}\boldsymbol{r}_{12}\exp[\mathrm{i}(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k}')\cdot\boldsymbol{r}_{12}]$$

$$= (2\pi)^3\delta(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k}')$$

$$= (2\pi)^3\int \mathrm{d}\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}|\varphi_k|^2\exp(\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\Delta\boldsymbol{r}_{12}(t)).$$

这样,完成了对坐标的积分后,碰撞流就变成

$$\boldsymbol{J} = -\frac{n_0}{m_1^2}(2\pi)^3\int \mathrm{d}\boldsymbol{v}_2\mathrm{d}\boldsymbol{k}|\varphi_k|^2\int_{-\infty}^0 \mathrm{d}t\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}$$

$$\cdot\left(\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{v}_1(t)} - \frac{\partial}{\partial\boldsymbol{v}_2(t)}\right)f_1(\boldsymbol{v}_1(t))f_2(\boldsymbol{v}_2(t))\exp(\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\Delta\boldsymbol{r}_{12}(t)).$$

再利用

$$\frac{\partial f(\boldsymbol{v}(t))}{\partial\boldsymbol{v}(t)} \equiv \frac{\partial f\boldsymbol{v}}{\partial\boldsymbol{v}}\bigg|_{\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}(t)} = \boldsymbol{v}_\perp(t)\frac{1}{2}\frac{\partial f(\boldsymbol{v}(t))}{\partial v_\perp^2(t)} + \boldsymbol{b}\frac{\partial f(\boldsymbol{v}(t))}{\partial v_\parallel(t)},$$

$$\Rightarrow\quad \boldsymbol{k}\cdot\frac{\partial f(\boldsymbol{v}(t))}{\partial\boldsymbol{v}(t)} = \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}_\perp(t)\frac{1}{2}\frac{\partial f(\boldsymbol{v}(t))}{\partial v_\perp^2(t)} + k_\parallel\frac{\partial f(\boldsymbol{v}(t))}{\partial v_\parallel(t)},$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}_\perp(t) &= \boldsymbol{k}\cdot[\boldsymbol{v}_{1\perp}\cos\omega_c t + (\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{v}_\perp)\sin\omega_c t] \\ &= (\boldsymbol{k}_\perp\cos\omega_c t + \boldsymbol{k}_\perp\times\boldsymbol{b}\sin\omega_c t)\cdot\boldsymbol{v}_\perp \\ &= \boldsymbol{k}_\perp(t)\cdot\boldsymbol{v}_\perp,\end{aligned}$$

$$\Rightarrow\quad \boldsymbol{k}\cdot\left(\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{v}_1(t)} - \frac{\partial}{\partial\boldsymbol{v}_2(t)}\right)f_1(\boldsymbol{v}_1(t))f_2(\boldsymbol{v}_2(t))$$

$$= \boldsymbol{k}_\perp(t)\cdot\left(\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{v}_1} - \frac{\partial}{\partial\boldsymbol{v}_2}\right)f_1(\boldsymbol{v}_1)f_2(\boldsymbol{v}_2).$$

其中

$$\boldsymbol{k}(t) = \boldsymbol{k}_\perp(t) + k_\parallel\boldsymbol{b},\quad \boldsymbol{k}_\perp(t) = \boldsymbol{k}_\perp\cos\omega_c t + \boldsymbol{k}_\perp\times\boldsymbol{b}\sin\omega_c t. \tag{18.39}$$

代入碰撞流的表达式后,有

$$\boldsymbol{J} = -\frac{n_0}{m_1^2}(2\pi)^3\int \mathrm{d}\boldsymbol{v}_2\mathrm{d}\boldsymbol{k}|\varphi_k|^2$$

$$\times\int_{-\infty}^0 \mathrm{d}t\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}(t)\cdot\left(\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{v}_1} - \frac{\partial}{\partial\boldsymbol{v}_2}\right)f_1(\boldsymbol{v}_1)f_2(\boldsymbol{v}_2)\exp[\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\Delta\boldsymbol{r}_{12}(t)]$$

$$= \int \mathrm{d}\boldsymbol{v}_2\overset{\leftrightarrow}{Q}(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2)\cdot\left(\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{v}_1} - \frac{\partial}{\partial\boldsymbol{v}_2}\right)f_1(\boldsymbol{v}_1)f_2(\boldsymbol{v}_2), \tag{18.40}$$

$$\overset{\leftrightarrow}{Q}(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2) = -\frac{(2\pi)^3 n_0}{m_1^2}\int \mathrm{d}\boldsymbol{k}|\varphi_k|^2\int_{-\infty}^0 \mathrm{d}t\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}(t)\exp[\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\Delta\boldsymbol{r}_{12}(t)]. \tag{18.41}$$

这就把碰撞流表示成了最简捷的形式,通常称为 BLG 形式. 下面就来计算 $\overset{\leftrightarrow}{Q}$,先看其中指数因子上的

$$\Delta\boldsymbol{r}_{12}(t) = \boldsymbol{r}_{12}(t) - \boldsymbol{r}_{12},\quad \boldsymbol{r}_{12} = \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2.$$

而进一步有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}_{12}(t) &\equiv \boldsymbol{r}_1(t) - \boldsymbol{r}_2(t) \\ &= \boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{v}_{1\perp}\frac{\sin\omega_c t}{\omega_c} - (\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{v}_{1\perp})\frac{\cos\omega_c t - 1}{\omega_c} + v_{1\parallel}t\boldsymbol{b} \\ &\quad - \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{v}_{2\perp}\frac{\sin\omega_c t}{\omega_c} + (\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{v}_{2\perp})\frac{\cos\omega_c t - 1}{\omega_c} - v_{2\parallel}t\boldsymbol{b} \\ &= \boldsymbol{r}_{12} + \boldsymbol{v}_{12\perp}\frac{\sin\omega_c t}{\omega_c} - (\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{v}_{12\perp})\frac{\cos\omega_c t - 1}{\omega_c} + v_{12\parallel}t\boldsymbol{b}.\end{aligned}$$

所以合起来,最后可得

$$\Delta\boldsymbol{r}_{12}(t) = \boldsymbol{v}_{12\perp}\frac{\sin\omega_c t}{\omega_c} - (\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{v}_{12\perp})\frac{\cos\omega_c t - 1}{\omega_c} + v_{12\parallel}t\boldsymbol{b}.$$

当磁场趋于零($B\to 0$)时,$\Delta\boldsymbol{r}_{12}(t)\to\boldsymbol{v}_{12}t = (\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2)t$,这就回到了无磁场的均速直线运动情况.

为了求出 $\overset{\leftrightarrow}{Q}$,需作 $\boldsymbol{k}$ 空间的积分. 通常情况下,如果取图 18.2 的坐标系,可以比较容易地完成这个积分. 这时

$$\int \mathrm{d}\boldsymbol{k} = \int_0^\infty k_\perp \mathrm{d}k_\perp\int_{-\infty}^\infty \mathrm{d}k_\parallel\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\alpha.$$

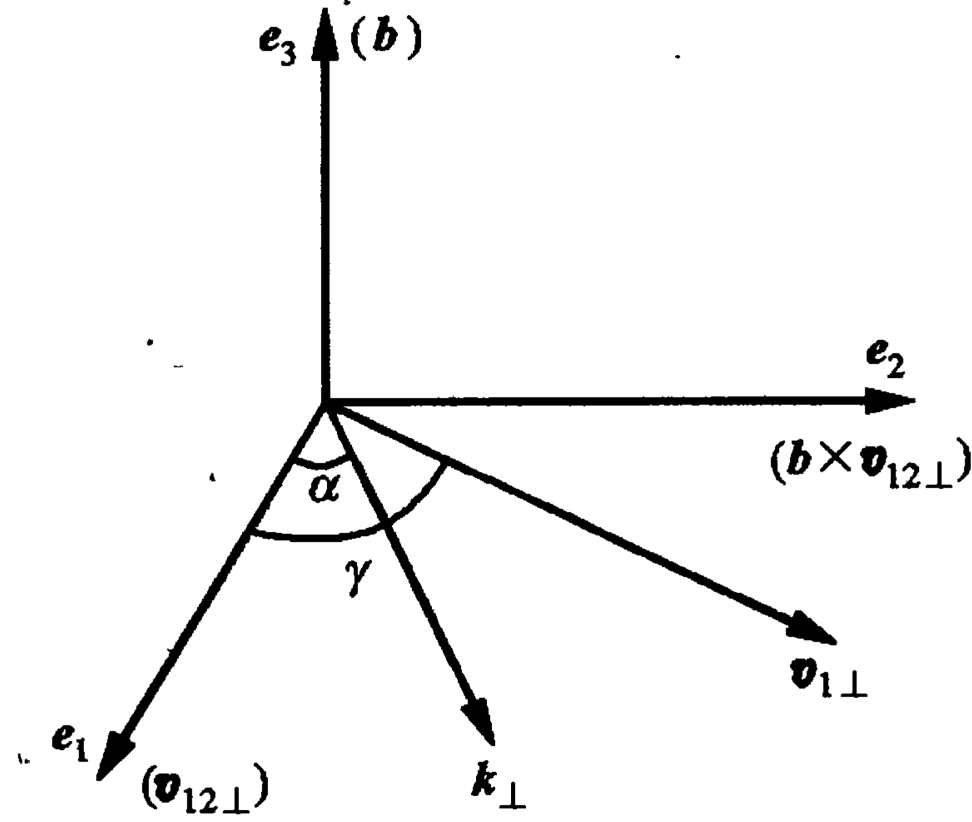


图 18.2　$k_\perp$的坐标图

而被积函数中的因子

$$\begin{aligned}\boldsymbol{kk}(t) &= [k_\perp\cos\alpha\boldsymbol{e}_1 + k_\perp\sin\alpha\boldsymbol{e}_2 + k_\parallel\boldsymbol{e}_3] \\ &\quad\times[(\boldsymbol{e}_1k_\perp\cos\alpha + \boldsymbol{e}_2k_\perp\sin\alpha)\cos\omega_c t \\ &\quad + (\boldsymbol{e}_1k_\perp\cos\alpha + \boldsymbol{e}_2k_\perp\sin\alpha)\times\boldsymbol{b}\sin\omega_c t + \boldsymbol{e}_3k_\parallel] \\ &= [k_\perp\cos\alpha\boldsymbol{e}_1 + k_\perp\sin\alpha\boldsymbol{e}_2 + k_\parallel\boldsymbol{e}_3] \\ &\quad\times[\boldsymbol{e}_1k_\perp\cos(\alpha-\omega_c t) + \boldsymbol{e}_2k_\perp\sin(\alpha-\omega_c t) + \boldsymbol{e}_3k_\parallel].\end{aligned}$$

把上面的张量展写成分量形式，就是

$$\boldsymbol{kk}(t) = \begin{pmatrix} k_\perp^2\cos\alpha\cos(\alpha-\omega_c t) & k_\perp^2\cos\alpha\sin(\alpha-\omega_c t) & k_\perp k_\parallel\cos\alpha \\ k_\perp^2\sin\alpha\cos(\alpha-\omega_c t) & k_\perp^2\sin\alpha\sin(\alpha-\omega_c t) & k_\perp k_\parallel\sin\alpha \\ k_\perp k_\parallel\cos(\alpha-\omega_c t) & k_\perp k_\parallel\sin(\alpha-\omega_c t) & k_\parallel^2 \end{pmatrix}. \tag{18.42}$$

另一方面

$$\begin{aligned}\boldsymbol{k}\cdot\Delta\boldsymbol{r}_{12}(t) &= [k_\perp\cos\alpha\boldsymbol{e}_1 + k_\perp\sin\alpha\boldsymbol{e}_2 + k_\parallel\boldsymbol{e}_3] \\ &\quad\cdot\left(\boldsymbol{e}_1v_{12\perp}\frac{\sin\omega_c t}{\omega_c} - \boldsymbol{e}_2v_{12\perp}\frac{\cos\omega_c t - 1}{\omega_c} + \boldsymbol{b}v_{12\parallel}t\right) \\ &= \frac{k_\perp v_{12\perp}}{\omega_c}\cos\alpha\sin\omega_c t - \frac{k_\perp v_{12\perp}}{\omega_c}\sin\alpha\cos\omega_c t \\ &\quad + \frac{k_\perp v_{12\perp}}{\omega_c}\sin\alpha + k_\parallel v_{12\parallel}t \\ &= \frac{k_\perp v_{12\perp}}{\omega_c}\sin(\omega_c t - \alpha) + k_\parallel v_{12\parallel}t + \frac{k_\perp v_{12\perp}}{\omega_c}\sin\alpha.\end{aligned}$$

利用贝塞尔函数的展开式

$$\exp(\mathrm{i}z\sin(\omega_c t - \alpha)) = \sum_{l=-\infty}^{\infty}\mathrm{J}_l(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}l(\omega_c t-\alpha)},$$

有

$$\begin{aligned}&\exp(\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\Delta\boldsymbol{r}_{12}(t)) \\ &\quad= \sum_l\mathrm{J}_l\left(\frac{k_\perp v_{12\perp}}{\omega_c}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}l(\omega_c t-\alpha)+\mathrm{i}k_\parallel v_{12\parallel}t}\sum_m\mathrm{J}_m\left(\frac{k_\perp v_{12\perp}}{\omega_c}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\alpha} \\ &\quad= \sum_{l,m}\mathrm{J}_l\mathrm{J}_m\mathrm{e}^{\mathrm{i}(m-l)\alpha}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(l\omega_c+k_\parallel v_{12\parallel})t}.\end{aligned}$$

把上面列出的各个表达式代入$\overset{\leftrightarrow}{Q}$，就可以计算它的各个分量．先来算 Q_{11}，

$$\begin{aligned}Q_{11} &= -\frac{(2\pi)^3n_0}{m_1^2}\int\mathrm{d}\boldsymbol{k}|\varphi_k|^2\int_{-\infty}^0\mathrm{d}tk_\perp^2\cos\alpha\cos(\alpha-\omega_c t) \\ &\quad\times\sum_{l,m}\mathrm{J}_l\mathrm{J}_m\mathrm{e}^{\mathrm{i}(m-l)\alpha}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(l\omega_c+k_\parallel v_{12\parallel})t} \\ &= -\frac{(2\pi)^3n_0}{m_1^2}\int k_\perp\,\mathrm{d}k_\perp\,\mathrm{d}k_\parallel\mathrm{d}\alpha|\varphi_k|^2k_\perp^2\cos\alpha\sum_{l,m}\mathrm{J}_l\mathrm{J}_m\mathrm{e}^{\mathrm{i}(m-l)\alpha} \\ &\quad\times\frac{1}{2}\int_{-\infty}^0(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha-\omega_c t)} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\alpha-\omega_c t)})\mathrm{e}^{\mathrm{i}(l\omega_c+k_\parallel v_{12\parallel})t}\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

其中对时间的积分可以首先积出

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^0\mathrm{d}t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_c t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(l\omega_c+k_\parallel v_{12\parallel})t+\varepsilon t}\quad(\text{已令 } l\omega_c = (l\omega_c)_r + \mathrm{i}\varepsilon,\quad\varepsilon\ll1) \\ &\quad= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\frac{1}{\mathrm{i}[(l-1)\omega_c + k_\parallel v_{12\parallel}]}\mathrm{e}^{\mathrm{i}[(l-1)\omega_c+k_\parallel v_{12\parallel}]t+\varepsilon t}\Big|_{-\infty}^0 \\ &\quad= -\mathrm{i}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}}{(l-1)\omega_c + k_\parallel v_{12\parallel}},\end{aligned}$$

$$\int_{-\infty}^0\mathrm{d}t\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_c t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(l\omega_c+k_\parallel v_{12\parallel})t} = -\mathrm{i}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}}{(l+1)\omega_c + k_\parallel v_{12\parallel}}.$$

于是有

$$Q_{11}=\frac{(2\pi)^3n_0}{m_1^2}\int k_\perp^3\,\mathrm{d}k_\perp\,\mathrm{d}k_\parallel\,|\varphi_k|^2\sum_{l,m}\mathrm{J}_l\mathrm{J}_m\,\frac{\mathrm{i}}{4}\int_0^{2\pi}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha})\mathrm{e}^{\mathrm{i}(m-l)\alpha}$$

$$\times\left[\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}}{(l-1)\omega_c+k_\parallel v_{12\parallel}}+\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}}{(l+1)\omega_c+k_\parallel v_{12\parallel}}\right]\mathrm{d}\alpha,$$

其中最后一项是对于速度空间相角的积分，可以直接积分，

$$\int_0^{2\pi}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha})\mathrm{e}^{\mathrm{i}(m-l)\alpha}\left[\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}}{(l-1)\omega_c+k_\parallel v_{12\parallel}}+\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}}{(l+1)\omega_c+k_\parallel v_{12\parallel}}\right]\mathrm{d}\alpha$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\alpha\left[\frac{1}{(l-1)\omega_c+k_\parallel v_{12\parallel}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(m-l+2)\alpha}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}(m-l)\alpha})\right.$$

$$\left.+\frac{1}{(l+1)\omega_c+k_\parallel v_{12\parallel}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(m-l-2)\alpha}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}(m-l)\alpha})\right]$$

$$=2\pi\left[\frac{\delta(m-l+2)+\delta(m-l)}{(l-1)\omega_c+k_\parallel v_{12\parallel}}+\frac{\delta(m-l-2)+\delta(m-l)}{(l+1)\omega_c+k_\parallel v_{12\parallel}}\right].$$

这样

$$Q_{11}=\mathrm{i}\,\frac{(2\pi)^4n_0}{4m_1^2}\int k_\perp^3\,\mathrm{d}k_\perp\,\mathrm{d}k_\parallel\,|\varphi_k|^2$$

$$\times\sum_l\left[\frac{\mathrm{J}_{l-2}\mathrm{J}_l+\mathrm{J}_l^2}{(l-1)\omega_c+k_\parallel v_{12\parallel}}+\frac{\mathrm{J}_{l+2}\mathrm{J}_l+\mathrm{J}_l^2}{(l+1)\omega_c+k_\parallel v_{12\parallel}}\right].$$

上式方括号内的第一项可以进一步简化

$$\sum_l\frac{\mathrm{J}_{l-2}\mathrm{J}_l+\mathrm{J}_l^2}{(l-1)\omega_c+k_\parallel v_{12\parallel}}$$

$$(\text{令 } l=l'+1)=\sum_{l'}\frac{\mathrm{J}_{l'-1}\mathrm{J}_{l'+1}+\mathrm{J}_{l'+1}^2}{l'\omega_c+k_\parallel v_{12\parallel}}$$

$$=\sum_{l'}\frac{\mathrm{J}_{l'+1}}{l'\omega_c+k_\parallel v_{12\parallel}}\,\frac{2l'\omega_c}{k_\perp v_{12\perp}}\mathrm{J}_{l'},$$

$$\mathrm{J}_{l+1}+\mathrm{J}_{l-1}=\frac{2l}{k_\perp v_{12\perp}/\omega_c}\mathrm{J}_l\left(\frac{k_\perp v_{12\perp}}{\omega_c}\right).$$

同样方括号内的第二项可写成

$$\sum_l\frac{\mathrm{J}_{l+2}\mathrm{J}_l+\mathrm{J}_l^2}{(l+1)\omega_c+k_\parallel v_{12\parallel}}$$

$$=\sum_{l'}\frac{\mathrm{J}_{l'-1}}{l'\omega_c+k_\parallel v_{12\parallel}}\,\frac{2l'\omega_c}{k_\perp v_{12\perp}}\mathrm{J}_{l'}.$$

经整理，最后得出

$$Q_{11}=\mathrm{i}\,\frac{(2\pi)^4n_0}{4m_1^2}\int k_\perp^3\,\mathrm{d}k_\perp\,\mathrm{d}k_\parallel\,|\varphi_k|^2\sum_l\frac{1}{l\omega_c+k_\parallel v_{12\parallel}-\mathrm{i}\varepsilon}\left(\frac{2l\omega_c\mathrm{J}_l}{k_\perp v_{12\perp}}\right)^2$$

$$=\mathrm{i}\,\frac{(2\pi)^4n_0}{m_1^2}\sum_l\int\mathrm{d}k_\perp\,k_\perp^3\,|\varphi_k|^2\left(\frac{l\omega_c\mathrm{J}_l}{k_\perp v_{12\perp}}\right)^2$$

$$\times\int\mathrm{d}k_\parallel\left[\frac{\mathscr{P}}{l\omega_c+k_\parallel v_{12\parallel}}+\mathrm{i}\pi\delta(l\omega_c+k_\parallel v_{12\parallel})\right].$$

这是一个复函数，它的实部为

$$\mathrm{Re}(Q_{11})=-\frac{(2\pi)^4\pi n_0}{m_1^2}\sum_l\int_0^\infty\mathrm{d}k_\perp\,k_\perp^3\int_{-\infty}^\infty\mathrm{d}k_\parallel$$

$$\times\left(\frac{l\omega_c\mathrm{J}_l}{k_\perp v_{12\perp}}\right)^2|\varphi_k|^2\delta(l\omega_c+k_\parallel v_{12\parallel}).\qquad(18.43)$$

下面给出其他分量的计算过程.

$$Q_{12}=-\frac{(2\pi)^3n_0}{m_1^2}\int\mathrm{d}\boldsymbol{k}\,|\varphi_k|^2\int_{-\infty}^0\mathrm{d}t k_\perp^2\cos\alpha\sin(\alpha-\omega_ct)$$

$$\times\sum_{l,m}\mathrm{J}_l\mathrm{J}_m\mathrm{e}^{\mathrm{i}(m-l)\alpha}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(l\omega_c+k_\parallel v_{12\parallel})t}$$

$$=-\frac{(2\pi)^3n_0}{m_1^2}\sum_{l,m}\int\mathrm{d}\boldsymbol{k}\,|\varphi_k|^2k_\perp^2\cos\alpha\,\mathrm{J}_l\mathrm{J}_m\mathrm{e}^{\mathrm{i}(m-l)\alpha}$$

$$\times\frac{1}{2\mathrm{i}}\int_{-\infty}^0(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha-\omega_ct)}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\alpha-\omega_ct)})\mathrm{e}^{\mathrm{i}(l\omega_c+k_\parallel v_{12\parallel})t}$$

$$=\frac{(2\pi)^3n_0}{m_1^2}\sum_{l,m}\int k_\perp^3\,\mathrm{d}k_\perp\,\mathrm{d}k_\parallel\,|\varphi_k|^2\mathrm{J}_l\mathrm{J}_m\,\frac{1}{4}\int\mathrm{d}\alpha(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha})$$

$$\times\mathrm{e}^{\mathrm{i}(m-l)\alpha}\left[\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}}{(l-1)\omega_c+k_\parallel v_{12\parallel}}-\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}}{(l+1)\omega_c+k_\parallel v_{12\parallel}}\right]$$

$$=\frac{(2\pi)^4n_0}{4m_1^2}\int k_\perp^3\,\mathrm{d}k_\perp\,\mathrm{d}k_\parallel\,|\varphi_k|^2\sum_l\left[\frac{\mathrm{J}_{l+1}-\mathrm{J}_{l-1}}{l\omega_c+k_\parallel v_{12\parallel}}\,\frac{2l\mathrm{J}_l\omega_c}{k_\perp v_{12\perp}}\right]$$

$$=-\frac{(2\pi)^4n_0}{m_1^2}\sum_l\int k_\perp^3\,\mathrm{d}k_\perp\,\mathrm{d}k_\parallel\,|\varphi_k|^2\,\frac{l\mathrm{J}_l\mathrm{J}_l'\omega_c}{k_\perp v_{12\perp}}\,\frac{1}{l\omega_c+k_\parallel v_{12\parallel}}.$$

其实部为

$$\mathrm{Re}(Q_{12}) = -\frac{(2\pi)^4 n_0}{m_1^2}\sum_l \mathscr{P}\int \frac{k_\perp^3\,\mathrm{d}k_\perp\,\mathrm{d}k_\parallel|\varphi_k|^2}{l\omega_c + k_\parallel v_{12\parallel}}\frac{l\mathrm{J}_l\mathrm{J}_l'}{k_\perp v_{12\perp}/\omega_c}. \tag{18.44}$$

$$Q_{21} = -\frac{(2\pi)^3 n_0}{m_1^2}\int \mathrm{d}\boldsymbol{k}|\varphi_k|^2\int_{-\infty}^0 \mathrm{d}tk_\perp^2\sin\alpha\cos(\alpha-\omega_c t)$$

$$\times\sum_{l,m}\mathrm{J}_l\mathrm{J}_m \mathrm{e}^{\mathrm{i}(m-l)\alpha}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(l\omega_c+k_\parallel v_{12\parallel})t}$$

$$= \frac{(2\pi)^3 n_0}{m_1^2}\sum_{l,m}\int k_\perp^3\,\mathrm{d}k_\perp\,\mathrm{d}k_\parallel|\varphi_k|^2\mathrm{J}_l\mathrm{J}_m\frac{1}{4}\int \mathrm{d}\alpha(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha})$$

$$\times \mathrm{e}^{\mathrm{i}(m-l)\alpha}\left[\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}}{(l-1)\omega_c + k_\parallel v_{12\parallel}} + \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}}{(l+1)\omega_c + k_\parallel v_{12\parallel}}\right].$$

在完成了对$\int \mathrm{d}\alpha\cdots$的积分及对$\sum_m\cdots$的求和后，剩余的和另一个求和$\sum_l\cdots$有关的两项可进一步简化为

$$\sum_l \frac{\mathrm{J}_{l-2}\mathrm{J}_l - \mathrm{J}_l^2}{(l-1)\omega_c + k_\parallel v_{12\parallel}} = \sum_{l'}\frac{\mathrm{J}_{l'-1}\mathrm{J}_{l'+1}-\mathrm{J}_{l'+1}^2}{l'\omega_c + k_\parallel v_{12\parallel}} = \sum_l \frac{2\mathrm{J}_l'\mathrm{J}_{l+1}}{l\omega_c + k_\parallel v_{12\parallel}},$$

$$\sum_l \frac{\mathrm{J}_l^2 - \mathrm{J}_{l+2}\mathrm{J}_l}{(l+1)\omega_c + k_\parallel v_{12\parallel}} = \sum_{l'}\frac{\mathrm{J}_{l'-1}^2-\mathrm{J}_{l'-1}\mathrm{J}_{l'+1}}{l'\omega_c + k_\parallel v_{12\parallel}} = \sum_l \frac{2\mathrm{J}_l'\mathrm{J}_{l-1}}{l\omega_c + k_\parallel v_{12\parallel}}.$$

于是

$$Q_{21} = \frac{(2\pi)^4 n_0}{m_1^2}\frac{1}{2}\int k_\perp^3\,\mathrm{d}k_\perp\,\mathrm{d}k_\parallel|\varphi_k|^2\sum_l \frac{\mathrm{J}_l'(\mathrm{J}_{l+1}+\mathrm{J}_{l-1})}{l\omega_c + k_\parallel v_{12\parallel}}$$

$$= \frac{(2\pi)^4 n_0}{m_1^2}\int k_\perp^3\,\mathrm{d}k_\perp\,\mathrm{d}k_\parallel|\varphi_k|^2\sum_l \frac{1}{l\omega_c + k_\parallel v_{12\parallel}}\frac{l\mathrm{J}_l\mathrm{J}_l'}{k_\perp v_{12\perp}/\omega_c}.$$

而它的实部为

$$\mathrm{Re}(Q_{21}) = \frac{(2\pi)^4 n_0}{m_1^2}\sum_l \mathscr{P}\int\frac{k_\perp^3\,\mathrm{d}k_\perp\,\mathrm{d}k_\parallel|\varphi_k|^2}{l\omega_c + k_\parallel v_{12\parallel}}\frac{l\mathrm{J}_l\mathrm{J}_l'}{k_\perp v_{12\perp}/\omega_c}, \tag{18.45}$$

即

$$\mathrm{Re}(Q_{21}) = -\mathrm{Re}(Q_{12}). \tag{18.46}$$

$$Q_{13} = -\frac{(2\pi)^3 n_0}{m_1^2}\int \mathrm{d}\boldsymbol{k}|\varphi_k|^2\int_{-\infty}^0 \mathrm{d}tk_\perp k_\parallel\cos\alpha$$

$$\times\sum_{l,m}\mathrm{J}_l\mathrm{J}_m \mathrm{e}^{\mathrm{i}(m-l)\alpha}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(l\omega_c+k_\parallel v_{12\parallel})t}$$

$$= \frac{(2\pi)^3 n_0}{m_1^2}\int k_\perp^2\,\mathrm{d}k_\perp k_\parallel\,\mathrm{d}k_\parallel|\varphi_k|^2\sum_{l,m}\mathrm{J}_l\mathrm{J}_m$$

$$\times\frac{1}{2}\int \mathrm{d}\alpha(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha})\mathrm{e}^{\mathrm{i}(m-l)\alpha}\frac{\mathrm{i}}{l\omega_c + k_\parallel v_{12\parallel}}$$

$$= \mathrm{i}\frac{(2\pi)^4 n_0}{2m_1^2}\int k_\perp^2\,\mathrm{d}k_\perp k_\parallel\,\mathrm{d}k_\parallel|\varphi_k|^2\sum_l \frac{\mathrm{J}_{l-1}\mathrm{J}_l + \mathrm{J}_{l+1}\mathrm{J}_l}{l\omega_c + k_\parallel v_{12\parallel}}$$

$$= \mathrm{i}\frac{(2\pi)^4 n_0}{m_1^2}\int k_\perp^2\,\mathrm{d}k_\perp k_\parallel\,\mathrm{d}k_\parallel|\varphi_k|^2\sum_l \frac{\mathrm{J}_l}{l\omega_c + k_\parallel v_{12\parallel}}\frac{l\mathrm{J}_l}{k_\perp v_{12\perp}/\omega_c}$$

$$= \mathrm{i}\frac{(2\pi)^4 n_0}{m_1^2}\sum_l\int k_\perp^2\,\mathrm{d}k_\perp k_\parallel\,\mathrm{d}k_\parallel|\varphi_k|^2\frac{l\mathrm{J}_l^2}{k_\perp v_{12\perp}/\omega_c}$$

$$\cdot\left[\frac{\mathscr{P}}{l\omega_c + k_\parallel v_{12\parallel}} + \mathrm{i}\pi\delta(l\omega_c + k_\parallel v_{12\parallel})\right].$$

其实部为

$$\mathrm{Re}(Q_{13}) = \frac{(2\pi)^4 \pi n_0}{m_1^2}\sum_l\int k_\perp^2\,\mathrm{d}k_\perp\,k_\parallel\mathrm{d}k_\parallel|\varphi_k|^2\frac{l\mathrm{J}_l^2}{k_\perp v_{12\perp}/\omega_c}$$

$$\times\delta(l\omega_c + k_\parallel v_{12\parallel}),$$

而其中

$$\frac{l\mathrm{J}_l^2}{k_\perp v_{12\perp}/\omega_c} = \left(\frac{l\omega_c\mathrm{J}_l}{k_\perp v_{12\perp}}\right)^2\frac{k_\perp v_{12\perp}}{l\omega_c} = \left(\frac{l\omega_c\mathrm{J}_l}{k_\perp v_{12\perp}}\right)^2(-1)\frac{k_\perp v_{12\perp}}{k_\parallel v_{12\parallel}},$$

将上式代入前式后得

$$\mathrm{Re}(Q_{13}) = \frac{v_{12\perp}}{v_{12\parallel}}\frac{(2\pi)^4\pi n_0}{m_1^2}\sum_l\int k_\perp^3\,\mathrm{d}k_\perp\,\mathrm{d}k_\parallel|\varphi_k|^2\left(\frac{l\omega_c\mathrm{J}_l}{k_\perp v_{12\perp}}\right)^2$$

$$\times\delta(l\omega_c + k_\parallel v_{12\parallel})$$

$$= -\frac{v_{12\perp}}{v_{12\parallel}}\mathrm{Re}(Q_{11}).$$

在上面的推导中曾用到δ函数的性质.

$$Q_{31} = -\frac{(2\pi)^3 n_0}{m_1^2}\int \mathrm{d}\boldsymbol{k}|\varphi_k|^2\int_{-\infty}^0 \mathrm{d}tk_\perp k_\parallel$$

$$\times\sum_{l,m}\mathrm{J}_m\mathrm{J}_l \mathrm{e}^{\mathrm{i}(m-l)\alpha}\cos(\alpha-\omega_c t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(l\omega_c+k_\parallel v_{12\parallel})t}$$

$$=\frac{(2\pi)^3 n_0}{m_1^2}\frac{\mathrm{i}}{2}\int k_\perp^2 \mathrm{d}k_\perp k_\parallel \mathrm{d}k_\parallel |\varphi_k|^2$$

$$\times\sum_{l,m}\mathrm{J}_m\mathrm{J}_l\int \mathrm{d}\alpha \mathrm{e}^{\mathrm{i}(m-l)\alpha}\left[\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}}{(l-1)\omega_c+k_\parallel v_{12\parallel}}+\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}}{(l+1)\omega_c+k_\parallel v_{12\parallel}}\right]$$

$$=\frac{(2\pi)^4 n_0}{m_1^2}\frac{\mathrm{i}}{2}\int k_\perp^2 \mathrm{d}k_\perp k_\parallel \mathrm{d}k_\parallel |\varphi_k|^2$$

$$\times\sum_l\left[\frac{\mathrm{J}_{l-1}\mathrm{J}_l}{(l-1)\omega_c+k_\parallel v_{12\parallel}}+\frac{\mathrm{J}_{l+1}\mathrm{J}_l}{(l+1)\omega_c+k_\parallel v_{12\parallel}}\right],$$

上式中的最后两项可进一步计算：

$$\sum_l\frac{\mathrm{J}_{l-1}\mathrm{J}_l}{(l-1)\omega_c+k_\parallel v_{12\parallel}}=\sum_l\frac{\mathrm{J}_l\mathrm{J}_{l+1}}{l\omega_c+k_\parallel v_{12\parallel}},$$

$$\sum_l\frac{\mathrm{J}_{l+1}\mathrm{J}_l}{(l+1)\omega_c+k_\parallel v_{12\parallel}}=\sum_l\frac{\mathrm{J}_l\mathrm{J}_{l-1}}{l\omega_c+k_\parallel v_{12\parallel}}.$$

将它们代入前式得

$$Q_{31}=\frac{(2\pi)^4 n_0}{m_1^2}\frac{\mathrm{i}}{2}\int k_\perp^2\,\mathrm{d}k_\perp\,k_\parallel \mathrm{d}k_\parallel\,|\varphi_k|^2\sum_l\frac{\mathrm{J}_l}{l\omega_c+k_\parallel v_{12\parallel}}\,\frac{2l\mathrm{J}_l}{k_\perp v_{12\perp}/\omega_c}$$

$$=\mathrm{i}\frac{(2\pi)^4 n_0}{m_1^2}\int k_\perp^2\,\mathrm{d}k_\perp\,k_\parallel \mathrm{d}k_\parallel\,|\varphi_k|^2\sum_l\frac{l\mathrm{J}_l^2}{k_\perp v_{12\perp}/\omega_c}$$

$$\times\left[\frac{\mathscr{P}}{l\omega_c+k_\parallel v_{12\parallel}}+\mathrm{i}\pi\delta(l\omega_c+k_\parallel v_{12\parallel})\right].\tag{18.47}$$

它的实部是

$$\mathrm{Re}(Q_{31})=-\frac{(2\pi)^4 n_0}{m_1^2}\sum_l\int k_\perp^2\,\mathrm{d}k_\perp\,k_\parallel \mathrm{d}k_\parallel\,|\varphi_k|^2$$

$$\times\frac{l\mathrm{J}_l^2}{k_\perp v_{12\perp}/\omega_c}\delta(l\omega_c+k_\parallel v_{12\parallel})$$

$$=\mathrm{Re}(Q_{13})=-\frac{v_{12\perp}}{v_{12\parallel}}\mathrm{Re}(Q_{11}).\tag{18.48}$$

$$Q_{22}=-\frac{(2\pi)^3 n_0}{m_1^2}\int \mathrm{d}\boldsymbol{k}\,|\varphi_k|^2\int_{-\infty}^0 \mathrm{d}tk_\perp^2\,\sin\alpha\sin(\alpha-\omega_c t)$$

$$\times\sum_{m,l}\mathrm{J}_l\mathrm{J}_m\mathrm{e}^{\mathrm{i}(m-l)\alpha}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(l\omega_c+k_\parallel v_{12\parallel})t}$$

$$=-\frac{(2\pi)^3 n_0}{m_1^2}\sum_{m,l}\int k_\perp^3\,\mathrm{d}k_\perp\,\mathrm{d}k_\parallel\,|\varphi_k|^2\,\frac{\mathrm{i}}{4}\mathrm{J}_m\mathrm{J}_l\int \mathrm{d}\alpha(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha})$$

$$\times\mathrm{e}^{\mathrm{i}(m-l)\alpha}\left[\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}}{(l-1)\omega_c+k_\parallel v_{12\parallel}}-\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}}{(l+1)\omega_c+k_\parallel v_{12\parallel}}\right]$$

$$=-\frac{(2\pi)^4 n_0}{m_1^2}\frac{\mathrm{i}}{4}\sum_l\int k_\perp^3\,\mathrm{d}k_\perp\,\mathrm{d}k_\parallel\,|\varphi_k|^2\frac{2\mathrm{J}_l'(\mathrm{J}_{l+1}-\mathrm{J}_{l-1})}{l\omega_c+k_\parallel v_{12\parallel}}$$

$$=\mathrm{i}\frac{(2\pi)^4 n_0}{m_1^2}\sum_l\int k_\perp^3\,\mathrm{d}k_\perp\,\mathrm{d}k_\parallel\,|\varphi_k|^2\frac{(\mathrm{J}_l')^2}{l\omega_c+k_\parallel v_{12\parallel}}.$$

$$\mathrm{Re}(Q_{22})=-\frac{(2\pi)^4 n_0}{m_1^2}\sum_l\int k_\perp^3\,\mathrm{d}k_\perp\,\mathrm{d}k_\parallel\,|\varphi_k|^2(\mathrm{J}_l')^2$$

$$\cdot\,\delta(l\omega_c+k_\parallel v_{12\parallel}).\tag{18.49}$$

$$Q_{33}=-\frac{(2\pi)^3 n_0}{m_1^2}\int \mathrm{d}\boldsymbol{k}\,|\varphi_k|^2\int_{-\infty}^0 \mathrm{d}tk_\parallel^2\sum_{m,l}\mathrm{J}_l\mathrm{J}_m\mathrm{e}^{\mathrm{i}(m-l)\alpha}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(l\omega_c+k_\parallel v_{12\parallel})t}$$

$$=\frac{(2\pi)^3 n_0}{m_1^2}\sum_{m,l}\int k_\perp\,\mathrm{d}k_\perp\,k_\parallel^2\mathrm{d}k_\parallel\,|\varphi_k|^2\mathrm{J}_m\mathrm{J}_l$$

$$\times\int \mathrm{d}\alpha \mathrm{e}^{\mathrm{i}(m-l)\alpha}\frac{\mathrm{i}}{l\omega_c+k_\parallel v_{12\parallel}}$$

$$=\mathrm{i}\frac{(2\pi)^4 n_0}{m_1^2}\sum_l\int k_\perp\,\mathrm{d}k_\perp\,k_\parallel^2\mathrm{d}k_\parallel\,|\varphi_k|^2\frac{\mathrm{J}_l^2}{l\omega_c+k_\parallel v_{12\parallel}}.$$

$$\mathrm{Re}(Q_{33})=-\frac{(2\pi)^4 n_0}{m_1^2}\sum_l\int k_\perp\,\mathrm{d}k_\perp\,k_\parallel^2\mathrm{d}k_\parallel\,|\varphi_k|^2\mathrm{J}_l^2\delta(l\omega_c+k_\parallel v_{12\parallel}).$$

再利用

$$\left(\frac{l\omega_c}{k_\perp v_{12\perp}}\right)^2=\frac{k_\parallel^2 v_{12\parallel}^2}{k_\perp^2 v_{12\perp}^2},$$

$$\Rightarrow\quad k_\perp\,\mathrm{d}k_\perp\,k_\parallel^2\mathrm{d}k_\parallel=k_\perp^3\,\mathrm{d}k_\perp\,\mathrm{d}k_\parallel\left(\frac{v_{12\perp}}{v_{12\parallel}}\right)^2\left(\frac{l\omega_c}{k_\perp v_{12\perp}}\right)^2,$$

结果最后得

$$\mathrm{Re}(Q_{33})=-\left(\frac{v_{12\perp}}{v_{12\parallel}}\right)^2\frac{(2\pi)^4 n_0}{m_1^2}\sum_l\int k_\perp^3\,\mathrm{d}k_\perp\,\mathrm{d}k_\parallel\,|\varphi_k|^2$$

$$\times\left(\frac{l\omega_c \mathrm{J}_l}{k_\perp v_{12\perp}}\right)^2\delta(l\omega_c + k_\parallel v_{12\parallel})$$

$$=\left(\frac{v_{12\perp}}{v_{12\parallel}}\right)^2\mathrm{Re}(Q_{11}).$$

$$Q_{32} = -\frac{(2\pi)^3 n_0}{m_1^2}\int \mathrm{d}\boldsymbol{k}\,|\varphi_k|^2\int_{-\infty}^{0}\mathrm{d}t k_\perp k_\parallel$$

$$\times\sum_{l,m}\mathrm{J}_m\mathrm{J}_l \mathrm{e}^{\mathrm{i}(m-l)\alpha}\sin(\alpha-\omega_c t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(l\omega_c+k_\parallel v_{12\parallel})t}$$

$$=\frac{(2\pi)^3 n_0}{m_1^2}\frac{1}{2}\int k_\perp^2\,\mathrm{d}k_\perp\, k_\parallel \mathrm{d}k_\parallel\,|\varphi_k|^2$$

$$\times\sum_{l,m}\mathrm{J}_m\mathrm{J}_l\int \mathrm{d}\alpha \mathrm{e}^{\mathrm{i}(m-l)\alpha}$$

$$\times\left[\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}}{(l-1)\omega_c + k_\parallel v_{12\parallel}} - \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}}{(l+1)\omega_c + k_\parallel v_{12\parallel}}\right]$$

$$=\frac{(2\pi)^4 n_0}{m_1^2}\frac{1}{2}\int k_\perp^2\,\mathrm{d}k_\perp\, k_\parallel \mathrm{d}k_\parallel\,|\varphi_k|^2$$

$$\times\sum_l\left[\frac{\mathrm{J}_{l-1}\mathrm{J}_l}{(l-1)\omega_c + k_\parallel v_{12\parallel}} - \frac{\mathrm{J}_{l+1}\mathrm{J}_l}{(l+1)\omega_c + k_\parallel v_{12\parallel}}\right]$$

$$=-\frac{(2\pi)^4 n_0}{m_1^2}\frac{1}{2}\int k_\perp^2\,\mathrm{d}k_\perp\, k_\parallel \mathrm{d}k_\parallel\,|\varphi_k|^2\sum_l\frac{2\mathrm{J}_l\mathrm{J}_l'}{l\omega_c + k_\parallel v_{12\parallel}}$$

$$=-\frac{(2\pi)^4 n_0}{m_1^2}\int k_\perp^2\,\mathrm{d}k_\perp\, k_\parallel \mathrm{d}k_\parallel\,|\varphi_k|^2\sum_l\frac{\mathrm{J}_l\mathrm{J}_l'}{l\omega_c + k_\parallel v_{12\parallel}}.$$

$$\mathrm{Re}(Q_{32}) = -\frac{(2\pi)^4 n_0}{m_1^2}\sum_l \mathscr{P}\int\frac{k_\perp^2 k_\parallel \mathrm{d}k_\perp\,\mathrm{d}k_\parallel\,|\varphi_k|^2}{l\omega_c + k_\parallel v_{12\parallel}}\mathrm{J}_l\mathrm{J}_l' \tag{18.50}$$

$$\approx\frac{v_{12\perp}}{v_{12\parallel}}\mathrm{Re}(Q_{21}) = -\frac{v_{12\perp}}{v_{12\parallel}}\mathrm{Re}(Q_{12}). \tag{18.51}$$

其中最后一步用到了 δ 函数的性质，虽然上式中并不出现 δ 函数，但是主值积分中贡献最大的仍然是 $k_\parallel \approx -l\omega_c/v_{12\parallel}$ 时的被积函数，因此仍可近似应用 δ 函数的性质. 在这个近似下，可以把上面和下面给出的各分量实部之间的代数关系推广到整个分量之间：

如 $\mathrm{Re}(Q_{21}) = -\mathrm{Re}(Q_{12}) \Rightarrow Q_{21} = -Q_{12},\cdots$.

$$Q_{23} = -\frac{(2\pi)^3 n_0}{m_1^2}\int \mathrm{d}\boldsymbol{k}\,|\varphi_k|^2\int_{-\infty}^{0}\mathrm{d}t k_\perp k_\parallel$$

$$\times\sum_{l,m}\mathrm{J}_m\mathrm{J}_l \mathrm{e}^{\mathrm{i}(m-l)\alpha}\sin\alpha\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(l\omega_c+k_\parallel v_{12\parallel})t}$$

$$=\frac{(2\pi)^3 n_0}{m_1^2}\frac{1}{2}\int k_\perp^2\,\mathrm{d}k_\perp\, k_\parallel \mathrm{d}k_\parallel\,|\varphi_k|^2$$

$$\times\sum_{l,m}\mathrm{J}_m\mathrm{J}_l\int \mathrm{d}\alpha \mathrm{e}^{\mathrm{i}(m-l)\alpha}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}}{l\omega_c + k_\parallel v_{12\parallel}}.$$

在完成了积分和求和 $\sum_m\int \mathrm{d}\alpha\cdots$ 后，上式的最后一行表达式就变成

$$2\pi\sum_l\frac{\mathrm{J}_{l-1}\mathrm{J}_l - \mathrm{J}_{l+1}\mathrm{J}_l}{l\omega_c + k_\parallel v_{12\parallel}} = 4\pi\sum_l\frac{\mathrm{J}_l\mathrm{J}_l'}{l\omega_c + k_\parallel v_{12\parallel}}.$$

结果有

$$Q_{23}=\frac{(2\pi)^4 n_0}{m_1^2}\int k_\perp^2\mathrm{d}k_\perp k_\parallel \mathrm{d}k_\parallel\,|\varphi_k|^2\sum_l\frac{\mathrm{J}_l\mathrm{J}_l'}{l\omega_c + k_\parallel v_{12\parallel}}. \tag{18.52}$$

$$\mathrm{Re}(Q_{23}) = \frac{(2\pi)^4 n_0}{m_1^2}\sum_l \mathscr{P}\int\frac{k_\perp^2 k_\parallel \mathrm{d}k_\perp\,\mathrm{d}k_\parallel\,|\varphi_k|^2}{l\omega_c + k_\parallel v_{12\parallel}}\mathrm{J}_l\mathrm{J}_l' \tag{18.53}$$

$$= -\mathrm{Re}(Q_{32}). \tag{18.54}$$

利用上面的结果（包括近似的 δ 关系），可以把这个二阶张量总的写成

$$\overleftrightarrow{Q} = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & -\left(\frac{v_{12\perp}}{v_{12\parallel}}\right)Q_{11} \\ -Q_{12} & Q_{22} & Q_{23} \\ -\left(\frac{v_{12\perp}}{v_{12\parallel}}\right)Q_{11} & -Q_{23} & \left(\frac{v_{12\perp}}{v_{12\parallel}}\right)^2 Q_{11} \end{pmatrix} = \overleftrightarrow{Q}^{\mathrm{S}} + \overleftrightarrow{Q}^{\mathrm{A}}. \tag{18.55}$$

其中 $\overleftrightarrow{Q}^{\mathrm{S}}$ 是对称张量，而 $\overleftrightarrow{Q}^{\mathrm{A}}$ 是反对称张量

$$\overset{\Rightarrow}{Q}^{S}=\begin{bmatrix} Q_{11} & 0 & -\left(\frac{v_{12\perp}}{v_{12\parallel}}\right)Q_{11} \\ 0 & Q_{22} & 0 \\ -\left(\frac{v_{12\perp}}{v_{12\parallel}}\right)Q_{11} & 0 & \left(\frac{v_{12\perp}}{v_{12\parallel}}\right)^2 Q_{11} \end{bmatrix}. \tag{18.56}$$

$$\overset{\Rightarrow}{Q}^{A}=\begin{bmatrix} 0 & Q_{12} & 0 \\ -Q_{12} & 0 & Q_{23} \\ 0 & -Q_{23} & 0 \end{bmatrix}. \tag{18.57}$$

以上的结果首先见于文献[7].

但为了能得出最后的明显表达式，并能将其与无磁场时朗道碰撞算子相比，必须选取合适的相互作用势，并完成 k 空间的积分. 这方面的工作在同一作者的第二篇文章文献[8]中给出，这里只把其结果作一简单的介绍.

取两粒子相对速度所对应的回旋半径为

$$r_{12}=\frac{v_{12}}{\omega_c}, \tag{18.58}$$

它在 k 空间的对应波矢为

$$k_c=\frac{1}{r_{12}}=\frac{\omega_c}{v_{12}}. \tag{18.59}$$

按 k_c 将库仑势的傅氏变换(唯象地)分成长程和短程的两部分

$$\varphi(k)=\varphi_1(k<k_c)+\varphi_2(k>k_c). \tag{18.60}$$

其长程部分(相互作用只存在于大于回旋半径的距离外)的表达式是

$$\varphi_1(k<k_c)=\begin{cases}\frac{q_1q_2}{2\pi^2k^2}, & 0<k<k_c(r>r_{12}), \\ 0, & k>k_c(r<r_{12}).\end{cases} \tag{18.61}$$

而短程部分(相互作用只存在于小于回旋半径的距离内)的表达式是

$$\varphi_2(k>k_c)=\begin{cases}0, & k<k_c(r>r_{12}), \\ \frac{q_1q_2}{2\pi^2k^2}, & k_c<k<k_{\max}(r_{\min}<r<r_{12}), \\ 0, & k>k_{\max}(r<r_{\min}),\end{cases} \tag{18.62}$$

其中

$$r_{\min}=\frac{q_1q_2}{k_BT}, \quad k_{\max}=\frac{1}{r_{\min}} \tag{18.63}$$

是处在热平衡等离子体中的任意两个带电粒子间的最小可能(平均)间距，因此把它作为粒子间相互作用的下限.

D. Montgomery 证明，当磁场并不足够强，以致仍满足

$$\ln\left(\frac{r_{12}}{r_{\min}}\right)\gg 1 \tag{18.64}$$

时，有

$$|\overset{\Rightarrow}{Q}_2|\gg|\overset{\Rightarrow}{Q}_1|. \tag{18.65}$$

这表示，在碰撞中，比回旋半径短的库仑作用将起主要作用. 利用 $\varphi_2(k_c<k<k_{\max})$ 可算得

$$\overset{\Rightarrow}{Q}_2\approx-\frac{2\pi n_0q_1^2q_2^2}{m_1^2}\frac{v_{12}^2\overset{\Rightarrow}{I}-\boldsymbol{v}_{12}\boldsymbol{v}_{12}}{v_{12}^3}\ln\left(\frac{r_{12}}{r_{\min}}\right). \tag{18.66}$$

而在无磁场时的朗道碰撞项中，相应的

$$\overset{\Rightarrow}{Q}(B=0)=-\frac{2\pi n_0q_1^2q_2^2}{m_1^2}\frac{v_{12}^2\overset{\Rightarrow}{I}-\boldsymbol{v}_{12}\boldsymbol{v}_{12}}{v_{12}^3}\ln\left(\frac{\lambda_D}{r_{\min}}\right). \tag{18.67}$$

可以看出，除了库仑对数，两者的其他部分均相同. 因此在有磁场而磁场强度又不极端强(即 $r_{12}\gg r_{\min}$)时，只需将朗道碰撞算子中的(非磁化)经典库仑对数换成磁化库仑对数即可

$$\ln\Lambda_c\equiv\ln\left(\frac{\lambda_D}{r_{\min}}\right), \quad \Rightarrow \quad \ln\left(\frac{r_{12}}{r_{\min}}\right)=\ln\Lambda_M. \tag{18.68}$$

在目前实验室的等离子体中，一般有

$$r_{12}\gtrsim\lambda_D, \quad \Rightarrow \quad \ln\Lambda_M\gtrsim\ln\Lambda_c.$$

因此,有磁场时的两体弹性碰撞截面一般小于或近似等于无磁场时的碰撞截面.

为了使大家有一个数量级上的概念,下面给出在实验室条件下,磁化等离子体中上述几个参量的数值. 因为

$$r_e = 2.384 T_e^{1/2}[\text{eV}] B^{-1}[\text{G}] \quad \text{cm},$$

$$r_{\min} = 1.438 \times 10^{-7} T_e^{-1}[\text{eV}] \quad \text{cm},$$

$$\lambda_D = 7.434 \times 10^2 T_e^{1/2}[\text{eV}] n^{-1/2}[\text{cm}^{-3}] \quad \text{cm},$$

其中方括号内为其左侧物理量取定的单位,所以有比值

$$\frac{r_e}{r_{\min}} = 1.658 \times 10^3 \frac{T_e^{3/2}[\text{eV}]}{B[\text{T}]},$$

$$\frac{\lambda_D}{r_e} = 0.9860 \frac{B[\text{T}]}{n^{1/2}[10^{13}\,\text{cm}^{-3}]}.$$

故即使在比较低的温度,在实验室中可以达到的强磁场下,仍然有 $r_e/r_{\min} \gg 1$. 例如取 $T_e = 1\,\text{eV}$ 时,

$$B = 1\,\text{T}, \quad \Rightarrow \quad \frac{r_e}{r_{\min}} = 1.66 \times 10^3, \quad \ln\Lambda_M = 7.4 \gg 1,$$

$$B = 10\,\text{T}, \quad \Rightarrow \quad \frac{r_e}{r_{\min}} = 1.66 \times 10^2, \quad \ln\Lambda_M = 5.1 \gg 1.$$

而如果取 $n = 10^{13}\,\text{cm}^{-3}$ 时,

$$B = 1\,\text{T}, \quad \Rightarrow \quad \frac{\lambda_D}{r_e} = 0.986,$$

$$B = 10\,\text{T}, \quad \Rightarrow \quad \frac{\lambda_D}{r_e} = 9.86.$$

通常磁约束聚变装置的磁场在 1~10 T,密度在 $10^{12} \sim 10^{14}\,\text{cm}^{-3}$,故磁化的库仑对数,因而碰撞算子,总是和非磁化的经典值相去不远. 所以对于磁化的等离子体,通常也就采用了无磁场时的朗道碰撞算子,而不必特别考虑磁场的影响.

18.6 Balescu-Lenard 方程

本节着重讨论极化效应对(非热力学平衡态等离子体中)碰撞算子的影响. 因此,假定等离子体中无外场: $\boldsymbol{E}_0 = 0, \boldsymbol{B}_0 = 0$. 于是两体关联函数满足的动理学方程是

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{v}_1 \cdot \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}_1} + \boldsymbol{v}_2 \cdot \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}_2}\right] P_{ij}(1,2)$$

$$= \frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial \boldsymbol{r}_1} \cdot \left(\frac{f_j(2)}{m_i}\frac{\partial f_i(1)}{\partial \boldsymbol{v}_1} - \frac{f_i(1)}{m_j}\frac{\partial f_j(2)}{\partial \boldsymbol{v}_2}\right)$$

$$+ \frac{1}{m_i}\frac{\partial f_i(1)}{\partial \boldsymbol{v}_1} \cdot \sum_l n_l \int \frac{\partial \varphi_{il}}{\partial \boldsymbol{r}_1} P_{lj}(2,l)\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}_l \mathrm{d}\boldsymbol{v}_l$$

$$+ \frac{1}{m_j}\frac{\partial f_j(2)}{\partial \boldsymbol{v}_2} \cdot \sum_l n_l \int \frac{\partial \varphi_{jl}}{\partial \boldsymbol{r}_2} P_{il}(1,l)\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}_l \mathrm{d}\boldsymbol{v}_l.$$

其中

$$\int f_i(\boldsymbol{v}_l, t)\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_1 = 1, \quad i = 1,2;$$

$$(1,2) \equiv (\mu_1, \mu_2; t) = (\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{v}_1; \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{v}_2; t).$$

本节用 $i, j, l, \cdots = \text{e}, i_1, i_2, \cdots$ 代表不同种类的粒子,用 $1, 2, l, \cdots$ 代表不同粒子的轨道(坐标和速度),同类粒子也可以有不同的轨道. 在本节中,一般用 $f_i(1), f_j(2), f_l(l)$ 这样的种类和轨道的搭配,即对第 l 类的粒子,其轨道也标为 $\mu_l = \boldsymbol{r}_l, \boldsymbol{v}_l$.

这个方程可以有多种求解方法. Balescu 和 Lenard 在 1960 年几乎同时、但通过不同途径给出了这个方程的解. 但他们的解法不是太复杂,就是不够严格. 后来 Dupree 在 1961 提出了另一种比较简捷而又严格的求解途径. 这种途径由于充分利用了线性弗拉索夫理论的已有结果,在对解决其他类型的 BBGKY 方程问题时也有重要参考价值. 有关内容可参考文献[9]—[12].

本节基本上按文献[12]的思路进行描述,但在那本书中只给出了对单一组分等离子体的结果. 而本节将给出对于多组分等离

子体的推导过程.

18.6.1 关联函数方程的解

Dupree 指出,上述两体关联函数所满足的动理学方程可以改写成下面形式的非齐次微分方程

$$\frac{\partial P}{\partial t}+\hat{H}P=S. \tag{18.69}$$

其中

$$\hat{H}_1=\hat{H}_1+\hat{H}_2, \tag{18.70}$$

$$\hat{H}_1h(1,2)\equiv\boldsymbol{v}_1\cdot\frac{\partial h(1,2)}{\partial\boldsymbol{r}_1}-\frac{1}{m_i}\frac{\partial f_i}{\partial\boldsymbol{v}_1}\cdot\sum_l n_l\int\frac{\partial\varphi_{il}}{\partial\boldsymbol{r}_1}h(2,l)\mathrm{d}\boldsymbol{r}_l\mathrm{d}\boldsymbol{v}_l, \tag{18.71}$$

$$\hat{H}_2h(1,2)\equiv\boldsymbol{v}_2\cdot\frac{\partial h(1,2)}{\partial\boldsymbol{r}_2}-\frac{1}{m_j}\frac{\partial f_j}{\partial\boldsymbol{v}_2}\cdot\sum_l n_l\int\frac{\partial\varphi_{jl}}{\partial\boldsymbol{r}_2}h(1,l)\mathrm{d}\boldsymbol{r}_l\mathrm{d}\boldsymbol{v}_l, \tag{18.72}$$

$$S\equiv\frac{\partial\varphi_{ij}}{\partial\boldsymbol{r}_1}\cdot\left(\frac{f_j}{m_i}\frac{\partial f_i}{\partial\boldsymbol{v}_1}-\frac{f_i}{m_j}\frac{\partial f_j}{\partial\boldsymbol{v}_2}\right)\equiv\frac{\partial\varphi_{ij}}{\partial\boldsymbol{r}_1}\cdot\boldsymbol{F}_{ij}. \tag{18.73}$$

这里,暂时略去了 $P,\hat{H},S$ 中表示粒子种类的下标,下面在不会引起误会的地方,也暂时略去这类下标. 利用直接代入法,可以证明上述非齐次方程(18.69)的解可以表示成

$$P(t)=\mathscr{D}(t)\int_0^t\mathscr{D}^{-1}(\tau)S(\tau)\mathrm{d}\tau+\mathscr{D}(t)P(0). \tag{18.74}$$

而其中的 $\mathscr{D}(t)$ 是相应齐次微分方程的通解,

$$\frac{\partial\mathscr{D}(t)}{\partial t}+\hat{H}\mathscr{D}(t)=0, \tag{18.75}$$

$$\mathscr{D}(0)=1,\quad \mathscr{D}\mathscr{D}^{-1}=\mathscr{D}^{-1}\mathscr{D}=1. \tag{18.76}$$

这个齐次方程的通解可以用算子形式表示成

$$\mathscr{D}(t)=\mathrm{e}^{-\hat{H}t}=\mathrm{e}^{-\hat{H}_1t}\mathrm{e}^{-\hat{H}_2t}=\mathscr{D}_1(t)\mathscr{D}_2(t). \tag{18.77}$$

推导上式后两步时已用到了算子 $\hat{H}_1$ 和 $\hat{H}_2$ 是经典算子因此可对易的性质,而 $\mathscr{D}_i(t)$ 则满足同类型的齐次方程(见下). 将这个齐次方程的通解代入(18.74)式后,有

$$\begin{aligned}P(t)&=\mathrm{e}^{-\hat{H}t}\int_0^t\mathrm{e}^{\hat{H}\tau}S(\tau)\mathrm{d}\tau+\mathrm{e}^{-\hat{H}t}P(0)\\&=\int_0^t\mathrm{e}^{-\hat{H}(t-\tau)}S(\tau)\mathrm{d}\tau+\mathrm{e}^{-\hat{H}t}P(0)\\&=\int_0^t\mathscr{D}(t-\tau)S(\tau)\mathrm{d}\tau+\mathscr{D}(t)P(0)\\&=\int_0^t\mathscr{D}(\tau)S(t-\tau)\mathrm{d}\tau+\mathscr{D}(t)P(0)\\&=\int_0^t\mathscr{D}_1(\tau)\mathscr{D}_2(\tau)S(t-\tau)\mathrm{d}\tau+\mathscr{D}_1(\tau)\mathscr{D}_2(\tau)P(0).\end{aligned}$$

按本章一开始的讨论,在碰撞过程中 f 是时间慢变量,它在 $P(t)$ 发生显著变化的时间尺度上可以看成是基本不变的. 因此可以把非齐次项(也称源项,它只和 f 有关)取作时间常量 $S(t-\tau)\approx S$,在不失一般性的情况下还可以假定 $P(0)=0$,则非齐次方程的解可简化成

$$P(t)=\int_0^t\mathscr{D}_1(\tau)\mathscr{D}_2(\tau)S\mathrm{d}\tau. \tag{18.78}$$

这里,S 只是坐标与速度的函数. 从上式可以看出,求 P 的问题现在变成了求 $\mathscr{D}_i(t)$ 的问题. 它们满足算子方程

$$\frac{\partial\mathscr{D}_i}{\partial t}+\hat{H}_i\mathscr{D}_i=0,\quad \mathscr{D}_i(0)=1,\quad i=1,2. \tag{18.79}$$

将它们作用于任一和时间无关的相空间函数上,就把这函数变成时间依赖的,

$$\mathscr{D}_ih(\mu_i)\equiv h(\mu_i,t). \tag{18.80}$$

而这个时间函数自然满足下面的齐次方程

$$\frac{\partial h(\mu_i,t)}{\partial t}+\hat{H}_i h(\mu_i,t)=0.$$

将它写成 6 维空间的普通方程,就是

$$\frac{\partial h(\mu_i,t)}{\partial t}+\boldsymbol{v}_i\cdot\frac{\partial h(\mu_i,t)}{\partial \boldsymbol{r}_i}-\frac{n_0}{m_i}\frac{\partial f(\boldsymbol{v}_i)}{\partial \boldsymbol{v}_i}\cdot\int\frac{\partial \varphi_{i3}}{\partial \boldsymbol{r}_i}h(\mu_3,t)\mathrm{d}\boldsymbol{r}_3\mathrm{d}\,\boldsymbol{v}_3=0. \tag{18.81}$$

它正好等价于下面的线性弗拉索夫方程

$$\frac{\partial f_i^{(1)}}{\partial t}+\boldsymbol{v}_i\cdot\frac{\partial f_i^{(1)}}{\partial \boldsymbol{r}_i}-\frac{q_i}{m_i}\boldsymbol{E}_i^{(1)}\cdot\frac{\partial f_{i0}}{\partial \boldsymbol{v}_i}=0, \tag{18.82}$$

$$q_i\boldsymbol{E}_i^{(1)}=n_0\int\frac{\partial \varphi_{i3}}{\partial \boldsymbol{r}_i}f_3^{(1)}(\mu_3,t)\mathrm{d}\boldsymbol{r}_3\mathrm{d}\boldsymbol{v}_3, \tag{18.83}$$

其中 $f_i^{(1)}\Leftrightarrow h(\mu_i,t)$,是扰动的分布函数,而 $q_i\boldsymbol{E}_i^{(1)}$ 则是自洽的扰动(静电)波场,满足线性泊松方程. 这类线性静电波的自洽解,在本书第九章的一开始就得出了,在这里可以直接引用.

对 $f^{(1)}(\mu,t)$作拉氏、傅氏变换:

$$f^{(1)}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v},t)=\frac{1}{2\pi}\int\mathrm{d}\omega\int\mathrm{d}\boldsymbol{k}f_k(\boldsymbol{k},\boldsymbol{v},\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)},$$

有线性静电波的弹道模(ballistic mode)解

$$f_k=\frac{\mathrm{i}f_k(0)-\frac{q}{m}(\boldsymbol{k}\cdot\nabla_v f_0)\varphi_k}{\omega-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}},$$

$$\varphi_k=\frac{\mathrm{i}4\pi n_0 q}{k^2}\int\frac{f_k(0)}{(\omega-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v})D(\omega,\boldsymbol{k})}\mathrm{d}\boldsymbol{v},$$

$$D(\omega,\boldsymbol{k})=1+\frac{\omega_p^2}{k^2}\int\frac{\boldsymbol{k}\cdot\nabla_v f_0}{\omega-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}}\mathrm{d}\boldsymbol{v},$$

$$\Rightarrow\quad f_k=\frac{\mathrm{i}}{\omega-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}}\left[1-\frac{\omega_p^2}{k^2}\frac{\boldsymbol{k}\cdot\nabla_v f_0}{D(\omega,\boldsymbol{k})}\int\frac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{v}}{\omega-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}}\right]f_k(0).$$

同样,对于 $h(\mu_1,t)$在作了拉氏、傅氏变换后

$$h(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{v}_1,t)=\frac{1}{2\pi}\int\mathrm{d}\omega_1\int\mathrm{d}\boldsymbol{k}_1 h(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{v}_1,\omega_1)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{r}_1-\omega_1 t)}. \tag{18.84}$$

仿照线性静电波的弹道模,可得其傅氏空间的线性解(从这里开始

将恢复表示粒子种类的下标)

$$h(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{v}_1,\omega_1)=V_1^i(1)h(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{v}_1), \tag{18.85}$$

$$V_1^i(1)=\frac{\mathrm{i}}{\omega_1-\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{v}_1}\left[1-\frac{4\pi q_i}{m_i k_1^2}\frac{\boldsymbol{k}_1}{D^+(\omega_1,\boldsymbol{k}_1)}\cdot\frac{\partial f_i(\boldsymbol{v}_1)}{\partial \boldsymbol{v}_1}\sum_l n_l q_l\int\frac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{v}_1'}{\omega_1-\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{v}_1'}\right]. \tag{18.86}$$

其中 $V_1^i(1)$是一个 ω 空间的算子,它作用在一个和 ω_1 无关的函数上时就会把它变成 ω_1 依赖的;这是普通时间算子 $\mathscr{P}_1(t)$在频率空间的对应算子. 这个算子分母中的

$$D^+(\omega_1,\boldsymbol{k}_1)=1+\sum_j\frac{\omega_{pj}^2}{k_1^2}\boldsymbol{k}_1\cdot\int\frac{\partial f_j}{\partial \boldsymbol{v}}\frac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{v}}{\omega_1-\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{v}} \tag{18.87}$$

是定义在复平面的上半平面($\omega_1=\mathrm{Re}(\omega_1)+\mathrm{iIm}(\omega_1)$, $\mathrm{Im}(\omega_1)>0$)的解析函数. 下面将用 $D^+(-\omega_1,-\boldsymbol{k}_1)$表示定义在下半面的解析函数. $D^+(-\omega_1,-\boldsymbol{k}_1)$和 $D^+(\omega_1,\boldsymbol{k}_1)$有完全相同的表达式,只是它的奇点是在下半面的($\mathrm{Im}(\omega_1)<0$). 有关系:

当 $\mathrm{Im}(\omega_1)=0$,

$$D^+(1)\equiv D^+(\omega_1,\boldsymbol{k}_1)=[D^+(-1)]^*\equiv[D^+(-\omega_1,-\boldsymbol{k}_1)]^*, \tag{18.88}$$

$$D^+(1)D^+(-1)=|D^+(1)|^2. \tag{18.89}$$

对它们的详细讨论请参考本书第九章中静电耗散本征模的相关部分.

于是由(18.78)式,有

$$P_{ij}(1,2)=\int_0^t\mathscr{P}_1(\tau)\mathscr{P}_2(\tau)S(\mu_1,\mu_2)\mathrm{d}\tau=\int_0^t S_{ij}(\mu_1,\mu_2,\tau)\mathrm{d}\tau, \tag{18.90}$$

$$S_{ij}(\mu_1,\mu_2,\tau)=\mathscr{P}_1(\tau)\mathscr{P}_2(\tau)S_{ij}(\mu_1,\mu_2) \tag{18.91}$$

$$=\int\frac{\mathrm{d}\omega_1}{2\pi}\frac{\mathrm{d}\omega_2}{2\pi}\mathrm{d}\boldsymbol{k}_1\mathrm{d}\boldsymbol{k}_2 S_{ij}(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2;\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2;\omega_1,\omega_2)\times\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{k}_2\cdot\boldsymbol{r}_2-\omega_1\tau-\omega_2\tau)}, \tag{18.92}$$

$$\Rightarrow S_{ij}(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2;\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2;\omega_1,\omega_2) = V_1^i(1)V_2^j(2)S_{ij}(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2;\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2). \tag{18.93}$$

由此可见，要得到 $P_{ij}(1,2)$，就要先求出 $S_{ij}(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2;\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2)$，它是方程非齐次项（也即源项）的傅氏变换. 因为

$$S_{ij}(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2;\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2) = \frac{\partial\varphi_{ij}(|\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2|)}{\partial\boldsymbol{r}_1}\cdot\boldsymbol{F}_{ij},$$

$$\boldsymbol{F}_{ij} = \frac{f_j(\boldsymbol{v}_2)}{m_i}\frac{\partial f_i(\boldsymbol{v}_1)}{\partial\boldsymbol{v}_1} - \frac{f_i(\boldsymbol{v}_1)}{m_j}\frac{\partial f_j(\boldsymbol{v}_2)}{\partial\boldsymbol{v}_2}.$$

故它的（空间）傅氏变换只涉及第一个因子. 先对相互作用势取傅氏变换

$$\varphi_{ij} \equiv \varphi_{ij}(|\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2|) = \int d\boldsymbol{k}_1 d\boldsymbol{k}_2 \varphi^{ij}(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2)e^{i(\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{k}_2\cdot\boldsymbol{r}_2)}.$$

在这里和下面，作用势种类的表示在普通空间用下标表示，而其傅氏变换用上标来表示. 考虑到

$$\frac{\partial\varphi_{ij}}{\partial\boldsymbol{r}_1} = -\frac{\partial\varphi_{ij}(|\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2|)}{\partial\boldsymbol{r}_2}, \Rightarrow \boldsymbol{k}_1 = -\boldsymbol{k}_2, \Rightarrow \varphi^{ij}(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2) = \varphi^{ij}_{k_1}\delta(\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2).$$

对于库仑势，其傅氏变换是

$$\varphi^{ij}_{k_1} \equiv \varphi^{ij}(\boldsymbol{k}_1) = \frac{q_iq_j}{2\pi^2k_1^2}. \tag{18.94}$$

故有

$$\frac{\partial\varphi_{ij}(|\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2|)}{\partial\boldsymbol{r}_1} = i\boldsymbol{k}_1\int d\boldsymbol{k}_1 d\boldsymbol{k}_2 \varphi^{ij}_{k_1}\delta(\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2)e^{i(\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{k}_2\cdot\boldsymbol{r}_2)}. \tag{18.95}$$

所以最后有

$$S_{ij}(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2,\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2) = [i\varphi^{ij}(\boldsymbol{k}_1)\delta(\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2)] \times\left[\boldsymbol{k}_1\cdot\frac{\partial f_i(\boldsymbol{v}_1)}{\partial\boldsymbol{v}_1}\frac{f_j(\boldsymbol{v}_2)}{m_i} + \boldsymbol{k}_2\cdot\frac{\partial f_j(2)}{\partial\boldsymbol{v}_2}\frac{f_i(1)}{m_j}\right]. \tag{18.96}$$

在 Dupree 的方法中，并不首先算出上面的积分，再把它代入碰撞流的表达式；而是先将上面的源项代入碰撞流，然后按从易到难的次序逐步完成多重积分.

18.6.2 碰撞流的表达式

按式(18.10)和(18.11)的定义

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial t}\right)_c = -\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{v}_1}\cdot\boldsymbol{J}_i(\boldsymbol{v}_1,t\to\infty),$$

$$\boldsymbol{J}_i(\boldsymbol{v}_1,t) = -\frac{1}{m_i}\sum_j n_j\int\frac{\partial\varphi_{ij}}{\partial\boldsymbol{r}_1}P_{ij}(1,2)d\boldsymbol{r}_2 d\boldsymbol{v}_2.$$

将其中的 $\partial\varphi_{ij}/\partial\boldsymbol{r}_1$ 用它的傅氏变换式代入，并对上式取 $t\to\infty$ 的极限，结果为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{J}_i(\boldsymbol{v}_1,\infty) &= -\frac{1}{m_i}\sum_j n_j\int d\boldsymbol{r}_2 d\boldsymbol{v}_2\left(\int d\boldsymbol{l}\,i\boldsymbol{l}\varphi^{ij}(\boldsymbol{l})e^{i\boldsymbol{l}\cdot(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2)}\right)\\ &\quad\times\int d\boldsymbol{k}_1 d\boldsymbol{k}_2 e^{i(\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{k}_2\cdot\boldsymbol{r}_2)}P_{ij}(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2;\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2;t\to\infty)\\ &= -\frac{1}{m_i}\sum_j n_j\int d\boldsymbol{k}_1 d\boldsymbol{k}_2 d\boldsymbol{l}\,i\boldsymbol{l}\varphi^{ij}(\boldsymbol{l})\left[\int d\boldsymbol{r}_2 e^{i\boldsymbol{l}\cdot(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2)+i(\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{k}_2\cdot\boldsymbol{r}_2)}\right]\\ &\quad\times\lim_{t\to\infty}\int_0^t d\tau\int_{-\infty+i0^+}^{\infty+i0^+}\frac{d\omega_1}{2\pi}\frac{d\omega_2}{2\pi}e^{-i(\omega_1+\omega_2)\tau}\\ &\quad\times\int d\boldsymbol{v}_2 S_{ij}(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2;\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2;\omega_1,\omega_2).\end{aligned}$$

首先完成对 $\int d\boldsymbol{r}_2\cdots$ 的积分，得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{J}_i(\boldsymbol{v}_1,\infty) &= -\frac{i(2\pi)^3}{m_i}\sum_j n_j\int d\boldsymbol{k}_1 d\boldsymbol{k}_2 d\boldsymbol{l}\boldsymbol{l}\varphi^{ij}(\boldsymbol{l})\delta(\boldsymbol{l}-\boldsymbol{k}_2)e^{i(\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{l})\cdot\boldsymbol{r}_1}\\ &\quad\times\lim_{t\to\infty}\int\frac{d\omega_1}{2\pi}\frac{d\omega_2}{2\pi}\int_0^t d\tau e^{-i(\omega_1+\omega_2)\tau}\\ &\quad\times V_1^i(1)\int d\boldsymbol{v}_2 V_2^j(2)S_{ij}(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2;\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2).\end{aligned}$$

然后完成对 $\int d\boldsymbol{l}\cdots$ 及 $\int d\tau\cdots$ 的积分，得

$$\boldsymbol{J}_i(\boldsymbol{v}_1,\infty) = -\frac{i(2\pi)^3}{m_i}\sum_j n_j\int d\boldsymbol{k}_1 d\boldsymbol{k}_2\boldsymbol{k}_2\varphi^{ij}(\boldsymbol{k}_2)e^{i(\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2)\cdot\boldsymbol{r}_1}\lim_{t\to\infty}\int\frac{d\omega_1}{2\pi}\frac{d\omega_2}{2\pi}$$

$$\cdot \times \mathrm{i}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega_1+\omega_2)t}-1}{\omega_1+\omega_2}V_1^i(1)\int \mathrm{d}\boldsymbol{v}_2 V_2^j(2)\mathrm{i}\varphi^{ij}(\boldsymbol{k}_1)$$

$$\times \delta(\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2)\boldsymbol{k}_1\cdot \boldsymbol{F}_{ij}(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2)$$

$$=\frac{\mathrm{i}(2\pi)^3}{m_i}\sum_j n_j\int \mathrm{d}\boldsymbol{k}_1(-\boldsymbol{k}_1)\varphi^{ij}(\boldsymbol{k}_1)\varphi^{ij}(-\boldsymbol{k}_1)\lim_{t\to\infty}\int\frac{\mathrm{d}\omega_1}{2\pi}\frac{\mathrm{d}\omega_2}{2\pi}$$

$$\times\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega_1+\omega_2)t}-1}{\omega_1+\omega_2}V_1^i(1)\int \mathrm{d}\boldsymbol{v}_2 V_2^j(2)\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{F}_{ij}(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2)$$

$$=-\frac{\mathrm{i}(2\pi)^3}{m_i}\sum_j n_j\lim_{t\to\infty}\int\frac{\mathrm{d}\omega_1}{2\pi}\frac{\mathrm{d}\omega_2}{2\pi}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega_1+\omega_2)t}-1}{\omega_1+\omega_2}$$

$$\times\int \mathrm{d}\boldsymbol{k}_1|\varphi(\boldsymbol{k}_1)|^2\boldsymbol{k}_1\boldsymbol{k}_1\cdot V_1^i(1)\int \mathrm{d}\boldsymbol{v}_2 V_2^j(2)\boldsymbol{F}_{ij}(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2).$$

把$|\varphi(k_1)|^2$分成两部分因子相乘，

$$|\varphi(k_1)|^2=\varphi^2(k_1)=\frac{q_1q_2}{2\pi^2k_1^2}\varphi(k_1).$$

第一个因子放到前面，后一个因子放在后面与 $\boldsymbol{F}_{ij}$在一起，

$$\boldsymbol{J}_i(\boldsymbol{v}_1,\infty)=-\mathrm{i}\frac{4\pi q_i}{m_i}\lim_{t\to\infty}\int\frac{\mathrm{d}\omega_1}{2\pi}\frac{\mathrm{d}\omega_2}{2\pi}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega_1+\omega_2)t}-1}{\omega_1+\omega_2}\int\mathrm{d}\boldsymbol{k}_1\frac{\boldsymbol{k}_1\boldsymbol{k}_1}{k_1^2}$$

$$\cdot\sum_j n_jq_jV_1^i(1)\int\mathrm{d}\boldsymbol{v}_2V_2^j(2)\varphi^{ij}(k_1)\boldsymbol{F}_{ij}(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2).\quad(18.97)$$

现在来看上式最后的因子，利用线性静电弹道模的解(18.86)式，其中

$$V_2^j(2)\varphi^{ij}(k_1)\boldsymbol{F}_{ij}=\frac{\mathrm{i}}{\omega_2-\boldsymbol{k}_2\cdot\boldsymbol{v}_2}\Bigg[\varphi^{ij}(k_1)\boldsymbol{F}_{ij}-\frac{4\pi q_j}{m_jk_2^2}\frac{\boldsymbol{k}_2}{D^+(\omega_2,\boldsymbol{k}_2)}$$

$$\cdot\frac{\partial f_j(\boldsymbol{v}_2)}{\partial\boldsymbol{v}_2}\sum_l n_lq_l\int\frac{\varphi^{il}(k_1)\boldsymbol{F}_{il}(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2')}{\omega_2-\boldsymbol{k}_2\cdot\boldsymbol{v}_2'}\mathrm{d}\boldsymbol{v}_2'\Bigg].$$

于是有

$$\int\mathrm{d}\boldsymbol{v}_2V_2^j(2)\varphi^{ij}(k_1)\boldsymbol{F}_{ij}(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2)$$

$$=\mathrm{i}\int\frac{\varphi^{ij}(k_1)\boldsymbol{F}_{ij}}{\omega_2-\boldsymbol{k}_2\cdot\boldsymbol{v}_2}\mathrm{d}\boldsymbol{v}_2-\mathrm{i}\frac{4\pi q_j}{m_jk_2^2}\frac{\boldsymbol{k}_2}{D^+(2)}$$

$$\cdot\int\frac{\partial f_j(\boldsymbol{v}_2)}{\partial\boldsymbol{v}_2}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_2}{\omega_2-\boldsymbol{k}_2\cdot\boldsymbol{v}_2}\sum_l n_lq_l\int\frac{\varphi^{il}(k_1)\boldsymbol{F}_{il}(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2')}{\omega_2-\boldsymbol{k}_2\cdot\boldsymbol{v}_2'}\mathrm{d}\boldsymbol{v}_2'.$$

进而有

$$\sum_j n_jq_j\int\mathrm{d}\boldsymbol{v}_2V_2^j(2)\varphi^{ij}(k_1)\boldsymbol{F}_{ij}(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2)$$

$$=\mathrm{i}\sum_l n_lq_l\int\frac{\varphi^{il}(k_1)\boldsymbol{F}_{il}(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2)}{\omega_2-\boldsymbol{k}_2\cdot\boldsymbol{v}_2}\mathrm{d}\boldsymbol{v}_2$$

$$\times\left[1-\sum_j\frac{\omega_{pj}^2}{k_2^2}\frac{1}{D^+(2)}\boldsymbol{k}_2\cdot\int\frac{\partial f_j(\boldsymbol{v}_2)}{\partial\boldsymbol{v}_2}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_2}{\omega_2-\boldsymbol{k}_2\cdot\boldsymbol{v}_2}\right].$$

利用

$$D^+(2)=1+\sum_j\frac{\omega_{pj}^2}{k_2^2}\boldsymbol{k}_2\cdot\int\frac{\partial f_j(\boldsymbol{v}_2)}{\partial\boldsymbol{v}_2}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_2}{\omega_2-\boldsymbol{k}_2\cdot\boldsymbol{v}_2},\quad(18.98)$$

方括号中的部分可以简化成

$$[\cdots]=\left[1-1+\frac{1}{D^+(2)}\right]=\frac{1}{D^+(2)}\equiv\frac{1}{D^+(\omega_2,\boldsymbol{k}_2)}.$$

所以

$$\sum_j n_jq_j\int\mathrm{d}\boldsymbol{v}_2V_2^j(2)\varphi^{ij}(k_1)\boldsymbol{F}_{ij}(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2)$$

$$=\frac{\mathrm{i}}{D^+(2)}\sum_l n_lq_l\int\frac{\varphi^{il}(k_1)\boldsymbol{F}_{il}(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2')}{\omega_2-\boldsymbol{k}_2\cdot\boldsymbol{v}_2'}\mathrm{d}\boldsymbol{v}_2'.\quad(18.99)$$

接下来，将 $V_1^i(1)$作用上去，得

$$V_1^i(1)\sum_j n_jq_j\int\mathrm{d}\boldsymbol{v}_2V_2^j(2)\varphi^{ij}(k_1)\boldsymbol{F}_{12}(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2)$$

$$=\frac{\mathrm{i}}{\omega_1-\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{v}_1}\sum_j n_jq_j\int\mathrm{d}\boldsymbol{v}_2V_2^j(2)\varphi^{ij}(k_1)\boldsymbol{F}_{ij}(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2)$$

$$-\frac{\mathrm{i}}{\omega_1-\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{v}_1}\sum_j\frac{4\pi n_jq_iq_j}{m_ik_1^2}\frac{\partial f_i}{\partial\boldsymbol{v}_1}\cdot\frac{\boldsymbol{k}_1}{D^+(1)}\int\mathrm{d}\boldsymbol{v}_1'$$

$$\times\frac{1}{\omega_1-\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{v}_1'}\sum_l n_lq_l\int\mathrm{d}\boldsymbol{v}_2V_2^j(2)\varphi^{lj}(k_1)\boldsymbol{F}_{lj}(\boldsymbol{v}_1',\boldsymbol{v}_2).$$

将(18.99)式代入,并用 $\boldsymbol{k}_1$ 点乘上式,得

$$\sum_j n_j q_j V_1^i(1)\int \mathrm{d}\boldsymbol{v}_2 V_2^j(2)\varphi^{ij}(k_1)\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{F}_{ij}(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2)$$

$$=-\sum_j \frac{n_j q_j}{(\omega_1-\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{v}_1)D^+(2)}\left[\int \mathrm{d}\,\boldsymbol{v}_2\frac{\varphi^{ij}(k_1)\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{F}_{ij}(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2)}{\omega_2-\boldsymbol{k}_2\cdot\boldsymbol{v}_2}\right.$$

$$-\frac{4\pi q_i}{m_i k_1^2}\frac{\partial f_i}{\partial\boldsymbol{v}_1}\frac{\boldsymbol{k}_1}{D^+(1)}$$

$$\left.\cdot\sum_l n_l q_l\int\frac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{v}_1}{\omega_1-\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{v}_1}\int\mathrm{d}\,\boldsymbol{v}_2\frac{\varphi^{lj}(k_1)\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{F}_{lj}(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2)}{\omega_2-\boldsymbol{k}_2\cdot\boldsymbol{v}_2}\right]$$

$$=-\frac{1}{(\omega_1-\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{v}_1)D^+(2)}\sum_j n_j q_j\left[V_{ij}(\boldsymbol{v}_1)-\frac{4\pi q_i}{m_i k_1^2}\frac{\partial f_i}{\partial\boldsymbol{v}_1}\right.$$

$$\left.\cdot\frac{\boldsymbol{k}_1}{D^+(1)}\sum_l n_l q_l W_{lj}\right].$$

其中

$$V_{ij}(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2,\omega_2,\boldsymbol{v}_1)=\int\mathrm{d}\boldsymbol{v}_2\frac{\varphi^{ij}(k_1)\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{F}_{ij}(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2)}{\omega_2-\boldsymbol{k}_2\cdot\boldsymbol{v}_2},\tag{18.100}$$

$$W_{ij}(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2,\omega_2)=\int\mathrm{d}\boldsymbol{v}_1\frac{V_{ij}(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2,\omega_2,\boldsymbol{v}_1)}{\omega_1-\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{v}_1}.\tag{18.101}$$

所以最后可以得碰撞流

$$\boldsymbol{J}_i(\boldsymbol{v}_1,\infty)=\mathrm{i}\frac{4\pi q_i}{m_i}\lim_{t\to\infty}\int\frac{\mathrm{d}\omega_1}{2\pi}\frac{\mathrm{d}\omega_2}{2\pi}\mathrm{d}\boldsymbol{k}_1\mathrm{d}\boldsymbol{k}_2\delta(\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2)$$

$$\times\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega_1+\omega_2)t}-1}{(\omega_1+\omega_2)(\omega_1-\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{v}_1)D^+(2)}$$

$$\times\frac{\boldsymbol{k}_1}{k_1^2}\sum_j n_j q_j\left[V_{ij}-\frac{4\pi q_i}{m_i k_1^2}\frac{\partial f_i}{\partial\boldsymbol{v}_1}\cdot\frac{\boldsymbol{k}_1}{D^+(1)}\sum_l n_l q_l W_{lj}\right].\tag{18.102}$$

下面来计算碰撞流中和 V_{ij} 与 W_{ij} 有关的明显表达式. 先看第一个

$$\sum_j n_j q_j V_{ij}(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2,\omega_2,\boldsymbol{v}_1)$$

$$=\frac{q_i}{2\pi^2 k_1^2}\sum_j n_j q_j^2 k_1\int\frac{\boldsymbol{k}_1}{k_1}\cdot\boldsymbol{F}_{ij}\frac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{v}_2}{\omega_2-\boldsymbol{k}_2\cdot\boldsymbol{v}_2}$$

$$=\frac{q_i}{2\pi^2 k_1}\sum_j n_j q_j^2\int\frac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{v}_2}{\omega_2-\boldsymbol{k}_2\cdot\boldsymbol{v}_2}\frac{\boldsymbol{k}_1}{k_1}\cdot\left[\frac{f_j}{m_i}\frac{\partial f_i}{\partial\boldsymbol{v}_1}-\frac{f_i}{m_j}\frac{\partial f_j}{\partial\boldsymbol{v}_2}\right]$$

$$=\frac{q_i}{2\pi^2 k_1}\left[\frac{1}{m_i}\frac{\boldsymbol{k}_1}{k_1}\cdot\frac{\partial f_i}{\partial\boldsymbol{v}_1}\left(\sum_j n_j q_j^2\int\frac{f_j\mathrm{d}\,\boldsymbol{v}_2}{\omega_2-\boldsymbol{k}_2\cdot\boldsymbol{v}_2}\right)\right.$$

$$\left.-f_i\left(\sum_j\frac{n_j q_j^2}{m_j}\int\frac{\boldsymbol{k}_1}{k_1}\cdot\frac{\partial f_j}{\partial\boldsymbol{v}_2}\frac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{v}_2}{\omega_2-\boldsymbol{k}_2\cdot\boldsymbol{v}_2}\right)\right]$$

$$=\frac{q_i}{2\pi^2 k_1}\left[\frac{1}{m_i}\frac{\boldsymbol{k}_1}{k_1}\cdot\frac{\partial f_i}{\partial\boldsymbol{v}_1}U^{\Sigma(0)}(2)-f_i U_{k_1}^{\Sigma(1)}(2)\right],$$

其中

$$U^{\Sigma(0)}(2)=\sum_j n_j q_j^2 U_j^{(0)}(2),\tag{18.103}$$

$$U_j^{(0)}(2)\equiv U_j^{(0)}(\omega_2,\boldsymbol{k}_2)=\int\frac{f_j\mathrm{d}\,\boldsymbol{v}_2}{\omega_2-\boldsymbol{k}_2\cdot\boldsymbol{v}_2},\tag{18.104}$$

$$U_{k_1}^{\Sigma(1)}(2)=\sum_j\frac{n_j q_j^2}{m_j}U_{j,k_1}^{(1)}(2),\tag{18.105}$$

$$U_{j,k_1}^{(1)}(2)\equiv U_{j,k_1}^{(1)}(\omega_2,\boldsymbol{k}_2,\boldsymbol{k}_1)$$

$$=\int\frac{\boldsymbol{k}_1}{k_1}\cdot\frac{\partial f_j}{\partial\boldsymbol{v}_2}\frac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{v}_2}{\omega_2-\boldsymbol{k}_2\cdot\boldsymbol{v}_2}.\tag{18.106}$$

而第二个是

$$\sum_l n_l q_l W_{lj}(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2,\omega_2)$$

$$=\sum_l n_l q_l\int\mathrm{d}\boldsymbol{v}_1\frac{V_{lj}}{\omega_1-\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{v}_1}$$

$$=\sum_l n_l q_l\frac{q_l q_j}{2\pi^2 k_1^2}k_1\left[\frac{1}{m_l}U_{l,k_1}^{(1)}(1)U_j^{(0)}(2)-\frac{1}{m_j}U_l^{(0)}U_{j,k_1}^{(1)}(2)\right]$$

$$=\frac{q_j}{2\pi^2 k_1^2}k_1\left[\left(\sum_l\frac{n_l q_l^2}{m_l}U_{l,k_1}^{(1)}(1)\right)U_j^{(0)}(2)\right.$$

$$-\frac{1}{m_j}\Big(\sum_l n_l q_l^2 U_l^{(0)}\Big) U_{j,k_1}^{(1)}(2)\Big]$$

$$=\frac{q_j}{2\pi^2 k_1^2}k_1\Big[U_{k_1}^{\Sigma(1)}(1)U_j^{(0)}(2)-\frac{1}{m_j}U^{\Sigma(0)}(1)U_{j,k_1}^{(1)}(2)\Big].$$

进而有

$$\sum_j n_j q_j\Big(-\frac{4\pi q_i}{m_i k_1}\frac{\boldsymbol{k}_1}{k_1}\cdot\frac{\partial f_i}{\partial \boldsymbol{v}_1}\sum_l n_l q_l W_{lj}\Big)$$

$$=-\frac{4\pi q_i}{m_i}\frac{1}{2\pi^2 k_1^2}\frac{\boldsymbol{k}_1}{k_1}\cdot\frac{\partial f_i}{\partial \boldsymbol{v}_1}$$

$$\times\Big[U_{k_1}^{\Sigma(1)}(1)\sum_j n_j q_j^2 U_j^{(0)}(2)-U^{\Sigma(0)}(1)\sum_j\frac{n_j q_j^2}{m_j}U_{j,k_1}^{(1)}(2)\Big]$$

$$=-\frac{4\pi q_i}{m_i}\frac{1}{2\pi^2 k_1^2}\frac{\boldsymbol{k}_1}{k_1}\cdot\frac{\partial f_i}{\partial \boldsymbol{v}_1}$$

$$\times\big[U_{k_1}^{\Sigma(1)}(1)U^{\Sigma(0)}(2)-U^{\Sigma(0)}(1)U_{k_1}^{\Sigma(1)}(2)\big].$$

最后得碰撞流表达式中的

$$\sum_j n_j q_j\Big[V_{ij}-\frac{4\pi q_i}{m_i D^+(1)}\frac{\boldsymbol{k}_1}{k_1^2}\cdot\frac{\partial f_i}{\partial \boldsymbol{v}_1}\sum_l n_l q_l W_{lj}\Big]$$

$$=\frac{q_i}{2\pi^2 k_1}\Big\{\Big[\frac{1}{m_i}\frac{\boldsymbol{k}_1}{k_1}\cdot\frac{\partial f_i}{\partial \boldsymbol{v}_1}U^{\Sigma(0)}(2)-f_i(1)U_{k_1}^{\Sigma(1)}(2)\Big]$$

$$-\frac{4\pi}{m_i k_1 D^+(1)}\frac{\boldsymbol{k}_1}{k_1}\cdot\frac{\partial f_i}{\partial \boldsymbol{v}_1}$$

$$\times\big[U_{k_1}^{\Sigma(1)}(1)U^{\Sigma(0)}(2)-U^{\Sigma(0)}(1)U_{k_1}^{\Sigma(1)}(2)\big]\Big\}$$

$$=\frac{q_i}{2\pi^2 k_1}\Big[V_\Sigma-\frac{4\pi}{m_i k_1 D^+(1)}\frac{\boldsymbol{k}_1}{k_1}\cdot\frac{\partial f_i}{\partial \boldsymbol{v}_1}W_\Sigma\Big],$$

其中

$$V_\Sigma=\frac{1}{m_i}\frac{\boldsymbol{k}_1}{k_1}\cdot\frac{\partial f_i}{\partial \boldsymbol{v}_1}U^{\Sigma(0)}(2)-f_i(1)U_{k_1}^{\Sigma(1)}(2), \qquad (18.107)$$

$$W_\Sigma=U_{k_1}^{\Sigma(1)}(1)U^{\Sigma(0)}(2)-U^{\Sigma(0)}(1)U_{k_1}^{\Sigma(1)}(2); \qquad (18.108)$$

或

$$\sum_j n_j q_j V_{ij}=\frac{q_i}{2\pi^2 k_1}V_\Sigma,\quad \sum_j n_j q_j q_i\sum_l n_l q_l W_{ij}=W_\Sigma. \qquad (18.109)$$

这样,碰撞流就变成

$$\boldsymbol{J}_i(\boldsymbol{v}_1)=\mathrm{i}\frac{4\pi q_i}{m_i}\frac{q_i}{2\pi^2}\lim_{t\to\infty}\int\frac{\mathrm{d}\omega_1}{2\pi}\frac{\mathrm{d}\omega_2}{2\pi}\mathrm{d}\boldsymbol{k}_1\mathrm{d}\boldsymbol{k}_2\delta(\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2)$$

$$\times\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega_1+\omega_2)t}-1}{(\omega_1+\omega_2)(\omega_1-\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{v}_1)D^+(2)}$$

$$\times\frac{\boldsymbol{k}_1}{k_1^3}\Big[V_\Sigma-\frac{4\pi}{m_i k_1 D^+(1)}\frac{\boldsymbol{k}_1}{k_1}\cdot\frac{\partial f_i}{\partial \boldsymbol{v}_1}W_\Sigma\Big].$$

18.6.3 碰撞流的计算(1)——积分$\int \mathrm{d}\omega_2\mathrm{d}\boldsymbol{k}_2$

在完成积分$\int \mathrm{d}\boldsymbol{k}_2\cdots$时,由于δ函数的关系,被积函数中的所有$\boldsymbol{k}_2\to-\boldsymbol{k}_1$. 而在进行积分$\int\mathrm{d}\omega_2\cdots$时,被积函数在$\omega_1+\omega_2=0$及$D^+(\omega_2,\boldsymbol{k}_2)=0$处有奇点. 后一类奇点属于线性本征模,当等离子体处在热力学平衡态附近时,它们都是阻尼模,因此在取$t\to\infty$极限时不再存在——也即不再是奇点. 前一类奇点利用下面的方法来计算,按δ函数的定义

$$\delta(x)=\frac{1}{\pi}\lim_{t\to\infty}\frac{\sin xt}{x}$$

$$=\frac{1}{\pi}\lim_{t\to\infty}\frac{1}{2\mathrm{i}}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}xt}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}xt}}{x}=-\lim_{t\to\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}xt}}{\mathrm{i}\pi}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2xt}-1}{2x}.$$

故在$\int\mathrm{d}\omega_2\cdots$的积分号下有

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega_1+\omega_2)t}-1}{\omega_1+\omega_2}=(-\mathrm{i})\pi\delta[(\omega_1+\omega_2)/2]$$

$$=(-\mathrm{i})2\pi\delta(\omega_1+\omega_2). \qquad (18.110)$$

于是对$\int\mathrm{d}\omega_2\cdots$的积分就简单变成将被积函数中所有的$\omega_2\to-\omega_1$,并在整个被积函数前乘以因子$(-\mathrm{i})2\pi$. 这时碰撞流就变成了

$$J_i(\boldsymbol{v}_1)=\frac{2q_i^2}{\pi m_i}\int \mathrm{d}\boldsymbol{k}_1\frac{\boldsymbol{k}_1}{k_1^3}\int\frac{\mathrm{d}\omega_1}{2\pi}\frac{1}{(\omega_1-\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{v}_1)D^+(-1)}$$
$$\times\left[V_\Sigma(-1)-\frac{4\pi}{m_ik_1D^+(1)}\frac{\boldsymbol{k}_1}{k_1}\cdot\frac{\partial f_i}{\partial\boldsymbol{v}_1}W_\Sigma(-1)\right]$$
$$=\frac{2q_i^2}{\pi m_i}\int \mathrm{d}\boldsymbol{k}_1\frac{\boldsymbol{k}_1}{k_1^3}[I_0+I_1],$$

其中的 I_0,I_1 是两项关于$\int\mathrm{d}\omega_1\cdots$的积分

$$I_0=\int\frac{\mathrm{d}\omega_1}{2\pi}\frac{V_\Sigma(\boldsymbol{v}_1,-\omega_1,-\boldsymbol{k}_1)}{(\omega_1-\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{v}_1)D^+(-1)},\tag{18.111}$$

$$I_1=-\frac{4\pi}{m_ik_1}\int\frac{\mathrm{d}\omega_1}{2\pi}\frac{\boldsymbol{k}_1}{k_1}\cdot\frac{\partial f_i}{\partial\boldsymbol{v}_1}\frac{W_\Sigma(\omega_1,\boldsymbol{k}_1;-\omega_1,-\boldsymbol{k}_1)}{(\omega_1-\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{v}_1)D^+(-1)D^+(1)}.\tag{18.112}$$

18.6.4　碰撞流的计算(2)——积分$\int\mathrm{d}\omega_1$

先来考查 I_0,被积函数中有有两类可能的奇点

$$\omega_1-\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{v}_1=0,\quad D^+(-1)=0.$$

其中第一个奇点 $\omega_1=\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{v}_1$ 在实轴上;而第二类奇点则一般在(ω_1 复平面的)上半面(图18.3(a)).这是因为对于定义在上半平面的 $D^+(1)$来说,当等离子体对热力学平衡偏离不远时,$D^+(1)=0$ 给出的是非常弱阻尼的本征模($\mathrm{Im}(\omega_1)\lesssim 0$);而这里出现的 $D^+(-1)$是定义在下半面的,因此,当等离子体对热力学平衡偏离不远时,$D^+(-1)$的奇点在上半面($-\mathrm{Im}(\omega_1)\gtrsim 0$).考虑到这点,积分路径应该取 $-\infty+\mathrm{i}\sigma\to+\infty+\mathrm{i}\sigma$ 并且 σ 要足够大($\sigma>-\mathrm{Im}(\omega_1)_{\max}$).为了算出这个路径积分,可以采用解析函数围道积分的柯西定理.而为了构成一个封闭的围道,必须在上述直线路径上补一个大半圆,并且要求被积函数在这段半圆上的积分值为零.由于 $V_\Sigma(\boldsymbol{v}_1,-\omega_1,-\boldsymbol{k}_1)$是定义在下半面的解析函数,其中含有形如

$$\int\frac{\partial f_i}{\partial\boldsymbol{v}_1}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{-\omega_1+\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{v}}$$

的因子,故在 $\mathrm{Im}(\omega_1)\to-\infty$时,它们和被积函数中的另一个因子都趋于零.这样,补的大半圆应是在下半面的、半径为无穷大的半圆(见图 18.3(b)).

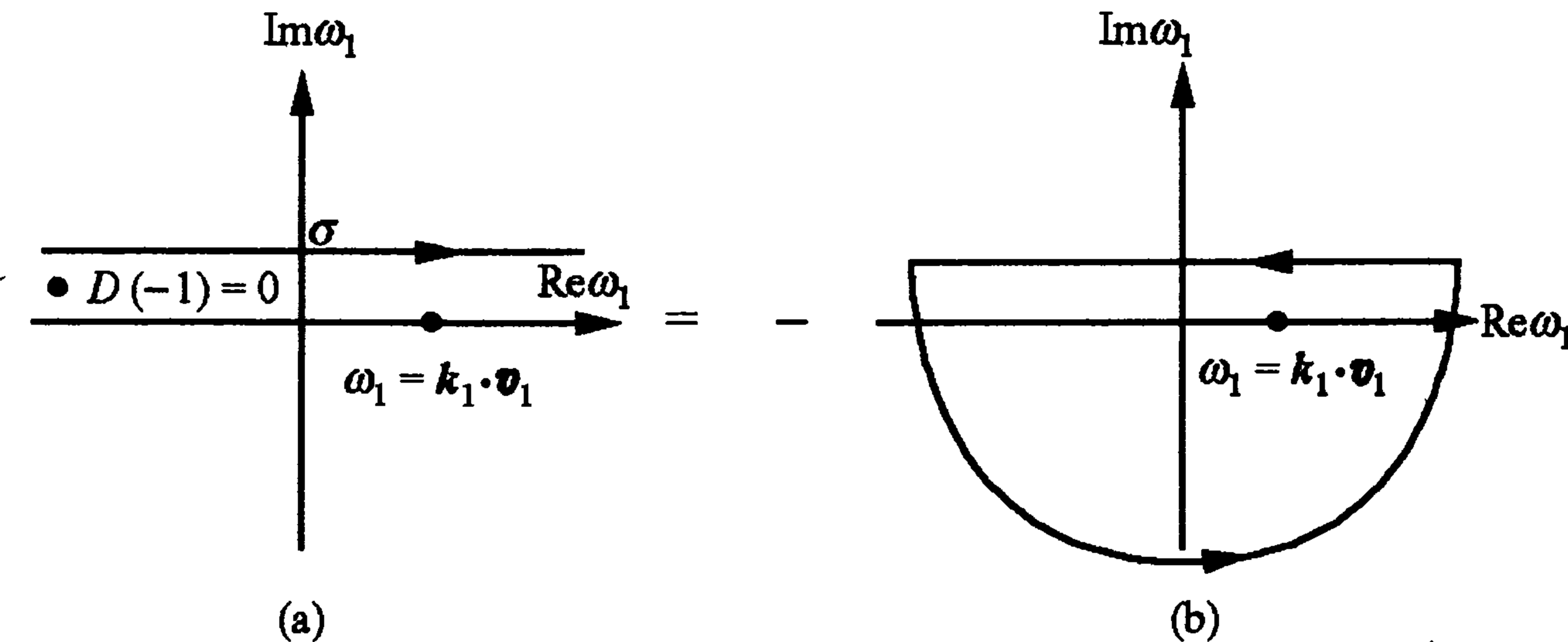


图 18.3　ω_1 平面上的积分路径(a)和围道(b)

这个围道的路径方向是顺时针的,但柯西定理所定义的围道的方向应是逆时针的.所以积分的结果是 $-2\pi\mathrm{i}$ 乘上围道中奇点的留数值.两类奇点中,本征模奇点对长时间行为无贡献,只有弹道模的奇点有贡献,结果是

$$I_0=-\mathrm{i}\frac{1}{D^+(-\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{v}_1,-\boldsymbol{k}_1)}V_\Sigma(\boldsymbol{v}_1,-\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{k}_1).\tag{18.113}$$

进一步考虑到碰撞流的实数性,也要求只取 I_0 的实部.为此,将 I_0 的分式上、下同乘 $D^+(\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{k}_1)$,得

$$I_0=-\mathrm{i}\frac{D^+(\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{k}_1)V_\Sigma(\boldsymbol{v}_1,-\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{k}_1)}{D^+(\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{k}_1)D^+(-\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{v}_1,-\boldsymbol{k}_1)}.$$

并在弱阻尼极限下,对上式取 $\mathrm{Im}(\omega_1)=0$ 的近似 $D^+(-1)=[D^+(1)]^*$,见式(18.88)—(18.89),于是有

$$\mathrm{Re}(I_0)=\frac{1}{|D^+(\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{k}_1)|^2}\mathrm{Im}[D^+(\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{k}_1)$$
$$\cdot V_\Sigma(\boldsymbol{v}_1,-\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{v}_1,-\boldsymbol{k}_1)].\tag{18.114}$$

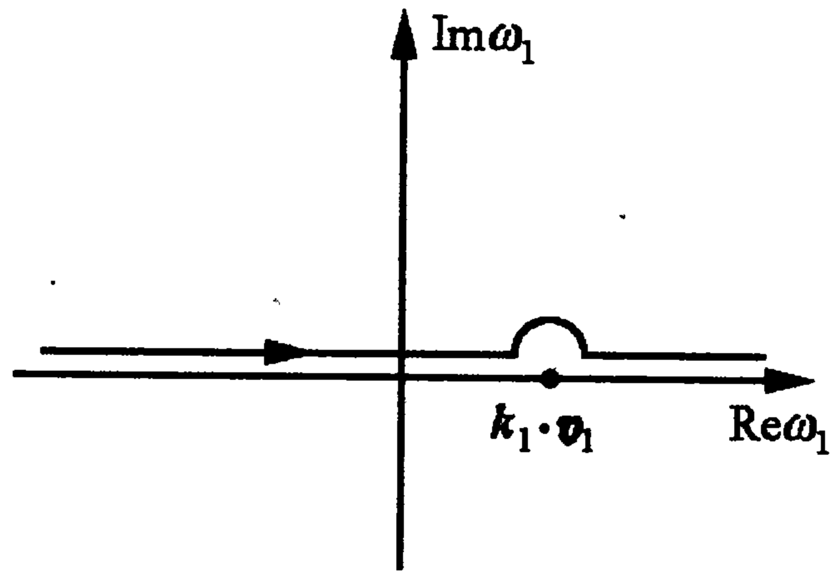


图18.4　在 $\mathrm{Im}(\omega_1)=0$ 近似下的积分路径

现在来看 I_1，其被积函数既有定义在上半面的也有定义在下半面的，因此无法通过补大半圆构成一个合适的围道. 这时在取 $\mathrm{Im}(\omega_1)=0$ 的近似下可以取紧贴实轴上沿的积分路径 $-\infty+0^+\to\infty+0^+$，它在弹道模处要从上半面绕一个无穷小的半圆，如图 18.4. 结果导致的积分值就相当于取

$$\frac{1}{\omega_1-\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{v}_1}=\frac{1}{\omega_1-\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{v}_1+\mathrm{i}0^+}=\frac{\mathscr{P}}{\omega_1-\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{v}_1}-\mathrm{i}\pi\delta(\omega_1-\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{v}_1)$$

中的虚部，然后积分. 最后得

$$\mathrm{Re}(I_1)=\frac{2\pi}{m_ik_1}\frac{\boldsymbol{k}_1}{k_1}\cdot\frac{\partial f_i}{\partial\boldsymbol{v}_1}\frac{1}{|D^+(1)|^2}\mathrm{Im}(-W_\Sigma). \tag{18.115}$$

18.6.5　$\mathrm{Im}[D^+(1)V_\Sigma]$和 $\mathrm{Im}(-W_\Sigma)$的计算

在计算这两个虚部之前，先给出几个基本的解析函数的明显表达式. 它们是 $U_i^{(0)}(1)$，$U_i^{(0)}(-1)$，$U_{ik_1}^{(1)}(1)$，$U_{ik_1}^{(1)}(-1)$；$(1)=(\omega_1,\boldsymbol{k}_1)$. 按本书 9.3.2 小节的讨论（例如式(9.33)—(9.36)），有（为简单，略去了表示种类的下标）

$$U^{(0)}(1)=\begin{cases}-\dfrac{1}{k_1}E^0(1), & \mathrm{Im}\omega_1>0,\\ -\dfrac{1}{k_1}E^0(1)-\mathrm{i}\pi\dfrac{1}{k_1}F\left(\dfrac{\omega_1}{k_1}\right), & \mathrm{Im}\omega_1=0,\\ -\dfrac{1}{k_1}E^0(1)-\mathrm{i}2\pi\dfrac{1}{k_1}F\left(\dfrac{\omega_1}{k_1}\right), & \mathrm{Im}\omega_1<0,\end{cases} \tag{18.116}$$

$$U^{(0)}(-1)=\begin{cases}\dfrac{1}{k_1}E^0(1)-\mathrm{i}2\pi\dfrac{1}{k_1}F\left(\dfrac{\omega_1}{k_1}\right), & \mathrm{Im}\omega_1>0,\\ \dfrac{1}{k_1}E^0(1)-\mathrm{i}\pi\dfrac{1}{k_1}F\left(\dfrac{\omega_1}{k_1}\right), & \mathrm{Im}\omega_1=0,\\ \dfrac{1}{k_1}E^0(1), & \mathrm{Im}\omega_1>0,\end{cases} \tag{18.117}$$

$$U_{k_1}^{(1)}(1)=\begin{cases}-\dfrac{1}{k_1}E^{(1)}(1), & \mathrm{Im}\omega_1>0,\\ -\dfrac{1}{k_1}E^{(1)}(1)-\mathrm{i}\pi\dfrac{1}{k_1}F'\left(\dfrac{\omega_1}{k_1}\right), & \mathrm{Im}\omega_1=0,\\ -\dfrac{1}{k_1}E^{(1)}(1)-\mathrm{i}2\pi\dfrac{1}{k_1}F'\left(\dfrac{\omega_1}{k_1}\right), & \mathrm{Im}\omega_1<0,\end{cases} \tag{18.118}$$

$$U_{k_1}^{(1)}(-1)=\begin{cases}\dfrac{1}{k_1}E^{(1)}(1)-\mathrm{i}2\pi\dfrac{1}{k_1}F'\left(\dfrac{\omega_1}{k_1}\right), & \mathrm{Im}\omega_1>0,\\ \dfrac{1}{k_1}E^{(1)}(1)-\mathrm{i}\pi\dfrac{1}{k_1}F'\left(\dfrac{\omega_1}{k_1}\right), & \mathrm{Im}\omega_1=0,\\ \dfrac{1}{k_1}E^{(1)}(1), & \mathrm{Im}\omega_1>0.\end{cases} \tag{18.119}$$

其中

$$E^{(0)}(\omega/k)=\mathscr{P}\int\frac{F(u)\mathrm{d}u}{u-\omega/k},$$

$$E^{(1)}(\omega/k)=\mathscr{P}\int\frac{\partial F(u)}{\partial u}\frac{\mathrm{d}u}{u-\omega/k},\quad F'(u)=\frac{\partial F(u)}{\partial u}.$$

而

$$\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{v}_1=k_1u\quad(\boldsymbol{u}=\boldsymbol{v}_1\cos\theta),$$

$$f(\boldsymbol{v}_1)=F(u)f_\perp(\boldsymbol{v}_{1\perp}),\quad\int f_\perp(\boldsymbol{v}_{1\perp})\mathrm{d}\boldsymbol{v}_{1\perp}=1.$$

在下面的计算中，只取 $\mathrm{Im}\omega_1=0$ 的情况. 这一方面是因为在本问题中不考虑波-粒子共振相互作用引起的静电波阻尼或不稳定，另

一方面是因为如果取 $\mathrm{Im}\omega_1<0$ 或 $\mathrm{Im}\omega_1>0$ 时得到的结果也是一样的.

先来算 $\mathrm{Im}[D^+(1)V_\Sigma]$，按定义(18.107)式，

$$\mathrm{Im}[D^+(1)V_\Sigma]=\mathrm{Im}[D^+(1)U^{\Sigma(0)}(-1)]\frac{1}{m_i}\frac{\boldsymbol{k}_1}{k_1}\cdot\frac{\partial f_i}{\partial \boldsymbol{v}_1}-\mathrm{Im}[D^+(1)U^{\Sigma(1)}_{k_1}(-1)]f_i.$$

这里的

$$(1)=(\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{k}_1),\quad (-1)=(-\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{v}_1,-\boldsymbol{k}_1).$$

即已经取了 $\omega_1=\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{v}_1$. 利用

$$D^+(1)=1+\sum_i\frac{\omega_{pi}^2\boldsymbol{k}_1}{k_1k_1}\cdot\int\frac{\partial f_i}{\partial\boldsymbol{v}}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\omega_1-\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{v}}=1+\frac{1}{k_1}\omega_{pi}^2U^{(1)}_{ik_1}(1),$$

有

$$\begin{aligned}
&4\pi\mathrm{Im}[D^+(1)U^{\Sigma(0)}(-1)]\\
&=\mathrm{Im}\left[\left(1+\frac{1}{k_1}\sum_i\omega_{pi}^2U^{(1)}_{i,k_1}(1)\right)\sum_j4\pi n_jq_j^2U_j^{(0)}(-1)\right]\\
&=\mathrm{Im}\left\{\left[1+\frac{1}{k_1}\sum_i\omega_{pi}^2\left(-\frac{1}{k_1}E_i^{(1)}(1)-\mathrm{i}\pi\frac{1}{k_1}F'_i(1)\right)\right]\right.\\
&\quad\left.\times\sum_j\omega_{pj}^2m_j\left(\frac{1}{k_1}E_j^{(0)}(1)-\mathrm{i}\pi\frac{1}{k_1}F_j(1)\right)\right\}\\
&=-\frac{\pi}{k_1}\sum_jm_j\omega_{pj}^2\left[\left(1-\sum_i\frac{\omega_{pi}^2}{k_1^2}E_i^{(1)}(1)\right)F_j(1)\right.\\
&\quad\left.+E_j^{(0)}(1)\sum_i\frac{\omega_i^2}{k_1^2}F'_i(1)\right].
\end{aligned}$$

同样有

$$\begin{aligned}
&4\pi\mathrm{Im}[D^+(1)U^{\Sigma(1)}_{k_1}(-1)]\\
&=\mathrm{Im}\left\{\left[1-\sum_i\frac{\omega_{pi}^2}{k_1^2}E_i^{(1)}(1)-\mathrm{i}\pi\sum_i\frac{\omega_{pi}^2}{k_1^2}F'_i(1)\right]\right.\\
&\quad\left.\times\left[\sum_j\omega_{pj}^2\frac{1}{k_1}\left(E_j^{(1)}(1)-\mathrm{i}\frac{\pi}{k_1}F'_j(1)\right)\right]\right\}\\
&=-\frac{\pi}{k_1}\sum_j\omega_{pj}^2\left[\left(1-\sum_i\frac{\omega_{pi}^2}{k_1^2}E_i^{(1)}(1)\right)F'_j(1)\right.\\
&\quad\left.+E_j^{(1)}(1)\left(\sum_i\frac{\omega_i^2}{k_1^2}F'_i(1)\right)\right].
\end{aligned}$$

将上面两项相加，最后得

$$\begin{aligned}
&4\pi\mathrm{Im}[D^+(1)V_\Sigma]\\
&=-\frac{\pi}{k_1}\sum_jm_j\omega_{pj}^2\left\{\frac{1}{m_i}\frac{\boldsymbol{k}_1}{k_1}\cdot\frac{\partial f_i}{\partial\boldsymbol{v}_1}(1)\left[\left(1-\sum_i\frac{\omega_{pi}^2}{k_1^2}E_i^{(1)}(1)\right)F_j(1)\right.\right.\\
&\quad\left.+E_j^{(0)}(1)\sum_i\frac{\omega_i^2}{k_1^2}F'_i(1)\right]\\
&\quad-\frac{1}{m_j}f_i(1)\left[\left(1-\sum_i\frac{\omega_{pi}^2}{k_1^2}E_i^{(1)}(1)\right)F'_j(1)\right.\\
&\quad\left.\left.+E_j^{(1)}(1)\sum_i\frac{\omega_i^2}{k_1^2}F'_i(1)\right]\right\}.
\end{aligned}$$

接下来计算第二个虚部

$$\begin{aligned}
&(4\pi)^2\mathrm{Im}[-W_\Sigma]\\
&=-\mathrm{Im}[(4\pi)^2(U^{\Sigma(1)}_{k_1}(1)U^{\Sigma(0)}(2)\\
&\quad-U^{\Sigma(0)}(1)U^{\Sigma(1)}_{k_1}(2))]\\
&=-\mathrm{Im}\left[\sum_i\frac{4\pi n_iq_i^2}{m_i}U^{(1)}_{i,k_1}(1)\sum_j4\pi n_jq_j^2U_j^{(0)}(-1)\right.\\
&\quad\left.-\sum_j4\pi n_jq_j^2U_j^{(0)}(1)\sum_i\frac{4\pi n_iq_i^2}{m_i}U^{(1)}_{i,k_1}(-1)\right]\\
&=-\mathrm{Im}\left\{\sum_i\omega_{pi}^2\frac{-1}{k_1}(E_i^{(1)}(1)+\mathrm{i}\pi F'_i(1))\right.\\
&\quad\times\left[\sum_j\omega_{pj}^2\frac{m_j}{k_1}(E_j^{(0)}(1)-\mathrm{i}\pi F_j(1))\right]\\
&\quad-\sum_j\omega_{pj}^2\frac{-m_j}{k_1}(E_j^{(0)}(1)+\mathrm{i}\pi F_j(1))
\end{aligned}$$

$$\times\left[\sum_i \omega_{pi}^2 \frac{1}{k_1}(E_i^{(1)}(1) - i\pi F_i'(1))\right]\Bigg\}$$

$$= -\frac{2\pi}{k_1^2}\Big[\sum_i \omega_{pi}^2 E_i^{(1)}(1)\Big(\sum_j \omega_{pj}^2 m_j F_j(1)\Big) - \sum_i \omega_{pi}^2 F_i'(1)\Big(\sum_j \omega_{pj}^2 m_j E_j^{(0)}(1)\Big)\Big].$$

最后把两个虚部相加,消去许多项后可得

$$\mathrm{Re}I_0 + \mathrm{Re}I_1 = \frac{1}{|D^+(1)|^2}\frac{\pi}{k_1}\sum_j \omega_{pj}^2 m_j\left[\frac{f_i(1)}{m_j}F_j'(1) - \frac{F_j(1)}{m_i}f_{i,k_1}^{(1)}(1)\right], \tag{18.120}$$

其中

$$f_{i,k_1}^{(1)} = \boldsymbol{e}_{k_1}\cdot\frac{\partial f_i(\boldsymbol{v}_1)}{\partial \boldsymbol{v}_1},\quad \boldsymbol{e}_{k_1} = \frac{\boldsymbol{k}_1}{k_1}.$$

将前式代入 18.6.3 小节的碰撞流表达式(见(18.110)式和(18.111)式之间的表达式)后,最后就得到了 Balescu-Lenard 碰撞流:

$$\boldsymbol{J}_i(\boldsymbol{v}_1) = \frac{2q_i^2}{m_i\pi}\frac{1}{4\pi}\int \mathrm{d}\boldsymbol{k}_1 \frac{\boldsymbol{k}_1}{k_1^4}\frac{\pi}{|D^+(1)|^2}\sum_j \omega_{pj}^2 m_j \times\left[\frac{f_i(1)}{m_j}F_j'(1) - \frac{F_j(1)}{m_i}f_{i,k_1}^{(1)}(1)\right]$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\sum_j \frac{4\pi n_j q_i^2 q_j^2}{m_i}\int \mathrm{d}\boldsymbol{k}_1 \frac{\boldsymbol{k}_1}{k_1^4}\frac{1}{|D^+(1)|^2} \times\left(\frac{F_j(1)}{m_i}\frac{\boldsymbol{k}_1}{k_1}\times\frac{\partial f_i(\boldsymbol{v}_1)}{\partial \boldsymbol{v}_1} - \frac{f_i(1)}{m_j}F_j'(1)\right) \tag{18.121}$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\sum_j \frac{4\pi n_j q_i^2 q_j^2}{m_i}\int \mathrm{d}\boldsymbol{k}_1 \frac{\boldsymbol{k}_1}{k_1^4}\frac{1}{|D^+(1)|^2} \cdot\int \mathrm{d}\boldsymbol{v}_2 \delta(\boldsymbol{e}_{k_1}\cdot\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{e}_{k_1}\cdot\boldsymbol{v}_2)\boldsymbol{e}_{k_1}\cdot\boldsymbol{M}_{ij} \tag{18.122}$$

$$= m_i\sum_j n_j\int \mathrm{d}\boldsymbol{v}_2 \overset{\leftrightarrow}{Q}_{ij}(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2)\cdot\boldsymbol{M}_{ij}, \tag{18.123}$$

其中

$$\boldsymbol{M}_{ij} = \frac{f_j(\boldsymbol{v}_2)}{m_i}\frac{\partial f_i(\boldsymbol{v}_1)}{\partial \boldsymbol{v}_1} - \frac{f_i(\boldsymbol{v}_1)}{m_j}\frac{\partial f_j(\boldsymbol{v}_2)}{\partial \boldsymbol{v}_2}, \tag{18.124}$$

$$\overset{\leftrightarrow}{Q}_{ij}(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2) = -\int \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{k}_1}{k_1^5}\frac{\boldsymbol{k}_1\boldsymbol{k}_1}{m_i^2}\frac{2q_i^2q_j^2}{|D^+(1)|^2}\delta[\boldsymbol{e}_{k_1}\cdot(\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2)]. \tag{18.125}$$

在上式中的积分$\int\cdots \mathrm{d}\boldsymbol{k}_1$代表对所有 $\boldsymbol{k}_1$的等离子体波(扰动)取和. 但对积分贡献最大的是使 $D^+(1)=0$的波——它们就是所谓的等离子体本征模. 将上面得到的 Balescu-Lenard 碰撞流和下面的朗道碰撞流

$$\boldsymbol{J}_i^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{v}_1) = m_i\sum_j n_j\int \mathrm{d}\boldsymbol{v}_2 \overset{\leftrightarrow}{Q}{}_{ij}^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2)\cdot\boldsymbol{M}_{ij},$$

$$\overset{\leftrightarrow}{Q}{}_{ij}^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2) = \frac{2\pi n_i q_i^2 q_j^2}{m_i^2}\ln\Lambda_c \frac{g^2\overset{\leftrightarrow}{I} - \boldsymbol{g}\boldsymbol{g}}{g^3}$$

相比,它们之间的差别也只在 $\overset{\leftrightarrow}{Q}$ 的表达式上,而 $\boldsymbol{M}_{ij}$及其他部分都是一样的. 在 Balescu-Lanard 碰撞流中考虑到了不同波长(k_1)的等离子体波对两体关联函数的影响(即对$\int \mathrm{d}\boldsymbol{k}_1\cdots$的积分),因此比朗道碰撞流只考虑了静止的极化效应(电荷云屏蔽)更进了一步. 但在 Balescu-Lanard 碰撞流中所考虑的等离子体波,只是处在热涨落水平的本征模,所以把实际的等离子体参数代入后会发现它对经典碰撞算子的修正并不大. 如果要考虑超出热噪声水平很多的等离子体静电湍动或者外加大功率电磁波对两体碰撞的影响,则应在单粒子分布函数及两体关联函数所服从的动理学方程中添加相应的项. 这时计算会大大复杂化,但这里所讨论过的许多具体技巧仍然有重要参考价值. 在本章末,给出了用 BBGKY 的头两个方程计算强激光场中两体碰撞算子的过程和结果. 关于湍动静电场中的两体碰撞算子的计算请参考文献[13].

18.6.6 Balescu-Lenard 方程与朗道方程的关系

本节将证明,在以下近似下:

(i) 取热平衡的速度分布

$$F(u) = F_M(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi u_t^2}} e^{-u^2/(2u_t^2)}, \quad u_t^2 = \frac{T}{m},$$

(ii) 只考虑低频波的影响

$$\zeta_j = \frac{\omega_1}{k_1} \frac{1}{\sqrt{2}\, u_{jt}} \ll 1,$$

并完成$\int d\boldsymbol{k}_1 \cdots$后,Balescu-Lenard 方程就可以回到朗道方程.

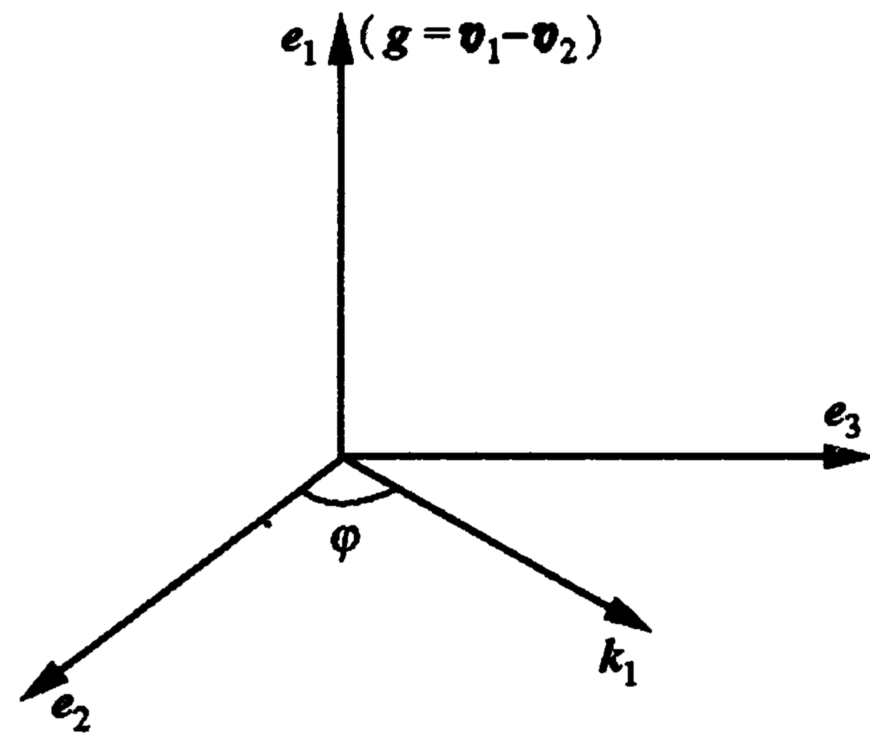


图18.5 $\boldsymbol{k}_1$的坐标图

取以两粒子相对速度 $\boldsymbol{g}=\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_2=g\boldsymbol{e}_1$为对称轴的球坐标(图 18.5),在此坐标系中

$$\boldsymbol{k}_1 = k_1^{(1)}\boldsymbol{e}_1 + k_1^{(2)}\boldsymbol{e}_2 + k_1^{(3)}\boldsymbol{e}_3,$$

并且有

$$\delta[\boldsymbol{e}_{k_1} \cdot (\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2)] = \frac{k_1}{g}\delta(k_{k_1}^{(1)}). \qquad (18.126)$$

于是(由 δ 函数可知: $k_1^{(1)}=0$)

$$\int d\boldsymbol{k}_1 \delta[\boldsymbol{e}_{k_1} \cdot (\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2)] \cdots = \int d\varphi \cdots \int k_1 dk_1 \frac{k_1}{g} \cdots,$$

其中

$$d\varphi\, k_1 dk_1 = dk_1^{(2)} dk_1^{(3)}, \quad k_1^2 = (k_1^{(2)})^2 + (k_1^{(3)})^2.$$

此外,令

$$D^+(1) = 1 + \sum_j \frac{\omega_{pj}^2}{k_1^2} k_1 U_{j,k_1}^{(1)}(1) = 1 + \sum_j \frac{\omega_{pj}^2}{k_1^2} \Psi_j(1),$$

$$\Psi_j(1) = k_1 U_{j,k_1}^{(1)}(1) = \int \frac{\boldsymbol{k}_1 \cdot \frac{\partial f_j}{\partial \boldsymbol{v}}}{\omega_1 - \boldsymbol{k}_1 \cdot \boldsymbol{v}} d\boldsymbol{v},$$

及

$$\boldsymbol{k}_1 \cdot \boldsymbol{v} = k_1 u, \quad \boldsymbol{e}_{k_1} \cdot \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{v}} = \frac{\partial}{\partial u}, \quad u_1 = \frac{\omega_1}{k_1}.$$

于是有

$$\Psi_j(1) = -\int \frac{\partial F_j}{\partial u} \frac{du}{u - u_1}.$$

当取 $F_j=F_{jM}$(麦克斯韦速度分布)时,进一步有

$$\Psi_j(1) = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{2u_{jt}^2} \int \frac{\partial}{\partial \beta}(e^{-\beta^2}) \frac{d\beta}{\beta - \zeta_j}, \quad \beta = \frac{u}{\sqrt{2}\, u_{jt}},$$

$$\zeta_j = \frac{u_1}{\sqrt{2}\, u_{jt}} = \frac{\omega_1}{k_1} \frac{1}{\sqrt{2}\, u_{jt}}.$$

结果

$$\Psi_j(1) = \frac{1}{u_{jt}^2}[1 + \zeta_j Z_p(\zeta_j)] = \frac{1}{u_{jt}^2}\psi_j(\zeta_j). \qquad (18.127)$$

其中 Z_p 就是等离子体色散函数,在取 $\zeta_j \ll 1$ 的近似时,有

$$Z_p(\zeta_j) = i\sqrt{\pi}\,\zeta_j e^{-\zeta_j^2} - 2\zeta_j\left[1 - \frac{2}{3}\zeta_j^2 + \frac{4}{15}\zeta_j^4 - \cdots\right],$$

$$\psi_j^R = 1 + \zeta_j \mathrm{Re}[Z_p(\zeta_j)] \approx 1 - 2\zeta_j^2 \leqslant 1,$$

$$\psi_j^I = \sqrt{\pi}\,\zeta_j e^{-\zeta_j^2} \ll 1,$$

其中上标 R 和 I 分别代表实部和虚部. 故一般有 $\psi_j^I \ll \psi_j^R$,下面的

计算中将只取它们展开式的首项.

下面来计算碰撞流中的积分$\int d\boldsymbol{k}_1\cdots$,采取下面的符号

$$(\boldsymbol{e}_{k_1}\cdot\boldsymbol{e}_{v_1})^2=\left(\frac{k_1^{(2)}}{k_1}\frac{v_1^{(2)}}{v_1}+\frac{k_1^{(3)}}{k_1}\frac{v_1^{(3)}}{v_1}\right)^2=\left(\kappa_2\frac{v_1^{(2)}}{v_1}+\kappa_3\frac{v_1^{(3)}}{v_1}\right)^2,$$

$$\boldsymbol{\kappa}=\left(\frac{k_1^{(2)}}{k_1},\frac{k_1^{(3)}}{k_1}\right)\doteq(\cos\varphi,\sin\varphi),$$

$$v_1^2=(v_1^{(1)})^2+(v_1^{(2)})^2+(v_1^{(3)})^2.$$

并利用

$$\sum_j\frac{\omega_{pj}^2}{k_1^2}\Psi_j=\frac{1}{k_1^2}\sum_j\frac{\omega_{pj}^2}{k_1^2u_{jt}^2}\psi_j=\frac{1}{k_1^2}\sum_j\lambda_{Dj}^{-2}\psi_j\equiv\frac{1}{k_1^2}\Theta_\Sigma.$$

这样 Balescu-Lenard 碰撞流中的张量((18.125)式)就可以写成

$$\overset{\rightrightarrows}{Q}=-\frac{2q_i^2q_j^2}{m_i^2}\frac{1}{g}\oint d\varphi\boldsymbol{\kappa\kappa}\int\frac{k_1^3dk_1}{|k_1^2+\Theta_\Sigma|^2}.\tag{18.128}$$

上式中的积分和推导朗道算子时的 k 空间积分是一样的(参考式(18.31)—(18.33)). 这里再算一遍: 上式中的角度积分为

$$\oint d\varphi\boldsymbol{\kappa\kappa}=\pi\frac{g^2\overset{\rightrightarrows}{I}-\boldsymbol{gg}}{g^2}\quad\left(\oint d\varphi\kappa_i\kappa_j=\begin{cases}0, & \text{当 } i\neq j;\\ \pi, & \text{当 } i=j=2,3\end{cases}\right).\tag{18.129}$$

而 k 空间的积分则为

$$\int_0^\infty\frac{k_1^3dk_1}{|k_1^2+\Theta_\Sigma|^2}\approx\int_0^{k_{\max}}\frac{k_1^3dk_1}{|k_1^2+\Theta_\Sigma|^2}=\frac{1}{2}\int_0^{k_{\max}^2}\frac{xdx}{|x+\Theta_\Sigma|^2}$$

$$=\frac{1}{\mathrm{Im}\Theta_\Sigma}\mathrm{Im}\left[\Theta_\Sigma\ln\left(\frac{k_{\max}^2+\Theta_\Sigma}{\Theta_\Sigma}\right)\right],$$

$$k_{\max}=\frac{1}{r_{\min}}=\frac{q_iq_j}{k_BT_i}.$$

利用$\psi_j^R\sim1$,$\psi_j^I\ll\psi_j^R$,$\Theta_\Sigma=\sum_j\lambda_{Dj}^{-2}\psi_j$,上式中的

$$\frac{k_m^2}{\Theta_\Sigma}\approx\frac{k_m^2}{\sum_j\lambda_{Dj}^{-2}}=\frac{k_m^2}{\lambda_D^{-2}}=\frac{\lambda_D^2}{r_{\min}^2}\gg1.$$

故

$$\ln\left(1+\frac{k_m^2}{\Theta_\Sigma}\right)\approx\ln\left(\frac{k_m^2}{\Theta_\Sigma}\right)=2\ln\left(\frac{\lambda_D}{r_{\min}}\right)=2\ln\Lambda_c.$$

这个量是实数,所以 k 空间的积分就可积出

$$\int_0^\infty\frac{k_1^3dk_1}{|k_1^2+\Theta_\Sigma|^2}\approx\frac{1}{2}\frac{\mathrm{Im}\Theta_\Sigma2\ln(\lambda_D/r_{\min})}{\mathrm{Im}\Theta_\Sigma}=\ln\Lambda_c.\tag{18.130}$$

这样在取了上述近似后,Balescu-Lenard 碰撞张量(18.125)式就化成了朗道碰撞张量

$$\overset{\rightrightarrows}{Q}\approx-\frac{2q_i^2q_j^2}{m_i^2}\frac{1}{g}\left(\pi\frac{g^2\overset{\rightrightarrows}{I}-\boldsymbol{gg}}{g^2}\right)\ln\Lambda$$

$$=-\frac{2\pi q_i^2q_j^2}{m_i^2}\ln\Lambda\frac{g^2\overset{\rightrightarrows}{I}-\boldsymbol{gg}}{g^2}=\overset{\rightrightarrows}{Q}{}^L.\tag{18.131}$$

比较我们已经导出的几个不同的张量$\overset{\rightrightarrows}{Q}$(朗道碰撞算子、磁化碰撞算子及 Balescu-Lenard 碰撞算子),可以发现它们都和某种等效相互作用势的傅氏变换的平方有关.从物理上来看,这些等效的相互作用势都是普通库仑势在非静态、非热力学平衡等离子体中,受到背景中其他粒子和等离子体集体运动(波)的影响而变成的等效电势,也就是动理学的屏蔽库仑势. 这是流体方程无法做到,而只有动理学方程才能描述的. 因为等离子体的状态不同,两体相互作用势的动理学屏蔽也不相同,从而碰撞算子也不相同. 例如在朗道算子中,等效的屏蔽势是时间无关的,但在磁化算子与 Balescu-Lenard 算子中它们却是和时间相关的. 在磁化算子中时间的相关和粒子周期性的快速回旋运动的长时间平均有明显联系,而在 Balescu-Lenard 算子中的时间相关则是通过 D^+ 中的 $f_0(t)$和碰撞引起的缓慢弛豫过程以自洽的方式相连系的($f_0(t)$由单粒子分布函数满足的碰撞方程决定,而碰撞算子在这里又和 $f_0(t)$有关). 用 BBGKY 头两个方程导出的其他碰撞算子,在物理上,也可以作类似的理解.

18.7 强激光在等离子体中的碰撞吸收频率

18.7.1 引 言

激光在等离子体中的被吸收效率是激光聚变中的一个关键参数. 最普适的吸收机制是电子的逆轫致辐射——即电子在离子库仑场的帮助下吸收一个光子而从光场中获取能量. 在等离子体中电子感受到的是离子的屏蔽库仑势,其作用半径约为德拜长度;而在这个范围内的电子-离子相互作用通常用两体碰撞来描述. 因此激光的逆轫致辐射吸收实际上就是电子的碰撞吸收,可以通过电子-离子的两体碰撞频率来表示激光能量的被吸收频率(速率).

以往所采用的电子-离子碰撞频率 ν_{ei}都和外加光场的强度无关,至多加上高频(激光频率的)修正. 这在激光强度较低(例如 $I<10^{13}$ W/cm^2)时是正确的,因为这时电子在光场中的平均抖动能 W_0 小于电子在离子库仑势场中受到的平均势能 U_e,所以光场对电子-离子的碰撞过程影响不大;电子在与离子碰撞前后均可以当成是以热速度 v_{et} 自由运动的粒子. 但当激光强度较强时,可以有 $W_0>U_e$ 甚至于 $W_0\gg U_e$,这时电子在激光场中的抖动速度 v_0 将接近甚至超过热速度. 因此这时在计算碰撞频率 ν_{ei}时,必须考虑外加光场(强度及频率)的影响.

外加激光场对其在等离子体中吸收速率(频率)的影响,早在20世纪60年代就被美国的 J. M. Dawson 和 C. Oberman[14](后来被他们自己称为 DO 模型)及苏联的 V. P. Silin[15]研究过,而后在70年代被 Yu L. Klimontovich[16]用其独特的链式方程研究过,但当时都没有特别注意到场强特别强的情况. 直到90年代,由于极短脉冲强激光的推动,又出现了一系列有关的工作,其中具有代表性的是 C. D. Decker, W. B. Mori 和 J. M. Dawson[17]的工作. DO 模型和 Silin 的工作类似,都从电子为静止的弗拉索夫方程出发,把离子当成是在光场中高速振荡的,把这些振荡离子造成的平均电场当成作用于电子的已知自洽场,可以求出电子分布函数中对平衡分布偏离的部分. 然后把这种偏离等价成电子和(振荡)离子两体碰撞而产生的对平衡分布的偏离,就可以求得受光场影响的电子-离子碰撞频率,并且当外场趋于零时它能自动回归经典的两体碰撞频率. 但这种模型和公认的两体碰撞图像有差别,而且也难以推广到相对论情况. 此外,它们得到的激光吸收频率(它正比于碰撞频率 ν_{ei})在 $0<x_0<1$ 的区间内基本是常数($x_0=v_0/v_{et}$),而当 $x_0\geqslant 1$ 时迅速单调下降(见图 18.7). 这和公认的实验事实也有出入(见图18.8,或文献[18]中的 FIG. 5),在实验中吸收率往往是 x_0 的凹函数,其极小值约在 $I\sim 10^{16}$ W/cm^2 处(见图18.8).

本书取 $U_e/W_0\ll 1$ 为小参量,展开 BBGKY 的头两个链式方程,在电子-离子关联函数 P_{ei}的运动方程(BBGKY 链式方程的第二个方程)中计入外加光场的影响,这样解得的 P_{ei}在代回电子分布函数的运动方程后,就构成了依赖于激光强度和频率的两体碰撞碰撞流. 并在此基础上得出了激光在等离子体中的碰撞吸收频率表达式. 当外光场趋于零时,可以回到经典的两体碰撞算子(即 Balescu-Lenard 算子或朗道算子). 这种方式是推导经典两体碰撞算子的自然延伸,物理图像清晰,而且有可能向相对论情况推广. 此式(见(18.170)式)在光强 $I=10^{14}\sim 10^{17}$ W/cm^2 范围内适用,并在 $I=2.2\times 10^{16}$ W/cm^2 处有极小值. 这结果显然不同于经典的碰撞频率与激光强度无关的结论,但却和实验曲线十分吻合(见图18.8 或文献[18]). 通常把 $I>10^{16}$ W/cm^2 时激光吸收率的提高归结为各种反常吸收效应,但本节导出的碰撞吸收频率也在这个区域呈现出随激光强度而增大的趋势(这和 DO 模型显然不同),从而在经典碰撞的框架内,为上述实验结果提供了一种可能解释. 本文只讨论非相对论情况,因此本文结果只适用于激光光强在 $10^{14}<I$(W/cm^2)$<10^{17}$范围内的两体碰撞吸收.

18.7.2　强激光场中的运动方程组

1. 出发方程组

按照 R. L. Guerney[19]，在平均库仑能 U_e 远小于平均动能 W ($U_e/W \ll 1$)时，BBGKY 链式方程中的多粒子分布函数

$$f_s(1,2,\cdots,s;t),\quad (s)=(\mu_s)=(\boldsymbol{r}_s,\boldsymbol{v}_s),\quad s=1,2,\cdots,N-1.$$

均可以近似地用单粒子分布函数 f_1 及两粒子分布函数 f_2 中的关联函数 P 来写出

$$f_1(1)=f(1),$$

$$f_2(1,2)=f(1)f(2)+P(1,2),$$

$$\vdots$$

$$f_s(1,2,\cdots,s)=\prod_{i=1}^{s}f(i)+\sum_{i=1}^{j-1}\sum_{j=1}^{s}P(i,j)\prod_{k\neq i,j}^{s}f(k).$$

故 BBGKY 链式方程退化成头两个方程(其中 i,j 代表不同种类的粒子下标)

$$\frac{\partial f_i(1)}{\partial t}+\boldsymbol{v}_1\cdot\frac{\partial f_i(1)}{\partial \boldsymbol{r}_1}+\frac{\boldsymbol{F}_1}{m_i}\cdot\frac{\partial f_i(1)}{\partial \boldsymbol{v}_1}=\frac{1}{m_i}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{v}_1}\cdot\sum_j n_j\int\frac{\partial\phi_{ij}}{\partial \boldsymbol{r}_1}P_{ij}(1,2)\mathrm{d}\mu_2. \tag{18.132}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial P_{ij}(1,2)}{\partial t}&+\left(\boldsymbol{v}_1\cdot\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}_1}+\boldsymbol{v}_2\cdot\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}_2}\right)P_{ij}(1,2)\\&+\left(\frac{\boldsymbol{F}_1}{m_i}\cdot\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{v}_1}+\frac{\boldsymbol{F}_2}{m_j}\cdot\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{v}_2}\right)P_{ij}(1,2)\\&=\frac{\partial\phi_{ij}(|\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2|)}{\partial \boldsymbol{r}_1}\cdot\left(\frac{1}{m_i}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{v}_1}-\frac{1}{m_j}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{v}_2}\right)f_i(1)f_j(2)\\&+\frac{1}{m_i}\frac{\partial f_i(1)}{\partial \boldsymbol{v}_1}\cdot\sum_{l=i,j}n_l\int\frac{\partial\phi_{il}}{\partial \boldsymbol{r}_1}P_{lj}(l,2)\mathrm{d}\mu_l\\&+\frac{1}{m_j}\frac{\partial f_j(2)}{\partial \boldsymbol{v}_2}\cdot\sum_{l=i,j}n_l\int\frac{\partial\phi_{jl}}{\partial \boldsymbol{r}_2}P_{li}(l,1)\mathrm{d}\mu_l.\end{aligned} \tag{18.133}$$

其中一般用“(1)”代表第 i 种粒子的相空间坐标，而用“(2)”代表

第 j 种粒子的相空间坐标. 但当 $i=j$ 时，$1\neq 2$，它代表同一种粒子分布函数的不同相空间坐标点.

2. 强激光场近似

令 U_e 为电子在离子库仑场中的平均库仑能，而 W_0 为电子在外加激光场中抖动时的动能，则本节所谓的强激光场可定义成满足

$$\frac{U_e}{W_0}\ll 1$$

时的激光场. 按定义，有

$$U_e=\frac{e^2}{r_{ev}}\approx\left(\frac{4\pi}{3}\right)^{1/3}n_e^{1/3}e^2=3.7\times 10^{-12}n_{21}^{1/3}\quad(\mathrm{g\cdot cm^2/s^2}),$$

$$W_0=\frac{1}{2}m_e v_0^2=3.0\times 10^{-11}I_{13}\lambda_\mu^2\quad(\mathrm{g\cdot cm^2/s^2}).$$

其中 n_{21} 是以 $10^{21}\ \mathrm{cm^{-3}}$ 为单位的电子密度，I_{13} 是以 $10^{13}\ \mathrm{W/cm^2}$ 为单位的激光强度，λ_μ 是以 μm 为单位的激光波长. 而电子的抖动速度定义为

$$v_0=\frac{eE_0}{m\omega}.$$

于是有

$$\frac{U_e}{W_0}\approx 1.25\frac{n_{21}^{1/3}}{I_{13}\lambda_\mu^2}.$$

从上式可以看出，当 $I>10^{14}\ \mathrm{W/cm^2}$ 时，上述比值就是一个小参量. 可以用它将运动方程作展开，这时 eE_0 是零阶量，而 ϕ_{ij} 是一阶小量. 令

$$f_i=f_i^{(0)}+f_i^{(c)},\quad P_{ij}=P_{ij}^{(0)}+P_{ij}^{(c)}.$$

其中 $f_i^{(0)}$，$P_{ij}^{(0)}$ 是零阶量，只受激光场的影响；而 $f_{ij}^{(c)}$，$P_{ij}^{(c)}$ 是一阶量，受库仑场的影响(因而产生“碰撞”现象). 另外从时间尺度来看，$f_i^{(0)}$，$P_{ij}^{(0)}$ 是时间快变量($\propto\exp[-\mathrm{i}n\omega_0 t]$，$n=1,2,\cdots$；$\omega_0$ 是激光频率)；而 $f_{ij}^{(c)}$，$P_{ij}^{(c)}$ 则是以碰撞时间(τ_c)为特征变化时间的慢变量.

3. BBGKY 头两个方程的小参量展开

按上面规定的量级，零阶（快变）分布函数的运动方程为

$$\frac{\partial f_i^{(0)}}{\partial t} + \boldsymbol{v}_1 \cdot \frac{\partial f_i^{(0)}}{\partial \boldsymbol{r}_1} + \frac{q_i}{m_i}\boldsymbol{E} \cdot \frac{\partial f_i^{(0)}}{\partial \boldsymbol{v}_1} = 0, \tag{18.134}$$

其中激光场为

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{E}_0\cos(\boldsymbol{k}_0 \cdot \boldsymbol{r} - \omega_0 t). \tag{18.135}$$

上述方程有严格解[20]

$$f^{(0)}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v},t) = f^{(0)}(\boldsymbol{u}), \tag{18.136}$$

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v} - \frac{q}{m}\boldsymbol{E}_0\int_\tau^t \cos[\boldsymbol{k}_0 \cdot (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{v}(t-t')) - \omega_0 t']\mathrm{d}t'. \tag{18.137}$$

但在非相对论的抖动速度下（$I < 10^{17}$ W/cm^2），可以近似地令 $\boldsymbol{k}_0 \cdot \boldsymbol{v}/\omega_0 \sim v/c \ll 1$，则近似有

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}_0\sin(\boldsymbol{k}_0 \cdot \boldsymbol{r} - \omega_0 t), \tag{18.138}$$

其中

$$\boldsymbol{v}_0 = \frac{q\boldsymbol{E}_0}{m\omega_0},$$

它和严格从牛顿方程求出的抖动速度 $\boldsymbol{v}_{0s} = -q\boldsymbol{E}_0/m\omega_0$ 只差一个负号.

关联函数满足的零阶方程是

$$\frac{\partial P_{ij}^{(0)}}{\partial t} + \left(\boldsymbol{v}_1 \cdot \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}_1} + \boldsymbol{v}_2 \cdot \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}_2}\right)P_{ij}^{(0)} + \left(\frac{\boldsymbol{F}_1}{m_i} \cdot \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{v}_1} + \frac{\boldsymbol{F}_2}{m_j} \cdot \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{v}_2}\right)P_{ij}^{(0)} = 0. \tag{18.139}$$

其严格解是

$$P_{ij}^{(0)} = f_i^{(0)}(\boldsymbol{u}_1)f_j^{(0)}(\boldsymbol{u}_2). \tag{18.140}$$

时间慢变的分布函数满足的一阶方程为

$$\frac{\partial f_i^{(c)}}{\partial t} + \boldsymbol{v}_1 \cdot \frac{\partial f_i^{(c)}}{\partial \boldsymbol{r}_1} = \left(\frac{\partial f_i^{(c)}}{\partial t}\right)_c, \tag{18.141}$$

其中

$$\left(\frac{\partial f_i^{(c)}}{\partial t}\right)_c \equiv \frac{1}{m_i}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{v}_1} \cdot \sum_j n_j\int \frac{\partial \phi_{ij}}{\partial \boldsymbol{r}_1}P_{ij}^{(c)}(1,2)\mathrm{d}\mu_2 = -\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{v}_1} \cdot \boldsymbol{J}_i(\boldsymbol{v}_1). \tag{18.142}$$

而碰撞流定义成

$$\boldsymbol{J}_i(\boldsymbol{v}_1) = -\frac{1}{m_i}\sum_j n_j\int \frac{\partial \phi_{ij}}{\partial \boldsymbol{r}_1}P_{ij}^{(c)}(1,2)\mathrm{d}\mu_2, \tag{18.143}$$

其中含有 $P_{ij}^{(c)}$，它所涉及的一阶（慢变）运动方程（方程(18.133)减去(18.139)后剩余部分）比较复杂，其中方程的右边含有两类非线性项，下面来作细致分析.

第一类非线性项（(18.133)式最后的两项）

$$\frac{\partial f_i}{\partial \boldsymbol{v}_1} \cdot \int \mathrm{d}\mu_3 \frac{\partial \phi_{1l}}{\partial \boldsymbol{r}_1}P_{jl}(2,3)$$

$$= \frac{\partial f_i^{(0)}}{\partial \boldsymbol{v}_1} \cdot \int \mathrm{d}\mu_3 \frac{\partial \phi_{1l}}{\partial \boldsymbol{r}_1}P_{jl}^{(0)}(2,3) + \frac{\partial f_i^{(c)}}{\partial \boldsymbol{v}_1} \cdot \int \mathrm{d}\mu_3 \frac{\partial \phi_{1l}}{\partial \boldsymbol{r}_1}P_{jl}^{(0)}(2,3)$$

$$+ \frac{\partial f_i^{(0)}}{\partial \boldsymbol{v}_1} \cdot \int \mathrm{d}\mu_3 \frac{\partial \phi_{1l}}{\partial \boldsymbol{r}_1}P_{jl}^{(c)}(2,3) + \frac{\partial f_i^{(c)}}{\partial \boldsymbol{v}_1} \cdot \int \mathrm{d}\mu_3 \frac{\partial \phi_{1l}}{\partial \boldsymbol{r}_1}P_{jl}^{(c)}(2,3).$$

其中第四项明显为时间慢变量；而前三项由于同时含有时间快变与慢变因子，所以要进一步讨论，以将慢变量分辨出来. 先看第二项，由于积分号外的因子已经是慢变量，故要求从积分内挑出时间慢变量

$$\int \mathrm{d}\mu_3 \frac{\partial \phi_{1l}}{\partial \boldsymbol{r}_1}\langle P_{jl}^{(0)}(2,3)\rangle_c = -\int \mathrm{d}\mu_3 \frac{\partial \phi_{1l}}{\partial \boldsymbol{r}_3}\langle f_j^{(0)}(2)f_l^{(0)}(3)\rangle_c,$$

其中 $\langle \cdots \rangle_c$ 表示对时间、空间作慢变平均. 由于平均后此量和 $(\boldsymbol{k}_0 \cdot \boldsymbol{r} - \omega_0 t)$ 无关，故可移出积分号，

$$\int \mathrm{d}\mu_3 \frac{\partial \phi_{1l}}{\partial \boldsymbol{r}_1}\langle P_{jl}^{(0)}(2,3)\rangle_c$$

$$= -\langle f_j^{(0)}(2)f_l^{(0)}(3)\rangle_c\int \mathrm{d}\mu_3 \frac{\partial \phi_{1l}}{\partial \boldsymbol{r}_3}$$

$$= -\langle f_j^{(0)}(2)f_l^{(0)}(3)\rangle_c\phi_{1l}(|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_3|)\Big|_{r_3=-\infty}^{r_3=+\infty} = 0.$$

同样，第一项中的慢变量也为零，

$$\int d\mu_3 \frac{\partial \phi_{1l}}{\partial \boldsymbol{r}_1}\left\langle \frac{\partial f_i^{(0)}}{\partial \boldsymbol{v}_1} P_{jl}^{(0)}(2,3)\right\rangle_c = -\left\langle \frac{\partial f_i^{(0)}}{\partial \boldsymbol{v}_1} P_{jl}^{(0)}(2,3)\right\rangle_c \int d\mu_3 \frac{\partial \phi_{1l}}{\partial \boldsymbol{r}_3} = 0.$$

所以这个非线性项只剩下二项，

$$\left\{\left[\frac{\partial f_i^{(0)}}{\partial \boldsymbol{v}_1}\right]_c + \frac{\partial f_i^{(c)}}{\partial \boldsymbol{v}_1}\right\}\cdot \int d\mu_3 \frac{\partial \phi_{1l}}{\partial \boldsymbol{r}_1} P_{jl}^{(c)}(2,3) \equiv \left[\frac{\partial f_i}{\partial \boldsymbol{v}_1}\right]_c \cdot \int d\mu_3 \frac{\partial \phi_{1l}}{\partial \boldsymbol{r}_1} P_{jl}^{(c)}(2,3),$$

其中$[\cdots]_c$是指$[\cdots]$中的慢变部分.

第二类非线性项((18.133)右边的头一项)

$$f_j \frac{\partial f_i}{\partial \boldsymbol{v}_1} = (f_j^{(0)} + f_j^{(c)})\left(\frac{\partial f_i^{(0)}}{\partial \boldsymbol{v}_1} + \frac{\partial f_i^{(c)}}{\partial \boldsymbol{v}_1}\right) = \left[f_j^{(0)} \frac{\partial f_i^{(0)}}{\partial \boldsymbol{v}_1}\right]_c + f_j^{(c)} \frac{\partial f_i^{(c)}}{\partial \boldsymbol{v}_1} + [f_j^{(0)}]_c \frac{\partial f_i^{(c)}}{\partial \boldsymbol{v}_1} + f_j^{(c)}\left[\frac{\partial f_i^{(0)}}{\partial \boldsymbol{v}_1}\right]_c.$$

其中第一项最大，是零阶项；它是由两个快变项耦合成的慢变项，曾被 Yu. L. Klimontovichy 讨论过(见参考文献[16]，178—181页). 第二项最小，为二阶小量；它对应于经典(无外场)的 Balescu-Lenard 碰撞积分的源项[21]. 而第三、四项则是一阶小量，这两项以前尚无人讨论过；但在目前情况下它们仍比经典项强，故也应作一估算.

综上所述，可以最后写出$P_{ij}^{(c)}$满足的运动方程

$$\frac{\partial P_{ij}^{(c)}}{\partial t} + \left(\boldsymbol{v}_1\cdot\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}_1} + \boldsymbol{v}_2\cdot\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}_2}\right)P_{ij}^{(c)} - \frac{1}{m_i}\left[\frac{\partial f_i}{\partial \boldsymbol{v}_1}\right]_c \cdot \sum_l n_l \int d\mu_3 \frac{\partial \phi_{1l}}{\partial \boldsymbol{r}_1} P_{jl}^{(c)}(2,3)$$

$$- \frac{1}{m_j}\left[\frac{\partial f_j}{\partial \boldsymbol{v}_1}\right]_c \cdot \sum_l n_l \int d\mu_3 \frac{\partial \phi_{2l}}{\partial \boldsymbol{r}_2} P_{il}^{(c)}(1,3)$$

$$= \frac{\partial \phi_{ij}}{\partial \boldsymbol{r}_1}\cdot\left(\frac{f_j^{(c)}}{m_i}\frac{\partial f_i^{(c)}}{\partial \boldsymbol{v}_1} - \frac{f_i^{(c)}}{m_j}\frac{\partial f_j^{(c)}}{\partial \boldsymbol{v}_2}\right) + \frac{\partial \phi_{ij}}{\partial \boldsymbol{r}_1}\cdot\left(\frac{f_j^{(0)}}{m_i}\frac{\partial f_i^{(0)}}{\partial \boldsymbol{v}_1} - \frac{f_i^{(0)}}{m_j}\frac{\partial f_j^{(0)}}{\partial \boldsymbol{v}_2}\right)_c$$

$$+ \frac{\partial \phi_{ij}}{\partial \boldsymbol{r}_1}\cdot\left(\frac{f_j^{(c)}}{m_i}\left[\frac{\partial f_i^{(0)}}{\partial \boldsymbol{v}_1}\right]_c - \frac{f_i^{(c)}}{m_j}\left[\frac{\partial f_j^{(0)}}{\partial \boldsymbol{v}_2}\right]_c\right) + \frac{\partial \phi_{ij}}{\partial \boldsymbol{r}_1}\cdot\left(\frac{[f_j^{(0)}]_c}{m_i}\frac{\partial f_i^{(c)}}{\partial \boldsymbol{v}_1} - \frac{[f_i^{(0)}]_c}{m_j}\frac{\partial f_j^{(c)}}{\partial \boldsymbol{v}_2}\right)$$

$$\equiv \frac{\partial \phi_{ij}}{\partial \boldsymbol{r}_1}\cdot\left(\boldsymbol{F}_{ij}^{\text{B-L}} + \boldsymbol{F}_{ij}^{(1)} + \boldsymbol{F}_{ij}^{(2)} + \boldsymbol{F}_{ij}^{(3)}\right), \tag{18.144}$$

其中

$$\boldsymbol{F}_{ij}^{\text{B-L}} = \frac{f_j^{(c)}}{m_i}\frac{\partial f_i^{(c)}}{\partial \boldsymbol{v}_1} - \frac{f_i^{(c)}}{m_j}\frac{\partial f_j^{(c)}}{\partial \boldsymbol{v}_2}, \tag{18.145}$$

$$\boldsymbol{F}_{ij}^{(1)} = \left[\frac{f_j^{(0)}}{m_i}\frac{\partial f_i^{(0)}}{\partial \boldsymbol{v}_1}\right]_c - \left[\frac{f_i^{(0)}}{m_j}\frac{\partial f_j^{(0)}}{\partial \boldsymbol{v}_2}\right]_c, \tag{18.146}$$

$$\boldsymbol{F}_{ij}^{(2)} = \frac{f_j^{(c)}}{m_i}\left[\frac{\partial f_i^{(0)}}{\partial \boldsymbol{v}_1}\right]_c - \frac{f_i^{(c)}}{m_j}\left[\frac{\partial f_j^{(0)}}{\partial \boldsymbol{v}_2}\right]_c, \tag{18.147}$$

$$\boldsymbol{F}_{ij}^{(3)} = \frac{[f_j^{(0)}]_c}{m_i}\frac{\partial f_i^{(c)}}{\partial \boldsymbol{v}_1} - \frac{[f_i^{(0)}]_c}{m_j}\frac{\partial f_j^{(c)}}{\partial \boldsymbol{v}_2}. \tag{18.148}$$

4. 源项 F_{ij} 中的时间慢变部分

源项中除了$\boldsymbol{F}_{ij}^{\text{B-L}}$是完全由(未知的)$f^{(c)}$构成的慢变量外，其他三项都是由(已知的)快变量的时间、空间(对慢变尺度)平均而得到的慢变量. 在本书中，为了便于和已有工作做比较，也采取$f^{(0)}$的函数形式为麦克斯韦分布，

$$f_j^{(0)}(2) = C_2 f_{jM}(u_2^2) \equiv C_2 n_j \frac{1}{\pi^{3/2} v_{jt}^3}\exp\left(-\frac{u_2^2}{v_{jt}^2}\right), \tag{18.149}$$

其中C_2是归一因子，$v_{jt}^2 = 2T_j/m_j$是热速度，而

$$\boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_{02}\sin\theta, \quad \theta \equiv \theta(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{k}_0\cdot\boldsymbol{r} - \omega_0 t.$$

上式中的 θ 是时、空依赖的快变参量，而 $\boldsymbol{v}_{02}=q_j\boldsymbol{E}_0/m_j\omega_0$.

下面来给出 $\boldsymbol{F}_{ij}^{(m)}$，$m=1,2,3$ 中慢变量(即不含 $\theta(\boldsymbol{r},t)$的量)的具体表达式.

(1) $[\boldsymbol{f}^{(0)}(\boldsymbol{v})]_c$

因为

$$\frac{u^2}{v_{jt}^2}=\frac{(\boldsymbol{v}_2+\boldsymbol{v}_{02}\sin\theta)^2}{v_{jt}^2}=x_2^2+b_2+a_2\sin\theta-b_2\cos 2\theta,$$

其中

$$x_2=\frac{v_2}{v_{jt}},\quad a_2=\frac{2\,\boldsymbol{v}_2\cdot\boldsymbol{v}_{02}}{v_{jt}^2},\quad b_2=\frac{1}{2}\frac{v_{02}^2}{v_{jt}^2},$$

所以有

$$f_j^{(0)}(2)=C_2 f_{jM}(v_j^2)\exp[-b_2-a_2\sin\theta+b_2\cos 2\theta],$$

其中 $f_{jM}(v_j^2)$是 j 种粒子的麦克斯韦分布. 而含 $\theta(\boldsymbol{r},t)$的时、空快变部分，利用虚宗量贝塞尔函数$\{\mathrm{I}_n(z)\}$的展开式可写成

$$\exp[-a_2\sin\theta+b_2\cos 2\theta]=\sum_{n,m=-\infty}^{\infty}\mathrm{i}^n\mathrm{I}_n(a_2)\mathrm{I}_m(b_2)\exp[\mathrm{i}(n+2m)\theta].$$

上式中包括了从零频(时、空无关)到所有高阶谐波(时、空快速变化)的成分，只有 $n=-2m$ 的分量(即零频分量)才是我们需要的时、空慢变量. 所以有

$$[f_j^{(0)}(2)]_c=C_2 f_{jM}(v_2^2)\exp(-b_2)\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n\mathrm{I}_{2n}(a_2)\mathrm{I}_n(b_2).$$

上式还没有归一化，如果要求

$$\int[f_j^{(0)}]_c\mathrm{d}\boldsymbol{v}_2=1, \tag{18.150}$$

则将前一式代入上式，直接积分会发现 $C_2=\exp(2b_2)$. 于是最后可得归一化后的

$$[f_j^{(0)}(2)]_c=f_{jM}(v_2^2)\exp(b_2)\times\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n\mathrm{I}_{2n}(a_2)\mathrm{I}_n(b_2), \tag{18.151}$$

$$[f_i^{(0)}(1)]_c=f_{iM}(v_1^2)\exp(b_1)\times\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n\mathrm{I}_{2n}(a_1)\mathrm{I}_n(b_1). \tag{18.152}$$

(2) $\left[\dfrac{\partial f^{(0)}(\boldsymbol{v})}{\partial\boldsymbol{v}}\right]_c$

利用

$$\frac{\partial f^{(0)}(\boldsymbol{v})}{\partial\boldsymbol{v}}=-\frac{2}{v_t^2}\boldsymbol{u}f_{\mathrm{M}}^{(0)}(u^2),$$

有

$$\frac{\partial f_i^{(0)}(\boldsymbol{v}_1)}{\partial\boldsymbol{v}_1}=-\frac{2}{v_{it}^2}f_{iM}(v_1^2)\mathrm{e}^{b_1}[\boldsymbol{v}_1\exp(-a_1\sin\theta+b_1\cos 2\theta)+\boldsymbol{v}_{01}\sin\theta\exp(-a_1\sin\theta+b_1\cos 2\theta)].$$

同样，在用虚宗量贝塞尔函数作展开，并选取零频慢变量后，可得

$$\left[\frac{\partial f_i^{(0)}(1)}{\partial\boldsymbol{v}_1}\right]_c=-\frac{2}{v_{it}^2}f_{iM}(v_1^2)\mathrm{e}^{b_1}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n[\boldsymbol{v}_1\mathrm{I}_{2n}(a_1)-\boldsymbol{v}_{01}\mathrm{I}_{2n}'(a_1)]\mathrm{I}_n(b_1), \tag{18.153}$$

$$\left[\frac{\partial f_i^{(0)}(2)}{\partial\boldsymbol{v}_2}\right]_c=-\frac{2}{v_{jt}^2}f_{jM}(v_2^2)\mathrm{e}^{b_2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n[\boldsymbol{v}_2\mathrm{I}_{2n}(a_2)-\boldsymbol{v}_{02}\mathrm{I}_{2n}'(a_2)]\mathrm{I}_n(b_2). \tag{18.154}$$

(3) $\left[f^{(0)}\dfrac{\partial f^{(0)}}{\partial\boldsymbol{v}}\right]_c$

此项的慢变部分可以有两种形式：

(i) 由$[f^{(0)}]_c$及$\left[\dfrac{\partial f^{(0)}}{\partial\boldsymbol{v}}\right]_c$两个慢变量简单相乘而构成的

$$[f^{(0)}]_c\left[\frac{\partial f^{(0)}}{\partial\boldsymbol{v}}\right]_c.$$

这时，$[f^{(0)}]_c$与$\left[\dfrac{\partial f^{(0)}}{\partial\boldsymbol{v}}\right]_c$仍然是两个独立的函数，故完全可以套用从 BBGKY 头两个方程组导出 Balescu-Lenard 方程时同样的求解过程(见参考文献[21]，82 页). 即可以将

$$\boldsymbol{F}_{ij}^{(1)} = \frac{1}{m_j}[f_i^{(0)}(\boldsymbol{v}_1)]_c\left[\frac{\partial f_j^{(0)}(\boldsymbol{v}_2)}{\partial \boldsymbol{v}_2}\right]_c - \frac{1}{m_i}[f_j^{(0)}(\boldsymbol{v}_2)]_c\left[\frac{\partial f_i^{(0)}}{\partial \boldsymbol{v}_1}\right]_c \tag{18.155}$$

直接代入碰撞流的最后表达式

$$\boldsymbol{J}_i^{(1)} = m_i\sum_j n_j\int \mathscr{Q}_{ij}(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2)\cdot \boldsymbol{F}_{ij}^{(1)}\mathrm{d}\boldsymbol{v}_2.$$

根据前面已经给出的每项表达式，可以直接得出

$$\boldsymbol{F}_{ij}^{(1)} = -\frac{2}{m_i}f_{iM}(v_1^2)f_{jM}(v_2^2)\exp(b)\boldsymbol{d}_{ij}(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_{01},\boldsymbol{v}_{02}), \tag{18.156}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{d}_{ij} = \frac{1}{v_{it}}\sum_{n,m=-\infty}^{\infty}(-1)^{n+m}\Bigg[&\left(\boldsymbol{x}_1 - \frac{m_i v_{it}}{m_j v_{jt}}\boldsymbol{x}_2\right)\mathrm{I}_{2n}(a_1)\mathrm{I}_{2m}(a_2)\\ &-\left(\boldsymbol{x}_{01}\mathrm{I}_{2n}'(a_1)\mathrm{I}_{2m}(a_2) - \frac{m_i v_{it}}{m_j v_{jt}}\boldsymbol{x}_{02}\mathrm{I}_{2n}(a_1)\mathrm{I}_{2m}'(a_2)\right)\Bigg]\\ &\times \mathrm{I}_n(b_1)\mathrm{I}_m(b_2),\end{aligned} \tag{18.157}$$

其中 $a=a_1+a_2, b=b_1+b_2$.

(ii) 由 $f^{(0)}$ 和 $\frac{\partial f^{(0)}}{\partial \boldsymbol{v}}$ 先相乘，后取零频部分. 结果是

$$\begin{aligned}&\left[f_i^{(0)}(\boldsymbol{v}_1)\frac{\partial f_j^{(0)}(\boldsymbol{v}_2)}{\partial \boldsymbol{v}_2}\right]_c\\ &= -\frac{2}{v_{jt}^2}f_{iM}(v_1^2)f_{jM}(v_2^2)\mathrm{e}^b\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n[\boldsymbol{v}_2\mathrm{I}_{2n}(a) - \boldsymbol{v}_{02}\mathrm{I}_{2n}']\mathrm{I}_n(b).\end{aligned} \tag{18.158}$$

而相应的源项为

$$\boldsymbol{F}_{ij}^{(1)'} = -\frac{2}{m_i}f_{iM}(v_1^2)f_{jM}(v_2^2)\mathrm{e}^b\boldsymbol{d}_{ij}'(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_{01},\boldsymbol{v}_{02}), \tag{18.159}$$

$$\boldsymbol{d}_{ij}' = \frac{1}{v_{it}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n\Bigg[\left(\boldsymbol{x}_1 - \frac{m_i v_{it}}{m_j v_{jt}}\boldsymbol{x}_2\right)\mathrm{I}_{2n}(a) \tag{18.160}$$

$$-\left(\boldsymbol{x}_{01} - \frac{m_i v_{it}}{m_j v_{jt}}\boldsymbol{x}_{02}\right)\mathrm{I}_{2n}'\Bigg]\mathrm{I}_n(b). \tag{18.161}$$

18.7.3 碰撞流和激光碰撞吸收频率的定义式

1. Balescu-Lenard 型的碰撞流

这里采用 Dupree 的从 BBGKY 头两个方程导出 Balescu-Lenard 方程的方法[21]，给出来自经典(Balescu-Lenard)源项和激光场源项的碰撞流

$$\boldsymbol{J}_i = m_i\sum_j n_j\int \overset{\leftrightarrow}{Q}_{ij}(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2)\cdot(\boldsymbol{F}_{ij}^{\text{B-L}} + \boldsymbol{F}_{ij}^{(1)})\mathrm{d}\boldsymbol{v}_2, \tag{18.162}$$

$$\overset{\leftrightarrow}{Q}_{ij} = -\int\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{k}_1}{k_1^5}\frac{\boldsymbol{k}_1\boldsymbol{k}_1}{m_i^2}\frac{2q_i^2q_j^2}{|D(1)|^2}\delta[\boldsymbol{e}_{k_1}\cdot(\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_2)], \quad \boldsymbol{e}_{k_1} = \frac{\boldsymbol{k}_1}{k_1}, \tag{18.163}$$

其中

$$D(1) \equiv D(\omega_1,\boldsymbol{k}_1) = 1 + \sum_j\chi_j, \quad \chi_j = \frac{\omega_{pj}^2}{k_1^2}\int\frac{\boldsymbol{k}_1\cdot\partial f_j/\partial\boldsymbol{v}}{\omega_1 - \boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{v}}\mathrm{d}\boldsymbol{v}.$$

对于经典情况，取 $f_j=f_{jM}$，若在对 k_1 的积分中取上限 $k_{\max}=1/r_{\min}=k_BT_j/q_j^2$，并忽略波-粒子间的相互作用，则有

$$\overset{\leftrightarrow}{Q}_{ij}^{\text{B-L}} = \frac{2\pi q_i^2q_j^2}{m_i^2}\frac{g^2\overset{\leftrightarrow}{I} - \boldsymbol{g}\boldsymbol{g}}{g^3}\ln\Lambda_c \quad \left(\Lambda_c = \frac{\lambda_D}{r_{\min}}\right)$$

$$= -\frac{\Gamma_{ij}}{2n_j}\frac{\partial^2 g}{\partial\boldsymbol{v}_1\partial\boldsymbol{v}_1}, \quad \Gamma_{ij} = \frac{4\pi n_jq_i^2q_j^2}{m_i^2}\ln\Lambda_c,$$

其中 $g=|\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_2|$ 是相对速度. 将上式代入积分，就得出 Balescu-Lenard(方程对应的)流

$$\boldsymbol{J}_i^{\text{B-L}} = \frac{m_i}{2}\sum_j\Gamma_{ij}\int\mathrm{d}\boldsymbol{v}_2\frac{\partial^2 g}{\partial\boldsymbol{v}_1\partial\boldsymbol{v}_1}\cdot\boldsymbol{F}_{ij}^{\text{B-L}}\mathrm{d}\boldsymbol{v}_2.$$

对于有外激光场的情况，可取 $f_j(\boldsymbol{v}_2)=[f_j(\boldsymbol{u}_2)]_c$；在和前面相同的近似下所得的结果，除了将经典的 Λ_c 改换成激光场中的 Λ_0 外，和上式相同. 而

$$\ln\Lambda_0 = \frac{1}{2}\ln\left(1 + \frac{\lambda_D^2}{r_{\min}^2(1+x_{0e}^2)}\right), \tag{18.164}$$

其中 $x_{0e}=v_{0e}/v_{et}$是电子的抖动速度与其热速度之比. 当激光场(因而 x_{et})趋于零时,$\ln\Lambda_0\to\ln\Lambda_c$;而在另一个极限($x_{0e}\gg1$)下,$\ln\Lambda\approx\ln\Lambda_c-\ln x_{0e}$. 在本文讨论的激光强度范围中($10^{13}$ W/cm$^2<I<10^{17}$W/cm^2),$0.03<x_{0e}<3$,所以 $\Lambda_0\approx\Lambda_c$.

2. 激光碰撞吸收频率 ν 的定义

在空间均匀的等离子体中,一阶慢变的 $f_i^{(c)}$ 满足的动理学方程(18.141)—(18.142)式可简化成

$$\frac{\partial f_i^{(c)}(\boldsymbol{v}_1)}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{v}_1}\cdot\boldsymbol{J}_i(\boldsymbol{v}_1).$$

其二阶矩为

$$\int\frac{1}{2}n_em_ev_1^2\frac{\partial f_i^{(c)}(\boldsymbol{v}_1)}{\partial t}\mathrm{d}\boldsymbol{v}_1=\int\frac{1}{2}n_em_ev_1^2\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{v}_1}\cdot\boldsymbol{J}_i(\boldsymbol{v}_1)\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_1,$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathscr{E}_e=-\frac{1}{2}n_em_e\left(v_1^2\boldsymbol{J}_i(\boldsymbol{v}_1)\Big|_{-\infty}^{+\infty}-\int2\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{J}_i(\boldsymbol{v}_1)\mathrm{d}\boldsymbol{v}_1\right)$$

$$=n_em_e\int\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{J}_i(\boldsymbol{v})\mathrm{d}\boldsymbol{v}.$$

上式中的 $\mathscr{E}_e$ 就是电子因碰撞而得到的动能.

另一方面,激光场因逆韧致辐射(碰撞)而阻尼. 设其能量的阻尼率为 ν,则有

$$\mathscr{E}(t)=\mathscr{E}(0)\exp(-\nu t),\quad\mathscr{E}(0)=\frac{E_0^2}{8\pi},$$

其中 $\mathscr{E}(0)$是激光的初始能量. 相应的单位时间内激光能量的被吸收率是

$$\frac{\mathrm{d}\mathscr{E}(t)}{\mathrm{d}t}=-\nu\mathscr{E}(t).$$

由于在单位时间内激光失去的能量就是单位时间内电子得到的能量,所以有

$$\nu\mathscr{E}(t)=\frac{\mathrm{d}\mathscr{E}_e}{\mathrm{d}t}.$$

由此可最后得到激光能量的等效碰撞吸收频率

$$\nu=\frac{8\pi n_em_e}{E_0^2}\int\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{J}_i(\boldsymbol{v})\mathrm{d}\boldsymbol{v}.\tag{18.165}$$

上式在激光场 $E_0\to0$ 时不适用. 但在本文讨论的激光强度范围内(10^{13} W/cm$^2<I<10^{17}$ W/cm^2),上式是合适的.

当激光场 $E_0\neq0$ 时,还可以从激光的碰撞吸收频率 ν 转换成等效的电子-离子碰撞频率[22]

$$\nu_{ei}=\frac{\omega_0^2}{\omega_{pe}^2}\nu.\tag{18.166}$$

18.7.4 $\boldsymbol{F}_{ij}^{(1)}$对应的激光碰撞吸收频率 ν

1. 出发公式

将

$$\boldsymbol{J}_i^{(1)}=-\frac{m_i}{2}\sum_jn_j\int\mathrm{d}\boldsymbol{v}_2\frac{\partial^2g}{\partial\boldsymbol{v}_1\partial\boldsymbol{v}_1}\cdot\boldsymbol{F}_{ij}^{(1)},$$

$$\boldsymbol{F}_{ij}^{(1)}=-\frac{2}{m_i}f_{iM}(v_1^2)f_{jM}(v_2^2)\mathrm{e}^b\boldsymbol{d}_{ij},$$

代入(18.165)式,可得

$$\nu^{(1)}=\frac{8\pi n_em_e}{E_0^2}\int\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{J}_i(\boldsymbol{v}_1)\mathrm{d}\boldsymbol{v}_1$$

$$=\frac{8\pi n_em_e}{E_0^2}\mathrm{e}^b\sum_j\Gamma_{ij}\int\mathrm{d}\boldsymbol{v}_1f_{iM}(v_1^2)\int\mathrm{d}\boldsymbol{v}_2f_{jM}(v_2^2)\,\boldsymbol{v}_1\cdot\frac{\partial^2g}{\partial\boldsymbol{v}_1\partial\boldsymbol{v}_1}\cdot\boldsymbol{d}_{ij},$$

其中

$$\boldsymbol{v}_1\cdot\frac{\partial^2g}{\partial\boldsymbol{v}_1\partial\boldsymbol{v}_1}\cdot\boldsymbol{d}_{ij}=v_1\frac{\partial^2g}{\partial v_1^2}\boldsymbol{e}_{v_1}\cdot\boldsymbol{d}_{ij}=v_1\frac{2}{g}\boldsymbol{e}_{v_1}\cdot\boldsymbol{d}_{ij}.$$

所以有

$$\int\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{J}_i(\boldsymbol{v}_1)\mathrm{d}\boldsymbol{v}_1=2\mathrm{e}^b\sum_j\Gamma_{ij}\int\mathrm{d}\boldsymbol{v}_1f_{iM}(v_1^2)v_1\int\mathrm{d}\boldsymbol{v}_2f_{jM}(v_2^2)\frac{1}{g}\boldsymbol{e}_{v_1}\cdot\boldsymbol{d}_{ij}.$$

在进行积分前,先要化简 $\boldsymbol{e}_{v_1}\cdot\boldsymbol{d}_{ij}$:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{e}_{v_1}\cdot\boldsymbol{d}_{ij} &= \boldsymbol{e}_{v_1}\cdot\frac{1}{v_{it}}\sum_{n,m=-\infty}^{\infty}(-1)^{n+m}[(\boldsymbol{x}_1 - r_{ij}\boldsymbol{x}_2)\mathrm{I}_{2n}(a_1)\mathrm{I}_{2m}(a_2)\\ &\quad -(\boldsymbol{x}_{01}\mathrm{I}'_{2n}(a_1)\mathrm{I}_{2m}(a_2)\\ &\quad - r_{ij}\boldsymbol{x}_{02}\mathrm{I}_{2n}(a_1)\mathrm{I}'_{2m}(a_2))]\mathrm{I}_n(b_1)\mathrm{I}_m(b_2)\\ &= \frac{1}{v_{it}}\sum_{n,m=-\infty}^{\infty}(-1)^{n+m}[(x_1 - r_{ij}x_2\cos\theta_{12})\mathrm{I}_{2n}(a_1)\mathrm{I}_{2m}(a_2)\\ &\quad -(x_{01}\cos\theta_{01}\mathrm{I}'_{2n}(a_1)\mathrm{I}_{2m}(a_2)\\ &\quad - r_{ij}(x_{02}\cos\theta_{01}\mathrm{I}_{2n}(a_1)\mathrm{I}'_{2m}(a_2))]\mathrm{I}_n(b_1)\mathrm{I}_m(b_2),\end{aligned}$$

其中 $\theta_{12}=\boldsymbol{e}_{v_1}\cdot\boldsymbol{e}_{v_2}$，而 $\theta_{01}=\boldsymbol{e}_{v_1}\cdot\boldsymbol{e}_{v_0}=\theta_{02}$（$\boldsymbol{x}_{01},\boldsymbol{x}_{02}$都在 $\boldsymbol{E}_0$ 方向）. 为了能解析地完成两重积分，只计算电子-离子间的碰撞（电子-电子间碰撞因为同时存在上面的两个夹角，无论取什么样的坐标系都难以解析地完成二重积分）. 令 $i=\mathrm{e}$（电子），$j=\mathrm{p}$（离子，例如为简单取成质子），则

$$x_{02}=\frac{v_{0\mathrm{p}}}{v_{\mathrm{pt}}}=\frac{eE_0}{m_{\mathrm{p}}\omega_0}\sqrt{\frac{m_{\mathrm{p}}}{T_{\mathrm{p}}}},\quad x_{01}=\frac{v_{0\mathrm{e}}}{v_{\mathrm{et}}}=\frac{eE_0}{m_{\mathrm{e}}\omega_0}\sqrt{\frac{m_{\mathrm{e}}}{T_{\mathrm{e}}}},$$

$$\Rightarrow\quad \frac{x_{02}}{x_{01}}=\sqrt{\frac{m_{\mathrm{e}}T_{\mathrm{e}}}{m_{\mathrm{p}}T_{\mathrm{p}}}}\ll 1,$$

故可以在下面的计算中取 $x_{02}\sim 0$. 于是有

$$a_2 = 2x_2x_{02}\cos\theta_{02}\sim 0,\quad b_2=\frac{1}{2}x_{02}^2\sim 0. \qquad (18.167)$$

并且因为 $\mathrm{I}_m(0)=\begin{cases}1 & (m=0),\\ 0 & (m\neq 0),\end{cases}$ 在对 m 的求和中只剩下 $m=0$ 的项. 在作了以上近似后，有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{e}_{v_1}\cdot\boldsymbol{d}_{ij} &= \frac{1}{v_{it}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n[(x_1 - r_{\mathrm{ep}}x_2\cos\theta_{12})\mathrm{I}_{2n}(a_1)\\ &\quad - x_{01}\cos\theta_{01}\mathrm{I}'_{2n}(a_1)]\mathrm{I}_n(b_1). \qquad (18.168)\end{aligned}$$

其中已没有了 θ_{02}，故可以取以 $\boldsymbol{v}_1$ 为对称轴的球坐标来进行积分.

2. 完成积分 $\int \mathrm{d}\boldsymbol{v}_2\cdots$ 和 $\int \mathrm{d}\boldsymbol{v}_1\cdots$

利用(18.168)式，

$$\begin{aligned}&\int \mathrm{d}\boldsymbol{v}_2 f_{jM}(v_2^2)\frac{1}{g}\boldsymbol{e}_{v_1}\cdot\boldsymbol{d}_{ij}\\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}\,v_{\mathrm{et}}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n\mathrm{I}_n(b_1)\int \mathrm{d}x_2 x_2^2\mathrm{e}^{-x_2^2}\\ &\quad\times\left[(x_1\mathrm{I}_{2n}(a_1) - x_{01}\cos\theta_{01}\mathrm{I}'_{2n}(a_1))\int \mathrm{d}\theta_{12}\frac{\sin\theta_{12}}{g}r_{\mathrm{ep}}\mathrm{I}_{2n}(a_1)x_2\right.\\ &\quad\left.\times\int \mathrm{d}\theta_{12}\sin\theta_{12}\frac{\cos\theta_{12}}{g}\right].\end{aligned}$$

上述积分可以解析完成，最后得

$$\begin{aligned}&\int \mathrm{d}\boldsymbol{v}_2 f_{jM}(v_2^2)\frac{1}{g}\boldsymbol{e}_{v_1}\cdot\boldsymbol{d}_{ij}\\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}\,v_{\mathrm{et}}v_{\mathrm{pt}}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n\mathrm{I}_n(b_1)\\ &\quad\times\left[\frac{\sqrt{\pi}}{4}\left(\frac{1}{M}-\frac{r_{\mathrm{ep}}}{M^2}\frac{1}{x_1^2}\right)\mathrm{I}_{2n}(a_1)\mathrm{erf}(x_{1\mathrm{c}})\right.\\ &\quad + \frac{1}{6}\frac{r_{\mathrm{ep}}}{M}\frac{1}{x_1}\mathrm{I}_{2n}(a_1)\mathrm{e}^{-x_{1\mathrm{c}}^2} + \frac{1}{2}x_{01}\mathrm{I}'_{2n}(a_1)\mathrm{e}^{-x_{1\mathrm{c}}^2}\cos\theta_{01}\\ &\quad\left. - \frac{\sqrt{\pi}}{4}\frac{x_{01}}{M}\frac{1}{x_1}\mathrm{I}'_{2n}(a_1)\mathrm{erf}(x_{1\mathrm{c}})\cos\theta_{01}\right],\end{aligned}$$

其中

$$x_{1\mathrm{c}} = Mx_1,\quad M=\sqrt{\frac{m_{\mathrm{p}}}{m_{\mathrm{e}}}\frac{T_{\mathrm{e}}}{T_{\mathrm{p}}}}\approx\sqrt{\frac{m_{\mathrm{p}}}{m_{\mathrm{e}}}},\quad r_{\mathrm{ep}}=\sqrt{\frac{m_{\mathrm{e}}}{m_{\mathrm{p}}}\frac{T_{\mathrm{e}}}{T_{\mathrm{p}}}},$$

而误差函数

$$\mathrm{erf}(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x\exp(-y^2)\mathrm{d}y.$$

在接下来对 $\int \mathrm{d}\boldsymbol{v}_1$ 的积分时，首先将求和作一改变

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\cdots\rightarrow\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon_n\cdots,\quad \varepsilon_n=\begin{cases}1 & (n=0),\\ 2 & (n=1,2,\cdots).\end{cases}$$

于是

$$\int \mathrm{d}\boldsymbol{v}_1 f_{iM}(\boldsymbol{v}_1)\,\boldsymbol{v}_1 \int \mathrm{d}\boldsymbol{v}_2 f_{jM}(v_2^2)\,\frac{1}{g}\boldsymbol{e}_{v_1}\cdot\boldsymbol{d}_{ij}$$

$$= \frac{4}{\pi v_{\mathrm{pt}}}\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon_n(-1)^n \mathrm{I}_n(b_1)\int x_1^3\exp(-x_1^2)\mathrm{d}x_1$$

$$\times\left\{\left[\frac{\sqrt{\pi}}{4}\left(\frac{1}{M}-\frac{r_{\mathrm{ep}}}{M^2}\frac{1}{x_1^2}\right)\mathrm{erf}(Mx_1)\right.\right.$$

$$\left.+\frac{1}{6}\frac{r_{\mathrm{ep}}}{M}\frac{1}{x_1}\exp(-x_{1c}^2)\right]\int \mathrm{I}_{2n}(2x_{01}x_1\cos\theta_{01})\sin\theta_{01}\mathrm{d}\theta_{01}$$

$$+\left[\frac{1}{2}x_{01}\exp(-x_{1c}^2)-\frac{\sqrt{\pi}}{4}\frac{x_{01}}{Mx_1}\mathrm{erf}(x_{1c})\right]$$

$$\left.\times\int I_{2n}'(2x_{01}x_1\cos\theta_{01})\cos\theta_{01}\sin\theta_{01}\mathrm{d}\theta_{01}\right\},$$

其中

$$\int \mathrm{I}_{2n}(2x_{01}x_1\cos\theta_{01})\sin\theta_{01}\mathrm{d}\theta_{01} = \frac{2}{x_{01}x_1}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \mathrm{I}_{2n+2k+1}(2x_{01}x_1),$$

$$\int \mathrm{I}_{2n}'(2x_{01}x_1\cos\theta_{01})\cos\theta_{01}\sin\theta_{01}\mathrm{d}\theta_{01}$$

$$= \frac{1}{x_{01}x_1}\mathrm{I}_{2n}(2x_{01}x_1) - \frac{1}{x_{01}^2x_1^2}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\mathrm{I}_{2n+2k+1}(2x_{01}x_1).$$

考虑到 $M\gg1$，可在对 x_1 积分中取 $\mathrm{erf}(Mx_1)\sim1$，则积分可以解析求出

$$\int \mathrm{d}\boldsymbol{v}_1 f_{iM}(\boldsymbol{v}_1)\,\boldsymbol{v}_1 \int \mathrm{d}\boldsymbol{v}_2 f_{jM}(v_2^2)\,\frac{1}{g}\boldsymbol{e}_{v_1}\cdot\boldsymbol{d}_{ij}$$

$$\approx \frac{4}{\pi v_{\mathrm{pt}}}\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon_n(-1)^n\mathrm{I}_n(b_1)\left\{\frac{\pi}{8}\frac{1}{Mx_{01}}\mathrm{e}^{-b_1}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\right.$$

$$\times\left[(1-2n-2k)\mathrm{I}_{n+k+\frac{1}{2}}(b_1)-2b_1(\mathrm{I}_{n+k+\frac{1}{2}}(b_1)\right.$$

$$\left.-\mathrm{I}_{n+k-\frac{1}{2}}(b_1))\right]-\frac{\pi}{16}\frac{x_{01}}{M}\mathrm{e}^{-b_1}[\mathrm{I}_{n-1/2}(b_1)-\mathrm{I}_{n+1/2}(b_1)]$$

$$-\frac{\sqrt{\pi}}{8}\frac{1}{M^3}\mathrm{e}^{-b_1/M^2}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k[\mathrm{I}_{n+k}(b_1/M^2)$$

$$-\mathrm{I}_{n+k+1}(b_1/M^2)]-\frac{\sqrt{\pi}}{4M}\mathrm{e}^{-b_1/M^2}\left[\left(n-\frac{1}{2M^2}\right)\mathrm{I}_n(b_1/M^2)\right.$$

$$\left.\left.+\frac{b_1}{M^2}(\mathrm{I}_n(b_1/M^2)-\mathrm{I}_{n-1}(b_1/M^2))\right]\right\}. \tag{18.169}$$

3. 激光吸收频率 $\nu^{(1)}$ 和电子-离子碰撞频率 ν_{ep}

在只考虑电子-离子碰撞时，激光的被吸收频率（速率）可写作

$$\nu^{(1)} = \frac{8\pi}{E_0^2}n_{\mathrm{e}}m_{\mathrm{e}}\int \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{J}_{\mathrm{e}}\mathrm{d}\boldsymbol{v}$$

$$= \frac{8\pi}{E_0^2}n_{\mathrm{e}}m_{\mathrm{e}}2\mathrm{e}^{b_1}\Gamma_{\mathrm{ep}}\int\mathrm{d}\boldsymbol{v}f_{\mathrm{eM}}(v^2)v\int\mathrm{d}\boldsymbol{v}_2f_{\mathrm{pM}}(v_2^2)\,\frac{1}{g}\boldsymbol{e}_v\cdot\boldsymbol{d}_{\mathrm{ep}}$$

$$= \frac{\omega_{\mathrm{pe}}^2}{\omega_0^2}\frac{\omega_{\mathrm{pe}}}{\pi}\frac{v_{\mathrm{et}}}{n_{\mathrm{e}}\lambda_{\mathrm{De}}^3}\left(\frac{v_{\mathrm{et}}}{v_{0\mathrm{e}}}\right)^2\ln\Lambda_0\mathrm{e}^{b_1}\int\mathrm{d}\boldsymbol{v}f_{\mathrm{eM}}(v^2)v\int\mathrm{d}\boldsymbol{v}_2f_{\mathrm{pM}}(v_2^2)\,\frac{1}{g}\boldsymbol{e}_v\cdot\boldsymbol{d}_{\mathrm{ep}}$$

$$= \frac{\omega_{\mathrm{pe}}^2}{\omega_0^2}\frac{4\omega_{\mathrm{pe}}}{\pi^2}\frac{M}{n_{\mathrm{e}}\lambda_{\mathrm{De}}^3}\frac{1}{x_{0\mathrm{e}}^2}\ln\Lambda_0\mathrm{e}^{b_1}\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon_n(-1)^n\mathrm{I}_n(b_1)$$

$$\times\left\{\frac{\pi}{8}\frac{1}{Mx_{0\mathrm{e}}}\mathrm{e}^{-b_1}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left[(1-2n-2k)\mathrm{I}_{n+k+\frac{1}{2}}(b_1)\right.\right.$$

$$\left.-2b_1(\mathrm{I}_{n+k+\frac{1}{2}}(b_1)-\mathrm{I}_{n+k-\frac{1}{2}}(b_1))\right]$$

$$-\frac{\pi}{16}\frac{x_{0\mathrm{e}}}{M}\mathrm{e}^{-b_1}[\mathrm{I}_{n-1/2}(b_1)-\mathrm{I}_{n+1/2}(b_1)]-\frac{\sqrt{\pi}}{8}\frac{1}{M^3}\mathrm{e}^{-b_1/M^2}$$

$$\times\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k[\mathrm{I}_{n+k}(b_1/M^2)-\mathrm{I}_{n+k+1}(b_1/M^2)]$$

$$-\frac{\sqrt{\pi}}{4M}\mathrm{e}^{-b_1/M^2}\left[\left(n-\frac{1}{2M^2}\right)\mathrm{I}_n(b_1/M^2)\right.$$

$$\left.\left.+\frac{b_1}{M^2}(\mathrm{I}_n(b_1/M^2)-\mathrm{I}_{n-1}(b_1/M^2))\right]\right\}, \tag{18.170}$$

其中 $\ln\Lambda_0$ 由(18.164)式给出．利用(18.166)式，从上式还可以写出等效的电子-离子碰撞频率

$$\frac{\nu_{\mathrm{ep}}}{\omega_{\mathrm{pe}}} = \frac{4}{\pi^2}\frac{M}{n_{\mathrm{e}}\lambda_{\mathrm{De}}^3}\frac{\ln\Lambda_0}{x_{0\mathrm{e}}^2}H(x_{0\mathrm{e}}). \tag{18.171}$$

而 $H(x_{0e})$ 就是前式中的

$$H(x_{0e}) = e^{b_1}\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon_n(-1)^n I_n(b_1)\{\cdots\}. \qquad (18.172)$$

另一方面，如果在(18.168)中令 $x_{0e}(E_0)=0$，则可得不考虑激光影响时(经典情形)的

$$\boldsymbol{e}_{v_1}\cdot\boldsymbol{d}_{ep}^{(c)} = \frac{1}{v_{et}}(x_1 - r_{ep}x_2\cos\theta_{12}).$$

经过同样的计算，可得经典的(电子在和离子碰撞时)电子-离子碰撞频率

$$\frac{\nu_{ep}^{(c)}}{\omega_{pe}} = \frac{1}{\pi^{3/2}}\frac{1}{n_e\lambda_{De}^3}\frac{\ln\Lambda_c}{x_{0e}^2}. \qquad (18.173)$$

结果，考虑了强激光电场对碰撞算子影响后的电子-离子碰撞频率 ν_{ep} 与其经典值 $\nu_{ep}^{(c)}$ 之比为：

$$\frac{\nu_{ep}}{\nu_{ep}^{(c)}} = \frac{\nu^{(1)}}{\nu^{(c)}} = \frac{4M}{\sqrt{\pi}}\frac{\Lambda_0}{\Lambda_c}H(x_{0e}) \approx \frac{4M}{\sqrt{\pi}}H(x_{0e}). \qquad (18.174)$$

上式可以容易地作数值计算，下面的图 18.6 是用软件 Mathematica 得到的. 同时还给出了实验上总结出的吸收效率(它正比于激光的吸收频率 ν)随光强($I\propto x_{0e}^2$)的变化行为[18](图 18.7)，以及 DO 模型[17]的计算结果(图18.8).

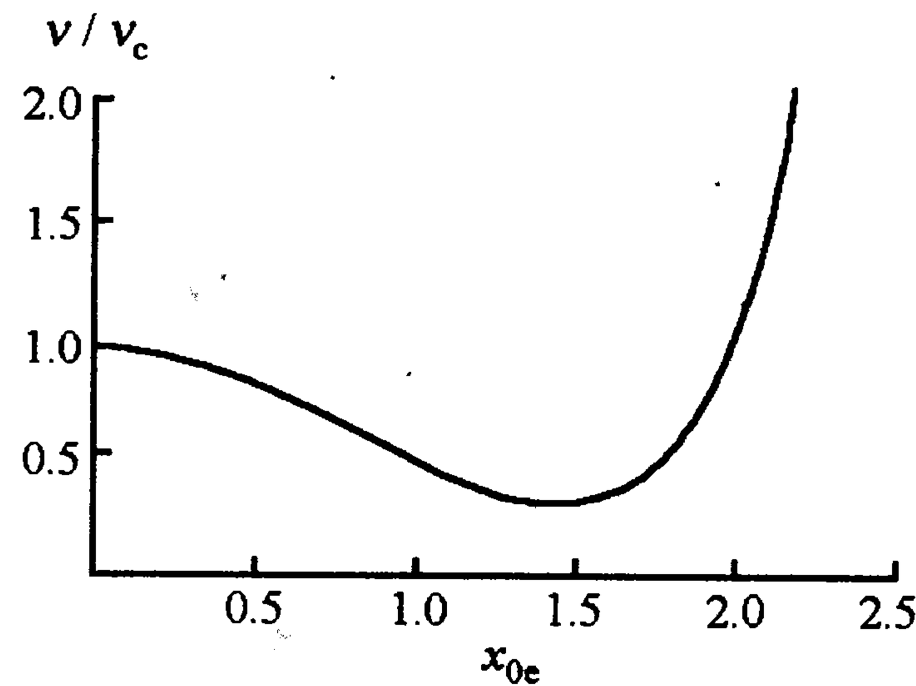


图18.6 电子-离子碰撞频率随激光电场幅度的变化

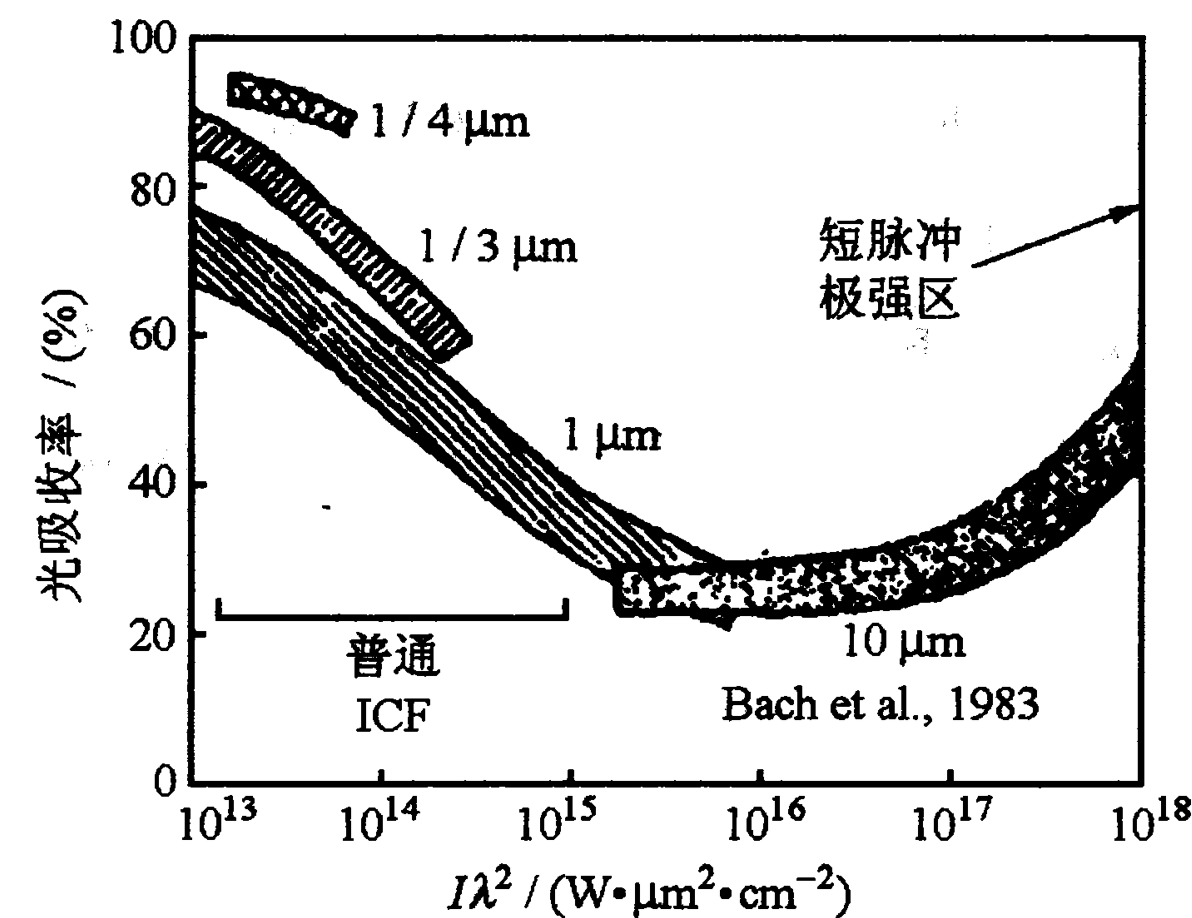


图 18.7 激光吸收效率随激光强度变化的实验图

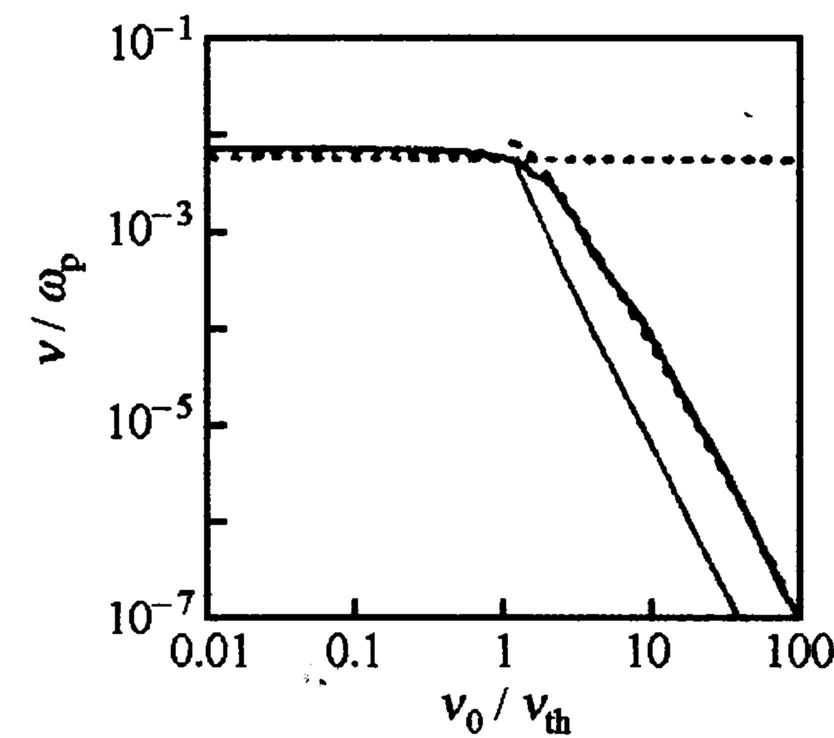


图 18.8 DO 模型下的激光吸收效率随激光电场幅度的变化

可以看出，本节结果在光强较小时($I<3\times10^{13}$ W/cm^2；$x_{0e}<0.05$)和 DO 模型相同(都等于经典的激光吸收频率 $\nu^{(c)}$). 但当光强增大后($I>10^{15}$ W/cm^2；$x_{0e}>0.3$)，本节结果的吸收频率开始明显下降、在 $I\approx3\times10^{16}$ W/cm^2($x_{0e}\approx1.7$)处达到极小，然后随光强迅速上升(在 $I\approx7\times10^{16}$ W/cm^2；$x_{0e}\approx2.5$ 处这个比值达到 6.2). 这以后相对论效应将出现，超出了本节的讨论范围. 这种变化趋势和实验相符，而 DO 模型则要在 $I>10^{16}$ W/cm^2($x_{0e}>1$)后才开始迅速下降，而且没有减缓的趋势.

以前,通常把实验室观察到的吸收效率在 $I>10^{16}$ W/cm^2 时的增大,归于等离子体中的反常(非碰撞,例如波-粒子相互作用)吸收机制. 但从本节的结果来看,考虑了激光光场影响的碰撞(也即逆轫致辐射)吸收仍能(至少)部分地解释实验结果. 把本节结果推广到相对论情况,则能讨论光强 $I>10^{17}$ W/cm^2 范围的激光吸收行为.

参考文献

[1] Martynov G A. Fundamental Theory of Liquids, Method of Distribution Functions. Adam Hilger, Bristol, 1992

[2] Radu Balescu. Statistical Dynamics, Matter out of Equilibrium. 北京:世界图书出版公司,1997. Chapter 4

[3] Dupree T H. Phys. Fluids, **4**(1961)696

[4] Montgomery D C, Tidman D A. Plasma Kinetic Theory. McGraw-Hill Book Company, 1964

[5] 马腾才,胡希伟,陈银华. 等离子体物理原理. 合肥:中国科学技术大学出版社,1988. 55

[6] Balescu R. Equilibrium Physics and Nonequilibrium Statistical Mechanics. Wiley-Interscience, New York, 1975. § 20.6

[7] Montgomery D *et al.* Phys. Fluids, **17**(1974)954

[8] Montgomery D *et al.* Phys. Fluids, **17**(1974)2201

[9] Balescu R. Phys. Fluids, **3**(1960)52

[10] Lenard A. Ann. Phys. (N. Y.), **3**(1960)390

[11] Dupree T H. Phys. Fluids, **4**(1961)696

[12] Montgomery D C, Tidman D A. Plasma Kinetic Theory. McGraw-Hill Book Company, New York, 1964

[13] Hu Xi Wei. Chinese Phys. Lett., **9**(4)(1992)183

[14] Dawson J M, Oberman C. Phys. Fluids, **5**(1961)517

[15] Silin V P. Sov. Phys. JETP, **20**(1965)1510

[16] Klimontovich Yu L. Kinetic Theory of Nonideal Gases and Nonideal Plasmas. Pergamon Press, Oxford, 1982. 169

[17] Decker C D, Mori W B, Dawson J M. Phys. Plasmas, **1**(1994)4043

[18] Max Tabak *et al.* Phys. Plasmas, **1**(1994)1626

[19] Gueney R L. Phys. Fluids, **5**(1962)322

[20] Jackson E A. Phys. Rev., **153**(1967)235

[21] Montgomery D C, Tidman D A. Plasma Kinetic Theory. McGraw-Hill Book Company, New York, 1964

[22] Kruer W L. The Physics of Laser Plasma Interactions. Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1988. 46

附录 A　磁流体的边界和连接条件

在磁流体中所遇到的边界和连接条件有以下四种：磁流体-真空，真空-导体壳，磁流体-磁流体及磁流体-导体壳.

A.1　磁流体-真空

图 A.1 和 A.2 表示在磁流体和真空交界面的上、下所作的小体积元和小面积元积分. 其中，$\boldsymbol{n}$ 表示在界面上某点处，从磁流体中看出去时的界面法线方向；$\boldsymbol{m}$ 则是此处界面的切面和纸面的交线；这 $\boldsymbol{m}, \boldsymbol{n}$ 和纸面的法线方向构成一个直角坐标系. 下面将用符号 ⟦ … ⟧ 表示某个物理量在边界两边的差值(也即此量的跳跃). 下面先写出各连接条件，再给出其证明.

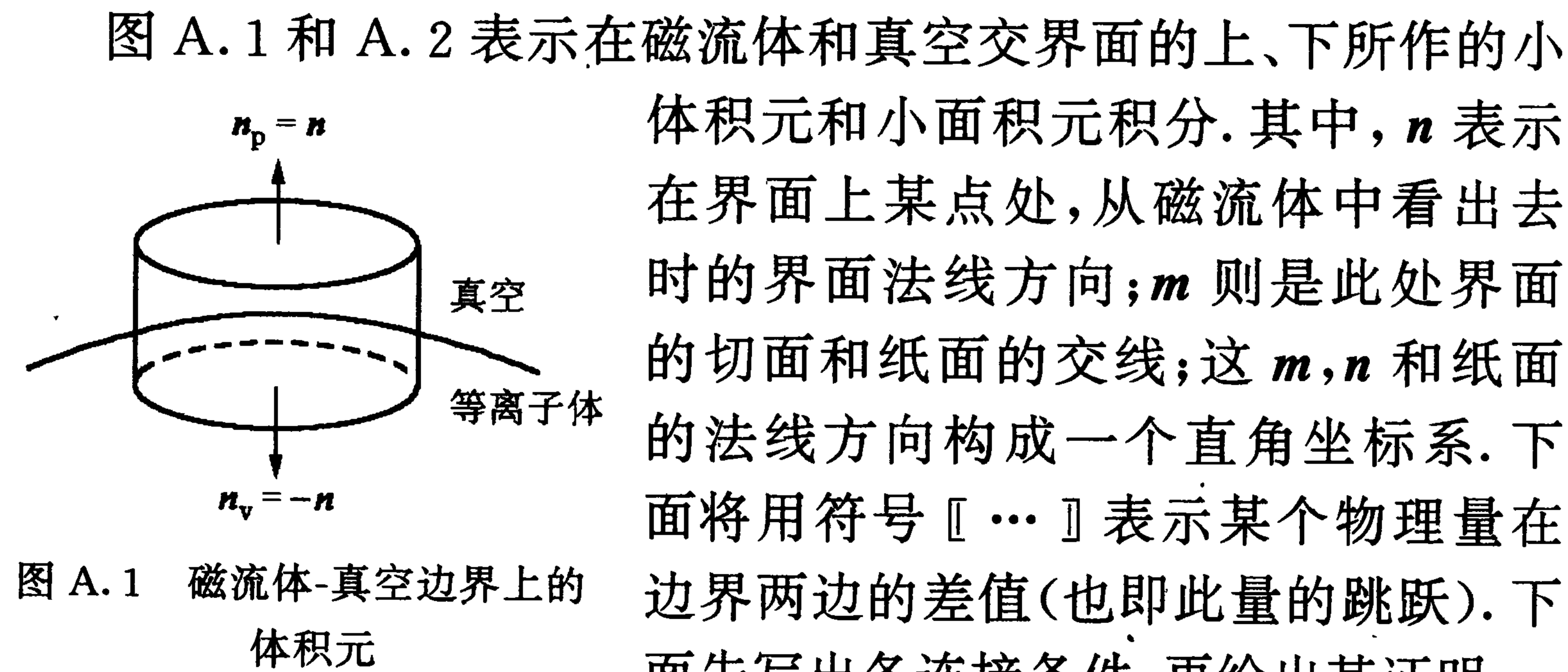


图 A.1　磁流体-真空边界上的体积元

(i) $\boldsymbol{n}⟦\boldsymbol{B}⟧=0$ (来自 $\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$，见图 A.1).

对 $\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$ 作如图小(无限扁)体积元的积分，然后利用高斯定理，即可证.

(ii) $\boldsymbol{n}\times⟦\boldsymbol{B}⟧=\mu\boldsymbol{I}_s$ (来自 $\nabla\times\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{J}$，见图 A.2).

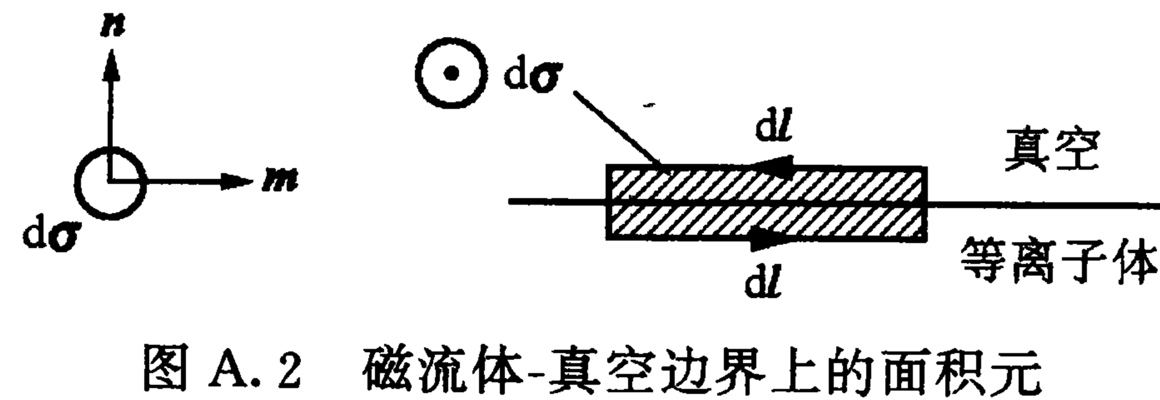


图 A.2　磁流体-真空边界上的面积元

在界面上某点的法线和切线所组成的平面内，作一个跨界线的矩形小(无限扁)面元 $\mathrm{d}\sigma$，进行如下运算：

$$\int \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}\cdot\nabla\times\boldsymbol{B}=\mu\int \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{J},$$

$$\oint \mathrm{d}\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{B}=\mu\int J_s\mathrm{d}\sigma=\mu I_s,$$

$$\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{B}-\boldsymbol{m}\cdot\hat{\boldsymbol{B}}=\mu I_s,$$

其中 I_s 代表经过小面元 $\mathrm{d}\sigma$ 的界面电流，$\hat{\boldsymbol{B}}$ 则是在真空中的磁场值，以区别于在磁流体中的磁场值 $\boldsymbol{B}$. 最后可得

$$\boldsymbol{m}\cdot⟦\boldsymbol{B}⟧=\mu I_s,\ \Longrightarrow\ \boldsymbol{n}\times⟦\boldsymbol{B}⟧=\mu I_s.$$

(iii) $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{B}|_s=\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\hat{\boldsymbol{B}}|_s=0$.

当 $I_s\neq 0$ 时，因为 $\mathrm{d}\sigma\to 0$，故必须有 $J_s\to\infty$. 这时为了使界面上的洛伦兹力不会为无穷大，就要求 $\boldsymbol{J}_s\parallel\boldsymbol{B}$，这就是 $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{B}=0$. 这个条件的成立，使得条件(i)自动成立.

(iv) $⟦P+B^2/2\mu⟧=0$ (平衡方程在界面处的结果).

(v) $\boldsymbol{n}\times⟦\boldsymbol{E}⟧=\boldsymbol{n}\cdot⟦\boldsymbol{u}⟧\boldsymbol{B}$.

在理想磁流体中有

$$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B}=0,$$

所以有

$$\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}+\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B})=0,$$

$$\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}+(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{u}-(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{u})\boldsymbol{B}=0.$$

由于界面就是磁面，故在界面上有 $\boldsymbol{B}\perp\boldsymbol{n}$，即 $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{B}=0$. 于是在界面的磁流体一侧有

$$\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}=(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{u})\boldsymbol{B}.$$

另一方面，在真空中 $\boldsymbol{E}_v=0, \boldsymbol{u}_v=0$. 故上式也可以表示成

$$\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{E}_v)=(\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_v))\boldsymbol{B}.$$

这就是上面给出的条件(v).

A.2　真空-导体壳

在真空中不为零的物理量只有磁场 $\hat{\boldsymbol{B}}$. 另一方面，在导电壳中 $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{u}$ 也都为零，其中的磁场只有切向分量而法向分量为零(磁场不能穿入理想导体). 故有边界条件：

(i) $\boldsymbol{n}\cdot\hat{\boldsymbol{B}}=\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{B}|_{\text{wall}}=0$.

(ii) $\boldsymbol{n}\times[\![\boldsymbol{B}]\!]=\mu\boldsymbol{I}_s$.

其中下标 wall 表示导体壳边界，$\boldsymbol{I}_s$ 是导体壳内表面上的面电流.

A.3　磁流体-磁流体

设两边的磁流体分别标以"1"和"2"，则可以用在"磁流体-真空"(见 A.1)中相同的方法给出以下连接条件：

$$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{B}_1=\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{B}_2=0,$$
$$\boldsymbol{n}\times[\![\boldsymbol{B}]\!]=\mu I_s,$$
$$[\![P+B^2/2\mu]\!]=0,$$
$$\boldsymbol{n}\times[\![\boldsymbol{E}]\!]=0,$$
$$\boldsymbol{n}\cdot[\![\boldsymbol{u}]\!]=0.$$

其中第四个条件的证明如下：对 $\nabla\times\boldsymbol{E}=-\partial\boldsymbol{B}/\partial t$，作面积分 $\int\mathrm{d}\sigma\cdots$，这时方程的左面就是 $\boldsymbol{n}\times[\![\boldsymbol{E}]\!]$；而在 $\mathrm{d}\sigma\to0$ 时右面为零($\partial\boldsymbol{B}/\partial t$ 总是取有限值).

A.4　磁流体-导电壳

这时边条件很明显为：

(i) $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{B}=\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{B}|_{\text{wall}}=0$.

(ii) $\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}=0$.

(iii) $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{u}=0$.

附录 B　磁面法线方向的扰动 $\boldsymbol{n}_1$

当存在小扰动位移 ξ 时，一个曲面的面积元法线方向 $\boldsymbol{n}$ 会偏离平衡时的方 $\boldsymbol{n}_0$，其偏差记为 $\boldsymbol{n}_1$. 本附录就是要将 $\boldsymbol{n}_1$ 用平衡时的 $\boldsymbol{n}_0$ 和位移 ξ 表示出来.

一个扰动后的曲面元可写成确定它的二个空间线元的直乘

$$\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\mathrm{d}\boldsymbol{r}\times\mathrm{d}\boldsymbol{r}'.$$

由定义

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0+\xi,$$

可得扰动后的线元为(如图 B.1)

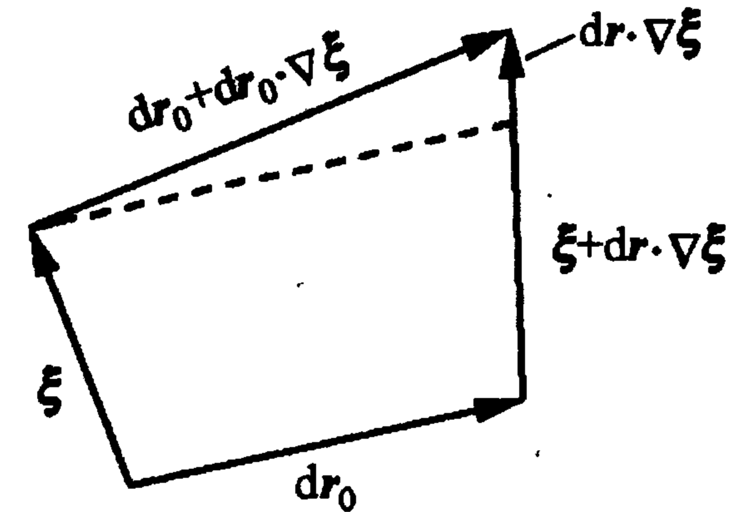


图 B.1　$\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 示意图

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\mathrm{d}\boldsymbol{r}_0+\mathrm{d}\boldsymbol{r}_0\cdot\nabla\xi.$$

由此可以得出扰动后的面元为

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\boldsymbol{S}&=(\mathrm{d}\boldsymbol{r}_0+\mathrm{d}\boldsymbol{r}_0\cdot\nabla\xi)\times(\mathrm{d}\boldsymbol{r}_0'+\mathrm{d}\boldsymbol{r}_0'\cdot\nabla\xi)\\&=\mathrm{d}\boldsymbol{r}_0\times\mathrm{d}\boldsymbol{r}_0'+(\mathrm{d}\boldsymbol{r}_0\cdot\nabla\xi)\times\mathrm{d}\boldsymbol{r}_0'+\mathrm{d}\boldsymbol{r}_0\times(\mathrm{d}\boldsymbol{r}_0'\cdot\nabla\xi)\\&=\mathrm{d}\boldsymbol{S}_0-[(\mathrm{d}\boldsymbol{r}_0\times\mathrm{d}\boldsymbol{r}_0')\times\nabla]\times\xi.\end{aligned}$$

上式的最后一步可以用分量展开的方法直接验证. 另一方面，面元的法向方向定义为

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\boldsymbol{S}&=\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=(\boldsymbol{n}_0+\boldsymbol{n}_1)[\mathrm{d}S_0+(\delta\mathrm{d}S_0)]\\&\approx\boldsymbol{n}_0\mathrm{d}S_0+\boldsymbol{n}_0(\delta\mathrm{d}S_0)+\boldsymbol{n}_1\mathrm{d}S_0,\\\mathrm{d}\boldsymbol{S}-\mathrm{d}\boldsymbol{S}_0&=\boldsymbol{n}_0(\delta\mathrm{d}S_0)+\boldsymbol{n}_1\mathrm{d}S_0\\&=-[\mathrm{d}\boldsymbol{S}_0\times(\nabla\times\xi)].\end{aligned}\tag{B.1}$$

利用 $\boldsymbol{n}_0\cdot\boldsymbol{n}_0=1$，$\boldsymbol{n}_0\cdot\boldsymbol{n}_1=0$，对上式同时点乘 $\boldsymbol{n}_0$ 后可得

$$(\delta\mathrm{d}S_0)=-\boldsymbol{n}_0\cdot[\boldsymbol{n}_0\times(\nabla\times\xi)]\mathrm{d}S_0.$$

这样，由(B.1)式并利用上式可得

$$\begin{aligned} \boldsymbol{n}_1 \mathrm{d}S_0 &= -\boldsymbol{n}_0(\delta \mathrm{d}S_0) - [\boldsymbol{n}_0 \times (\nabla \times \boldsymbol{\xi})]\mathrm{d}S_0 \\ &= \boldsymbol{n}_0\boldsymbol{n}_0 \cdot [\boldsymbol{n}_0 \times (\nabla \times \boldsymbol{\xi})]\mathrm{d}S_0 - [\boldsymbol{n}_0 \times (\nabla \times \boldsymbol{\xi})]\mathrm{d}S_0, \end{aligned}$$

$$\boldsymbol{n}_1 = -[\boldsymbol{n}_0 \times (\nabla \times \boldsymbol{\xi})] + \boldsymbol{n}_0\boldsymbol{n}_0 \cdot [\boldsymbol{n}_0 \times (\nabla \times \boldsymbol{\xi})].$$

其中右面第一项可进一步化成

$$\boldsymbol{n}_0 \times (\nabla \times \boldsymbol{\xi}) = (\nabla \boldsymbol{\xi}) \cdot \boldsymbol{n}_0 - (\boldsymbol{n}_0 \cdot \nabla)\boldsymbol{\xi},$$

而第二项则可化为

$$\boldsymbol{n}_0\boldsymbol{n}_0 \cdot [\boldsymbol{n}_0 \times (\nabla \times \boldsymbol{\xi})] = \boldsymbol{n}_0\boldsymbol{n}_0 \cdot [(\nabla \boldsymbol{\xi}) \cdot \boldsymbol{n}_0 - (\boldsymbol{n}_0 \cdot \nabla)\boldsymbol{\xi}].$$

上式的最后一项又可写作

$$\boldsymbol{n}_0\boldsymbol{n}_0 \cdot (\boldsymbol{n}_0 \cdot \nabla)\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{n}_0(\boldsymbol{n}_0 \cdot \nabla)\xi_n = (\boldsymbol{n}_0 \cdot \nabla \xi_n)\boldsymbol{n}_0.$$

把上面几项代入前面 $\boldsymbol{n}_1$ 的表达式，得(参考图 B.2)

$$\boldsymbol{n}_1 = -(\nabla \boldsymbol{\xi}) \cdot \boldsymbol{n}_0 + \boldsymbol{n}_0\boldsymbol{n}_0 \cdot (\nabla \boldsymbol{\xi}) \cdot \boldsymbol{n}_0 - (\boldsymbol{n}_0 \cdot \nabla)(\boldsymbol{\xi} - \xi_n \boldsymbol{n}_0).$$

其中最后一项是二阶小量，故在准到一阶小量时，法线的扰动就可写成

$$\boldsymbol{n}_1 = -(\nabla \boldsymbol{\xi}) \cdot \boldsymbol{n}_0 + \boldsymbol{n}_0\boldsymbol{n}_0 \cdot (\nabla \boldsymbol{\xi}) \cdot \boldsymbol{n}_0. \tag{B.2}$$

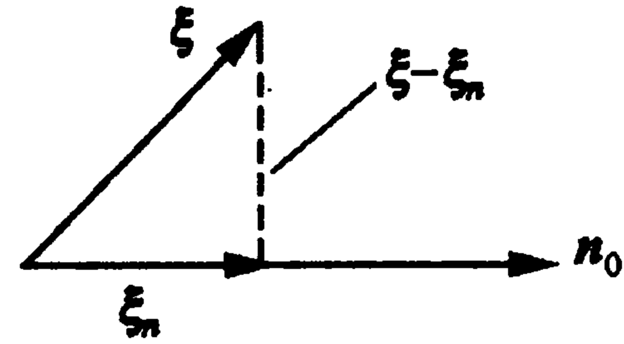


图 B.2 ξ-ξ_n 示意图

附录 C δW_F^{I} 的推导

$$\begin{aligned} \delta W_F^{\mathrm{I}} = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}\boldsymbol{r}\Big[&\frac{1}{\mu}|\boldsymbol{B}_{1\perp}|^2 - \frac{\boldsymbol{J}_0 \cdot \boldsymbol{B}_0}{B_0^2}(\boldsymbol{\xi}_\perp \times \boldsymbol{B}_0) \cdot \boldsymbol{B}_1 \\ &+ \gamma P_0 |\nabla \cdot \boldsymbol{\xi}|^2 + \mu\left|\frac{1}{\mu}B_{1\parallel} - B_0 \boldsymbol{\xi}_\perp \cdot \nabla P_0 / B_0^2\right|^2 \\ &- 2(\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla P_0)(\boldsymbol{\xi}_\perp \cdot \boldsymbol{\kappa})\Big]. \end{aligned} \tag{C.1}$$

这个表达式是由 Furth *et al*. (Culham IAEA Conf., **1**(1965) 103), Greene and Johnson (Plasma Physics, **10**(1968)729)给出的，它的物理意义很清楚，在作进一步的具体分析时也比较简单，所以常被各种文献引用. 这里从第四章(4.18)式(B. Bernsteinit *et al*., Proc. Roy. Soc. **A244**(1958)17)

$$\delta W_F = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}\boldsymbol{r}\Big[\frac{1}{\mu}|\boldsymbol{B}_1|^2 + \boldsymbol{J}_0 \cdot (\boldsymbol{\xi} \times \boldsymbol{B}_1) + \gamma P_0 |\nabla \cdot \boldsymbol{\xi}|^2 + (\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla P_0)(\nabla \cdot \boldsymbol{\xi})\Big]$$

出发，首先证明被积函数第二、四项中的 $\xi_\parallel$ 项会互相抵消，只剩下 $\boldsymbol{\xi}_\perp$. 于是(4.18)式可化成

$$\begin{aligned} \delta W_F = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}\boldsymbol{r}\Big[&\frac{1}{\mu}|\boldsymbol{B}_{1\perp}|^2 - \frac{\boldsymbol{J}_0 \cdot \boldsymbol{B}_0}{B_0^2}(\boldsymbol{\xi}_\perp \times \boldsymbol{B}_0) \cdot \boldsymbol{B}_1 + \gamma P_0 |\nabla \cdot \boldsymbol{\xi}|^2 \\ &+ \frac{1}{\mu}|\boldsymbol{B}_{1\parallel}|^2 + \boldsymbol{J}_\perp \cdot \boldsymbol{\xi}_\perp \times \boldsymbol{B}_1 + (\nabla \cdot \boldsymbol{\xi}_\perp)(\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla)P_0\Big]. \end{aligned} \tag{C.2}$$

具体的推导过程如下：利用

$$\boldsymbol{B}_1 = \nabla \times (\boldsymbol{\xi} \times \boldsymbol{B}_0) \equiv \nabla \times (\boldsymbol{\xi}_\perp \times \boldsymbol{B}_0) = \boldsymbol{B}_{1\parallel} + \boldsymbol{B}_{1\perp},$$

于是(4.18)式第一项可直接写成

$$|\boldsymbol{B}_1|^2 = |\boldsymbol{B}_{1\parallel}|^2 + |\boldsymbol{B}_{1\perp}|^2; \tag{C.3}$$

而(4.18)式第二项化为

$$\boldsymbol{J}_0 \cdot \boldsymbol{\xi} \times \boldsymbol{B}_1 = \boldsymbol{J}_0 \cdot \left(\xi_\parallel \frac{\boldsymbol{B}_0}{B_0} + \boldsymbol{\xi}_\perp\right) \times \boldsymbol{B}_1$$

$$= \frac{\xi_\parallel}{B_0}\boldsymbol{J}_0 \cdot \boldsymbol{B}_0 \times \boldsymbol{B}_1 + \boldsymbol{J}_0 \cdot (\boldsymbol{\xi}_\perp \times \boldsymbol{B}_1),$$

其中右面第一项(利用平衡方程)又可进一步写成

$$\frac{\xi_\parallel}{B_0}(\boldsymbol{J}_0 \times \boldsymbol{B}_0) \cdot \boldsymbol{B}_1$$

$$= \frac{\xi_\parallel}{B_0} \nabla P_0 \cdot [\nabla \times (\boldsymbol{\xi} \times \boldsymbol{B}_0)]$$

$$= \frac{\xi_\parallel}{B_0} \nabla \cdot [(\boldsymbol{\xi} \times \boldsymbol{B}_0) \times \nabla P_0]$$

$$= \frac{\xi_\parallel}{B_0} \nabla \cdot [\boldsymbol{B}_0(\nabla P_0 \cdot \boldsymbol{\xi}) - \boldsymbol{\xi}(\nabla P_0 \cdot \boldsymbol{B}_0)]$$

(由 $\boldsymbol{B}_0 \cdot \nabla P_0 = 0$)$= -\nabla\left(\frac{\xi_\parallel}{B_0}\boldsymbol{B}_0\right)(\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla)P_0.$

这项和被积函数的第四项展开式

$$(\nabla \cdot \boldsymbol{\xi})(\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla)P_0 = \nabla \cdot \left(\frac{\xi_\parallel}{B_0}\boldsymbol{B}_0 + \boldsymbol{\xi}_\perp\right)(\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla)P_0$$

中的第一项正好相消,这些相消的项都是含 $\xi_\parallel$ 的项. 结果被积函数的第二、四项之和为

$$\boldsymbol{J}_0 \cdot (\boldsymbol{\xi}_\perp \times \boldsymbol{B}_1) + (\nabla \cdot \boldsymbol{\xi}_\perp)(\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla)P_0$$

$$= \boldsymbol{J}_\parallel \cdot (\boldsymbol{\xi}_\perp \times \boldsymbol{B}_1) + \boldsymbol{J}_\perp \cdot (\boldsymbol{\xi}_\perp \times \boldsymbol{B}_1) + (\nabla \cdot \boldsymbol{\xi}_\perp)(\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla)P_0$$

$$= \frac{J_\parallel}{B_0}\boldsymbol{B}_0 \cdot (\boldsymbol{\xi}_\perp \times \boldsymbol{B}_1) + \boldsymbol{J}_\perp \cdot (\boldsymbol{\xi}_\perp \times \boldsymbol{B}_1) + (\nabla \cdot \boldsymbol{\xi}_\perp)(\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla)P_0$$

$$= \frac{J_\parallel}{B_0}(\boldsymbol{B}_0 \times \boldsymbol{\xi}_\perp) \cdot \boldsymbol{B}_1 + \boldsymbol{J}_\perp \cdot (\boldsymbol{\xi}_\perp \times \boldsymbol{B}_1) + (\nabla \cdot \boldsymbol{\xi}_\perp)(\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla)P_0$$

$$= -\frac{\boldsymbol{J}_0 \cdot \boldsymbol{B}_0}{B_0^2}(\boldsymbol{\xi}_\perp \times \boldsymbol{B}_0) \cdot \boldsymbol{B}_1 + \boldsymbol{J}_\perp \cdot (\boldsymbol{\xi}_\perp \times \boldsymbol{B}_1)$$

$$+ (\nabla \cdot \boldsymbol{\xi}_\perp)(\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla)P_0.$$

把这两项以及第一项(式(C.3)).一起代入出发表达式(4.18)后,就可得式(C.2).其中的头三项已经和 δW_F^{I}((C.1)式)中的相应项完全相同了,剩余的后三项仍要进一步化过去.为了方便,在这里把式(C.2)的后三项再写一遍

$$\frac{1}{\mu}|\boldsymbol{B}_{1\parallel}|^2 + \boldsymbol{J}_\perp \cdot (\boldsymbol{\xi}_\perp \times \boldsymbol{B}_1) + (\nabla \cdot \boldsymbol{\xi}_\perp)(\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla)P_0. \tag{C.4}$$

其中第二项可以化成

$$\boldsymbol{J}_\perp \cdot (\boldsymbol{\xi}_\perp \times \boldsymbol{B}_1) = \frac{\boldsymbol{B}_0 \times \nabla P_0}{B_0^2} \cdot (\boldsymbol{\xi}_\perp \times \boldsymbol{B}_1)$$

$$= \frac{1}{B_0}(\boldsymbol{b} \times \nabla P_0) \cdot (\boldsymbol{\xi}_\perp \times \boldsymbol{B}_1)$$

$$= -\frac{B_{1\parallel}}{B_0}(\nabla P_0 \cdot \boldsymbol{\xi}_\perp).$$

把它代入式(C.4)后可以凑出式(C.1)中的第四项(即两项之差的绝对值平方项):

$$\mu\left|\frac{1}{\mu}\boldsymbol{B}_{1\parallel} - \boldsymbol{B}_0\boldsymbol{\xi}_\perp \cdot \nabla P_0/B_0^2\right|^2 + B_{1\parallel}\boldsymbol{\xi}_\perp \cdot \nabla P_0/B_0$$

$$- \mu(\boldsymbol{\xi}_\perp \cdot \nabla P_0)^2/B_0^2 + (\nabla \cdot \boldsymbol{\xi}_\perp)(\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla)P_0, \tag{C.5}$$

其中第一项已符合要求,令上式第二、三、四项分别为Ⅰ,Ⅱ,Ⅲ,下面先来化简第二项(Ⅰ).因为

$$B_{1\parallel} = \boldsymbol{B}_1 \cdot \boldsymbol{b} = [\nabla \times (\boldsymbol{\xi}_\perp \times \boldsymbol{B}_0)] \cdot \boldsymbol{b}$$

$$= [\boldsymbol{\xi}_\perp(\nabla \cdot \boldsymbol{B}_0) - \boldsymbol{B}_0(\nabla \cdot \boldsymbol{\xi}_\perp) + (\boldsymbol{B}_0 \cdot \nabla)\boldsymbol{\xi}_\perp - (\boldsymbol{\xi}_\perp \cdot \nabla)\boldsymbol{B}_0] \cdot \boldsymbol{b}$$

$$= [(\boldsymbol{B}_0 \cdot \nabla)\boldsymbol{\xi}_\perp] \cdot \boldsymbol{b} - B_0(\nabla \cdot \boldsymbol{\xi}_\perp) - \boldsymbol{\xi}_\perp \cdot \nabla B_0.$$

上式第一项并不为零,利用

$$(\boldsymbol{B} \cdot \nabla)(\boldsymbol{\xi}_\perp \cdot \boldsymbol{b}) \equiv 0 = [(\boldsymbol{B} \cdot \nabla)\boldsymbol{\xi}_\perp] \cdot \boldsymbol{b} + [(\boldsymbol{B} \cdot \nabla)\boldsymbol{b}] \cdot \boldsymbol{\xi}_\perp$$

$$= [(\boldsymbol{B} \cdot \nabla)\boldsymbol{\xi}_\perp] \cdot \boldsymbol{b} + [B(\boldsymbol{b} \cdot \nabla)\boldsymbol{b}] \cdot \boldsymbol{\xi}_\perp$$

$$= [(\boldsymbol{B} \cdot \nabla)\boldsymbol{\xi}_\perp] \cdot \boldsymbol{b} + B\boldsymbol{\kappa} \cdot \boldsymbol{\xi}_\perp,$$

于是有

$$B_{1\parallel} = -B_0\boldsymbol{\xi}_\perp\cdot\boldsymbol{\kappa} - B_0(\nabla\cdot\boldsymbol{\xi}_\perp) - \boldsymbol{\xi}_\perp\cdot\nabla B_0. \tag{C.6}$$

代入 I 后得

$$\mathrm{I} = -(\boldsymbol{\xi}_\perp\cdot\boldsymbol{\kappa})(\boldsymbol{\xi}_\perp\cdot\nabla P_0) - (\boldsymbol{\xi}_\perp\cdot\nabla P_0)(\nabla\cdot\boldsymbol{\xi}_\perp) - (\boldsymbol{\xi}_\perp\cdot\nabla B_0)(\boldsymbol{\xi}_\perp\cdot\nabla P_0)/B_0. \tag{C.7}$$

其中第二项就是(− Ⅱ),而第三项则和 Ⅱ 有关. 为此,利用

$$\mu\nabla P_0 = \boldsymbol{J}_0\times\boldsymbol{B}_0 = (\nabla\times\boldsymbol{B}_0)\times\boldsymbol{B}_0 = \nabla\cdot\left(\boldsymbol{B}_0\boldsymbol{B}_0 - \frac{1}{2}B_0^2\overleftrightarrow{I}\right)$$
$$= B_0^2(\boldsymbol{b}\cdot\nabla)\boldsymbol{b} - B_0\nabla_\perp B_0 = B_0^2\boldsymbol{\kappa} - B_0\nabla_\perp B_0,$$

于是

$$\mu\boldsymbol{\xi}_\perp\cdot\nabla P_0 = B_0^2\boldsymbol{\xi}_\perp\cdot\boldsymbol{\kappa} - B_0(\boldsymbol{\xi}_\perp\cdot\nabla)B_0, \tag{C.8}$$

反过来有

$$(\boldsymbol{\xi}_\perp\cdot\nabla)B_0 = -\mu\boldsymbol{\xi}_\perp\cdot\nabla P_0/B_0 + B_0(\boldsymbol{\xi}_\perp\cdot\boldsymbol{\kappa}).$$

这样(C.7)式中的第三项最后可化为

$$-(\boldsymbol{\xi}_\perp\cdot\nabla B_0)(\boldsymbol{\xi}_\perp\cdot\nabla P_0)/B_0$$
$$= \mu(\boldsymbol{\xi}_\perp\cdot\nabla P_0)^2/B_0^2 - (\boldsymbol{\xi}_\perp\cdot\boldsymbol{\kappa})(\boldsymbol{\xi}_\perp\cdot\nabla P_0).$$

其中右边第一项就是 Ⅱ,所以最后有

$$\mathrm{I} + \mathrm{II} + \mathrm{III} = -2(\boldsymbol{\xi}_\perp\cdot\boldsymbol{\kappa})(\boldsymbol{\xi}_\perp\cdot\nabla P_0).$$

结果 δW_F 的后三项(C.4)式,现在变成了 δW_F^{I} 的后两项

$$\mu\left|\frac{1}{\mu}\boldsymbol{B}_{1\parallel} - \boldsymbol{B}_0\boldsymbol{\xi}_\perp\cdot\nabla P_0/B_0^2\right|^2 - 2(\boldsymbol{\xi}_\perp\cdot\boldsymbol{\kappa})(\boldsymbol{\xi}_\perp\cdot\nabla P_0),$$

于是式(C.1)得证. 式(C.1)中的

$$\mu\left|\frac{1}{\mu}\boldsymbol{B}_{1\parallel} - \boldsymbol{B}_0\boldsymbol{\xi}_\perp\cdot\nabla P_0/B_0^2\right|^2$$

还可以写成(参见 J. P. Freidberg, Rev. Mod. Phys. **54**(1982) 860)

$$\mu\left|\frac{1}{\mu}\boldsymbol{B}_{1\parallel} - \boldsymbol{B}_0\boldsymbol{\xi}_\perp\cdot\nabla P_0/B_0^2\right|^2 = \frac{B_0^2}{\mu}|\nabla\cdot\boldsymbol{\xi}_\perp + 2\boldsymbol{\xi}_\perp\cdot\boldsymbol{\kappa}|^2; \tag{C.9}$$

或

$$\mu\left|\frac{1}{\mu}\boldsymbol{B}_{1\parallel} - \boldsymbol{B}_0\boldsymbol{\xi}_\perp\cdot\nabla P_0/B_0^2\right|^2$$
$$= \frac{B_0^2}{\mu}|\nabla\cdot\boldsymbol{\xi}_\perp + \boldsymbol{\xi}_\perp\cdot\nabla(B_0^2 + 2\mu P_0)/B_0^2|^2. \tag{C.10}$$

为证明(C.9)式,利用(C.6)式,

$$B_{1\parallel} = -B_0\boldsymbol{\xi}_\perp\cdot\boldsymbol{\kappa} - B_0(\nabla\cdot\boldsymbol{\xi}_\perp) - \boldsymbol{\xi}_\perp\cdot\nabla B_0,$$

及(C.8)式,

$$\mu\boldsymbol{\xi}_\perp\cdot\nabla P_0 = B_0^2\boldsymbol{\kappa}\cdot\boldsymbol{\xi}_\perp - B_0(\boldsymbol{\xi}_\perp\cdot\nabla)B_0,$$

便直接可证. 而再一次利用上式,把它写作

$$\boldsymbol{\kappa} = (\nabla\mu P_0 + B_0\nabla_\perp B_0)/B_0^2 = \nabla(\mu P_0 + B_0^2/2)/B_0^2$$

就可以证明式(C.10).

附录 D　δW_F^N 的推导

这里仍从第四章(4.18)式

$$\delta W_F=\frac{1}{2}\int \mathrm{d}\boldsymbol{r}\Big[\frac{1}{\mu}|\boldsymbol{B}_1|^2+\boldsymbol{\xi}_\perp^*\cdot(\boldsymbol{B}_1\times\boldsymbol{J}_0)+\gamma P_0|\nabla\cdot\boldsymbol{\xi}|^2+(\boldsymbol{\xi}\cdot\nabla P_0)(\nabla\cdot\boldsymbol{\xi}^*)\Big]$$

出发,但经过一个中间的过渡表达式(以下为简单,令 $\mu=1$)

$$\delta W_F=\frac{1}{2}\int \mathrm{d}\boldsymbol{r}[|\boldsymbol{B}_0\cdot\nabla\boldsymbol{\xi}_\perp|^2+B_0^2|\nabla\cdot\boldsymbol{\xi}_\perp|^2+\gamma P_0|\nabla\cdot\boldsymbol{\xi}|^2+\boldsymbol{\xi}_\perp^*\cdot(\boldsymbol{\xi}_\perp\cdot\nabla)\nabla\hat{P}_0+2(\nabla\cdot\boldsymbol{\xi}_\perp)\boldsymbol{\xi}_\perp^*\cdot(\nabla\hat{P}_0)+2(\nabla\cdot\boldsymbol{\xi}_\perp^*)\boldsymbol{\xi}_\perp\cdot(\nabla\hat{P}_0)], \tag{D.1}$$

最后导出螺旋坐标中最有用的势能表达式(参见 J. P. Freidberg, Rev. Mod. Phys. **54**(1982)860)

$$\delta W_F^N=\frac{1}{2}\int \mathrm{d}\boldsymbol{r}[|\boldsymbol{B}_0\cdot\nabla\boldsymbol{\xi}_\perp|^2+B_0^2|\nabla\cdot\boldsymbol{\xi}_\perp+2\boldsymbol{\xi}_\perp\cdot\boldsymbol{\kappa}|^2+\gamma P_0|\nabla\cdot\boldsymbol{\xi}|^2+\boldsymbol{\xi}_\perp^*\cdot(\boldsymbol{\xi}_\perp\cdot\nabla)\nabla\hat{P}_0-4B_0^2|\boldsymbol{\xi}_\perp\cdot\boldsymbol{\kappa}|^2]. \tag{D.2}$$

从过渡表达式(D.1)到(D.2)的证明很简单,只要注意到

$$\nabla\hat{P}_0\equiv\nabla\Big(P_0+\frac{B_0^2}{2\mu}\Big)=\boldsymbol{B}_0\cdot\nabla\boldsymbol{B}_0=B_0^2(\boldsymbol{b}\cdot\nabla)\boldsymbol{b}+B_0\boldsymbol{b}(\boldsymbol{b}\cdot\nabla B_0)=B_0^2\boldsymbol{\kappa},$$

其中已用了平衡条件及 B_0 在磁场方向 $\boldsymbol{b}$ 上均匀的事实,然后直接验算(D.1)式中的第二、五、六项相加等于(D.2)式中的第二项加第五项即可.

故下面着重来证明(D.1). 首先注意到,(4.18)式和(D.1)式中有一项 $\gamma P_0|\nabla\cdot\boldsymbol{\xi}|^2$ 是完全相同的,因此不用证明. 然后先看(4.18)式被积函数中的第一项:

$$\boldsymbol{B}_1=\nabla\times(\boldsymbol{\xi}_\perp\times\boldsymbol{B}_0)=(\boldsymbol{B}_0\cdot\nabla)\boldsymbol{\xi}_\perp-(\boldsymbol{\xi}_\perp\cdot\nabla)\boldsymbol{B}_0-(\nabla\cdot\boldsymbol{\xi}_\perp)\boldsymbol{B}_0=\mathscr{A}+\mathscr{B}+\mathscr{C}.$$

其中用到了简化符号,它们都是一些矢量:

$$\mathscr{A}=(\boldsymbol{B}_0\cdot\nabla)\boldsymbol{\xi}_\perp, \tag{D.3}$$

$$\mathscr{B}=-(\boldsymbol{\xi}_\perp\cdot\nabla)\boldsymbol{B}_0, \tag{D.4}$$

$$\mathscr{C}=-(\nabla\cdot\boldsymbol{\xi}_\perp)\boldsymbol{B}_0. \tag{D.5}$$

于是(4.18)式中被积函数的第一项可以写成

$$|\boldsymbol{B}_1|^2=\mathscr{A}\cdot\mathscr{A}^*+\mathscr{B}\cdot\mathscr{B}^*+\mathscr{C}\cdot\mathscr{C}^*+\mathscr{A}\cdot\mathscr{B}^*+\mathscr{A}\cdot\mathscr{C}^*+\mathscr{B}\cdot\mathscr{A}^*+\mathscr{B}\cdot\mathscr{C}^*+\mathscr{C}\cdot\mathscr{A}^*+\mathscr{C}\cdot\mathscr{B}^*, \tag{D.6}$$

其中

$$\mathscr{A}\cdot\mathscr{A}^*=|(\boldsymbol{B}_0\cdot\nabla)\boldsymbol{\xi}_\perp|^2, \tag{D.7}$$

这就是(D.1)式被积函数中的第一项. 同理可证 $\mathscr{C}\cdot\mathscr{C}^*$ 就是(D.1)式中的第二项,而[$\mathscr{A}\cdot\mathscr{C}^*+\mathscr{B}\cdot\mathscr{C}^*+$(4.18)式被积函数中最后一项]正是(D.1)式中的最后一项. 下面是它的证明过程,由

$$\begin{aligned}\mathscr{A}\cdot\mathscr{C}^*&=[-(\boldsymbol{B}_0\cdot\nabla)\boldsymbol{\xi}_\perp]\cdot[(\nabla\cdot\boldsymbol{\xi}_\perp^*)\boldsymbol{B}_0]\\&=-(\nabla\cdot\boldsymbol{\xi}_\perp^*)[(\boldsymbol{B}_0\cdot\nabla)\xi_{\perp i}]B_{0i}\\&=-(\nabla\cdot\boldsymbol{\xi}_\perp^*)[(\boldsymbol{B}_0\cdot\nabla)(\boldsymbol{\xi}_\perp\cdot\boldsymbol{B}_0)]+(\nabla\cdot\boldsymbol{\xi}_\perp^*)[(\boldsymbol{B}_0\cdot\nabla)B_{0i}]\xi_{\perp i}\\&=(\nabla\cdot\boldsymbol{\xi}_\perp^*)\boldsymbol{\xi}_\perp\cdot[(\boldsymbol{B}_0\cdot\nabla)\boldsymbol{B}_0]\\&=(\nabla\cdot\boldsymbol{\xi}_\perp^*)\boldsymbol{\xi}_\perp\cdot\nabla\hat{P}_0,\end{aligned}$$

其中重复出现的下标 i 表示对两个相乘矢量的诸分量求和. 另外

$$\mathscr{B}\cdot\mathscr{C}^*=[(\boldsymbol{\xi}_\perp\cdot\nabla)\boldsymbol{B}_0]\cdot[(\nabla\cdot\boldsymbol{\xi}_\perp^*)\boldsymbol{B}_0]$$

$$=[(\xi_\perp\cdot\nabla)B_{0i}]\cdot[(\nabla\cdot\xi_\perp^*)B_{0i}]$$
$$=(\nabla\cdot\xi_\perp^*)(\xi_\perp\cdot\nabla)(B_0^2/2).$$

将上两式以及(4.18)式的最后一个被积函数相加,得

$$\mathscr{A}\cdot\mathscr{C}^*+\mathscr{B}\cdot\mathscr{C}^*+(\nabla\cdot\xi_\perp^*)(\xi_\perp\cdot\nabla P_0)$$
$$=2(\nabla\cdot\xi_\perp^*)\xi_\perp\cdot\nabla\hat{P}_0,\tag{D.8}$$

这结果正好是(D.1)式被积函数的最后一项.

接下来将证明:$|\boldsymbol{B}_1|^2$ 展开式(D.6)中的剩余项与(4.18)式被积函数中的第二项($\xi_\perp^*\cdot(\boldsymbol{B}_1\times\boldsymbol{J}_0)$)一起会组成(D.1)式被积函数中的第四、五项.先来看

$$\mathscr{A}^*\cdot\mathscr{C}=[-(\boldsymbol{B}_0\cdot\nabla)\xi_\perp^*]\cdot[(\nabla\cdot\xi_\perp)\boldsymbol{B}_0]$$
$$=-(\nabla\cdot\xi_\perp)[(\boldsymbol{B}_0\cdot\nabla)\xi_{\perp i}^*]B_{0i}$$
$$=-(\nabla\cdot\xi_\perp)[(\boldsymbol{B}_0\cdot\nabla)(\xi_\perp^*\cdot\boldsymbol{B}_0)]$$
$$+(\nabla\cdot\xi_\perp)\xi_{\perp i}^*[(\boldsymbol{B}_0\cdot\nabla)B_{0i}]$$
$$=(\nabla\cdot\xi_\perp)\xi_\perp^*\cdot(\boldsymbol{B}_0\cdot\nabla\boldsymbol{B}_0)$$
$$=(\nabla\cdot\xi_\perp)\xi_\perp^*\cdot\nabla\hat{P}_0;$$

$$\mathscr{B}^*\cdot\mathscr{C}=[(\xi_\perp^*\cdot\nabla)\boldsymbol{B}_0]\cdot[(\nabla\cdot\xi_\perp)\boldsymbol{B}_0]$$
$$=[(\xi_{\perp i}^*\nabla_i)B_{0j}][(\nabla\cdot\xi_\perp)B_{0j}]$$
$$=(\nabla\cdot\xi_\perp)[(\xi_{\perp i}^*\nabla_i)(B_0^2/2)]$$
$$=(\nabla\cdot\xi_\perp)(\xi_\perp^*\cdot\nabla)(B_0^2/2)$$
$$=\xi_\perp^*(\nabla\cdot\xi_\perp)\cdot\nabla\frac{B_0^2}{2};$$

$$\mathscr{A}^*\cdot\mathscr{B}=[-(\boldsymbol{B}_0\cdot\nabla)\xi_\perp^*]\cdot[(\xi_\perp\cdot\nabla)\boldsymbol{B}_0]$$
$$=-[(\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\xi_{\perp i}^*][(\xi_\perp\cdot\nabla)B_{0i}]$$
$$=-(\boldsymbol{B}\cdot\nabla)[\xi_{\perp i}^*(\xi_\perp\cdot\nabla)B_{0i}]$$
$$+\xi_{\perp i}^*[(\boldsymbol{B}\cdot\nabla)((\xi_\perp\cdot\nabla)B_{0i})]$$
$$=-\nabla\cdot[\boldsymbol{B}_0(\xi_\perp^*\cdot(\xi_\perp\cdot\nabla)\boldsymbol{B}_0)]$$

$$+\xi_\perp^*\cdot(\boldsymbol{B}_0\cdot\nabla)[(\xi_\perp\cdot\nabla)\boldsymbol{B}_0]$$
$$=\xi_\perp^*\cdot[(\boldsymbol{B}_0\cdot\nabla)(\xi_\perp\cdot\nabla)\boldsymbol{B}_0].$$

$\mathscr{A}^*\cdot\mathscr{B}$ 推导的最后一步用到了磁面的法线方向和磁场方向垂直,因而点乘为零:

$$\int \mathrm{d}\boldsymbol{r}\,\nabla\cdot[\boldsymbol{B}_0(\xi_\perp^*\cdot(\xi_\perp\cdot\nabla)\boldsymbol{B}_0)]=\oint \mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{B}_0(\xi_\perp^*\cdot(\xi_\perp\cdot\nabla)\boldsymbol{B}_0)\equiv 0.$$

此外,

$$\mathscr{B}\cdot\mathscr{B}^*=[(\xi_\perp\cdot\nabla)\boldsymbol{B}_0]\cdot[\xi_\perp^*\cdot\nabla\boldsymbol{B}_0]$$
$$=[(\xi_\perp\cdot\nabla)B_{0i}](\xi_\perp^*\cdot\nabla)B_{0i}$$
$$=\xi_\perp^*[(\xi_\perp\cdot\nabla)B_{0i}]\cdot\nabla B_{0i},$$

$$\mathscr{A}\cdot\mathscr{B}^*=[-(\boldsymbol{B}_0\cdot\nabla)\xi_\perp]\cdot[(\xi_\perp^*\cdot\nabla)\boldsymbol{B}_0]$$
$$=-[(\boldsymbol{B}_0\cdot\nabla)\xi_{\perp i}](\xi_\perp^*\cdot\nabla)B_{0i}$$
$$=-\xi_\perp^*[(\boldsymbol{B}_0\cdot\nabla)\xi_{\perp i}]\cdot\nabla B_{0i},$$

以上就是$|\boldsymbol{B}_1|^2$ 展开式中的剩余项.下面来展开 $\xi_\perp^*\cdot(\boldsymbol{B}_1\times\boldsymbol{J}_0)$,因为

$$\boldsymbol{B}_1\times\boldsymbol{J}_0=[\nabla\times(\xi_\perp\times\boldsymbol{B}_0)]\times\boldsymbol{J}_0$$
$$=[(\boldsymbol{B}_0\cdot\nabla)\xi_\perp-(\xi_\perp\cdot\nabla)\boldsymbol{B}_0-(\nabla\cdot\xi_\perp)\boldsymbol{B}_0]\times\boldsymbol{J}_0$$
$$\equiv[\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma}]\times\boldsymbol{J}_0,$$

其中

$$\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{J}_0=[(\boldsymbol{B}_0\cdot\nabla)\xi_\perp]\times(\nabla\times\boldsymbol{B}_0),$$
$$(\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{J}_0)_k=\varepsilon_{kij}[(\boldsymbol{B}_0\cdot\nabla)\xi_{\perp i}](\nabla\times\boldsymbol{B}_0)_j$$
$$=\varepsilon_{kij}[(\boldsymbol{B}_0\cdot\nabla)\xi_{\perp i}]\varepsilon_{jst}\nabla_s B_{0t}$$
$$=(\delta_s^k\delta_t^i-\delta_s^i\delta_t^k)(\boldsymbol{B}_0\cdot\nabla)\xi_{\perp i}\nabla_s B_{0t}$$
$$=[(\boldsymbol{B}_0\cdot\nabla)\xi_{\perp i}]\nabla_k B_{0i}-[(\boldsymbol{B}_0\cdot\nabla)\xi_{\perp i}]\nabla_i B_{0k}.$$

故

$$\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{J}_0=[(\boldsymbol{B}_0\cdot\nabla)\xi_{\perp i}]\nabla B_{0i}-[(\boldsymbol{B}_0\cdot\nabla)\xi_{\perp i}]\nabla_i\boldsymbol{B}_0$$
$$=[(\boldsymbol{B}_0\cdot\nabla)\xi_{\perp i}]\nabla B_{0i}-(\boldsymbol{B}_0\cdot\nabla)[(\xi_\perp\cdot\nabla)\boldsymbol{B}_0]$$
$$+\xi_{\perp i}(\boldsymbol{B}_0\cdot\nabla)(\nabla_i\boldsymbol{B}_0).$$

同样有

$$\boldsymbol{\beta}\times \boldsymbol{J}_0 = -[(\boldsymbol{\xi}_\perp\cdot\nabla)\boldsymbol{B}_0]\times \boldsymbol{J}_0$$
$$= -[(\boldsymbol{\xi}_\perp\cdot\nabla)B_{0i}]\nabla B_{0i} + [(\boldsymbol{\xi}_\perp\cdot\nabla)B_{0i}]\nabla_i\boldsymbol{B}_0,$$

其中的右面第二项可以进一步化为

$$[(\boldsymbol{\xi}_\perp\cdot\nabla)B_{0i}]\nabla_i\boldsymbol{B}_0 = (\boldsymbol{\xi}_\perp\cdot\nabla)[\boldsymbol{B}_0\cdot\nabla\boldsymbol{B}_0] - B_{0i}(\boldsymbol{\xi}_\perp\cdot\nabla)(\nabla_i\boldsymbol{B}_0)$$
$$= (\boldsymbol{\xi}_\perp\cdot\nabla)\nabla\hat{P}_0 - B_{0i}\xi_{\perp j}\nabla_j\nabla_i\boldsymbol{B}_0$$
$$= (\boldsymbol{\xi}_\perp\cdot\nabla)\nabla\hat{P}_0 - \boldsymbol{\xi}_\perp\cdot[(\boldsymbol{B}_0\cdot\nabla)\nabla\boldsymbol{B}_0].$$

应该注意到，上式的最后一项与 $\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{J}_0$ 化简后的最后一项绝对值相同，而符号正好相反，故相加后会互助抵消. 而

$$\boldsymbol{\gamma}\times\boldsymbol{J}_0 = -(\nabla\cdot\boldsymbol{\xi}_\perp)\boldsymbol{B}_0\times\boldsymbol{J}_0 = (\nabla\cdot\boldsymbol{\xi}_\perp)\nabla P_0.$$

最后把 $\boldsymbol{B}_1\times\boldsymbol{J}_0$ 的三项都加起来，并注意到 $\boldsymbol{B}_0\cdot\nabla\boldsymbol{B}_0=\nabla\hat{P}_0$（见式(D.2)后面的证明），得

$$\boldsymbol{B}_1\times\boldsymbol{J}_0 = (\nabla\cdot\boldsymbol{\xi}_\perp)\nabla P_0 + [(\boldsymbol{B}_0\cdot\nabla)\xi_{\perp i}]\nabla B_{0i} + (\boldsymbol{\xi}_\perp\cdot\nabla)(\nabla\hat{P}_0)$$
$$- (\boldsymbol{B}_0\cdot\nabla)[(\boldsymbol{\xi}_\perp\cdot\nabla)\boldsymbol{B}_0] - [(\boldsymbol{\xi}_\perp\cdot\nabla)B_{0i}]\nabla B_{0i}.$$

然后点乘上 $\boldsymbol{\xi}_\perp^*$，得

$$\boldsymbol{\xi}_\perp^*\cdot(\boldsymbol{B}_1\times\boldsymbol{J}_0)$$
$$= \boldsymbol{\xi}_\perp^*\cdot(\nabla\cdot\boldsymbol{\xi}_\perp)\nabla P_0 + \boldsymbol{\xi}_\perp^*\cdot[(\boldsymbol{B}_0\cdot\nabla)\xi_{\perp i}]\nabla B_{0i}$$
$$+ \boldsymbol{\xi}_\perp^*\cdot[(\boldsymbol{\xi}_\perp\cdot\nabla)\nabla\hat{P}_0]$$
$$- \boldsymbol{\xi}_\perp^*\cdot(\boldsymbol{B}_0\cdot\nabla)[(\boldsymbol{\xi}_\perp\cdot\nabla)\boldsymbol{B}_0] - \boldsymbol{\xi}_\perp^*\cdot[(\boldsymbol{\xi}_\perp\cdot\nabla)B_{0i}]\nabla B_{0i}.$$

上式右边的第三项就是式(D.1)中的第四项；通过直接验算可以证明，上式中的第一项与下面两项之和正好是式(D.1)中的第五项，

$$\mathscr{A}^*\cdot\mathscr{C} + \mathscr{B}^*\cdot\mathscr{C} + \boldsymbol{\xi}_\perp^*\cdot(\nabla\cdot\boldsymbol{\xi}_\perp)\nabla P_0$$
$$= (\nabla\cdot\boldsymbol{\xi}_\perp)\boldsymbol{\xi}_\perp^*\cdot\nabla\hat{P}_0 + \boldsymbol{\xi}_\perp^*(\nabla\cdot\boldsymbol{\xi}_\perp)\cdot\nabla\frac{B_0^2}{2}$$
$$+ \boldsymbol{\xi}_\perp^*\cdot(\nabla\cdot\boldsymbol{\xi}_\perp)\nabla P_0$$
$$= 2\boldsymbol{\xi}_\perp^*(\nabla\cdot\boldsymbol{\xi}_\perp)\cdot\nabla\hat{P}_0.$$

还可以证明以下诸项均为零

$$\mathscr{A}^*\cdot\mathscr{B} + (\text{IV}) = 0,$$
$$\mathscr{B}^*\cdot\mathscr{B} + (\text{V}) = 0,$$
$$\mathscr{A}\cdot\mathscr{B}^* + (\text{II}) = 0.$$

其中(Ⅳ)，(Ⅴ)，(Ⅱ)分别代表 $\boldsymbol{\xi}_\perp^*\cdot(\boldsymbol{B}_1\times\boldsymbol{J}_0)$ 展开式中的第四、第五和第二项. 这样(D.1)式就完全得证，因而螺旋坐标下的扰动势能表达式 δW_F^N 即(D.2)式也就得证.

附录 E　螺旋箍缩扰动势能表达式

在螺旋箍缩的具体位形下，通过一系列极小化，可以把扰动势能只用扰动矢量 $\boldsymbol{\xi}$ 的 $\boldsymbol{e}_r$ 分量 ξ 表示出来，这就是第四章的(4.41)式. 这个表达式可以从任何一个 δW_F 推导出来，通常都是以 δW_F^{II} 为出发点来推导，这里打算以 δW_F^{N} 为出发点来推导. 出发表达式是

$$\delta W_F^{\mathrm{N}} = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}\boldsymbol{r}\big[\,|\boldsymbol{B}_0\cdot\nabla\boldsymbol{\xi}_\perp|^2 + B_0^2|\nabla\cdot\boldsymbol{\xi}_\perp + 2\boldsymbol{\xi}_\perp\cdot\boldsymbol{\kappa}|^2 + \boldsymbol{\xi}_\perp^*\cdot(\boldsymbol{\xi}_\perp\cdot\nabla)\nabla\hat{P}_0 - 4B_0^2|\boldsymbol{\xi}_\perp\cdot\boldsymbol{\kappa}|^2\big]. \tag{E.1}$$

原来上式中还有一项 $\gamma P_0|\nabla\cdot\boldsymbol{\xi}|^2$，但它在用不可压缩条件作第一次极小化时已经去掉了，所以现在被积函数中只剩下四项. 在螺旋箍缩中，平衡量为(已省略下标"0")

$$\boldsymbol{B} = (0, B_\theta(r), B_z(r)),\quad \nabla = \boldsymbol{e}_r\nabla_r + \boldsymbol{e}_\perp\nabla_\perp + \boldsymbol{e}_\parallel\nabla_\parallel,$$

而

$$\nabla_r = \frac{\partial}{\partial r},\quad \nabla_\perp = \frac{1}{B}\left(\frac{B_z}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} - B_\theta\frac{\partial}{\partial z}\right),$$

$$\nabla_\parallel = \frac{1}{B}\left(\frac{B_\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + B_z\frac{\partial}{\partial z}\right).$$

在螺旋坐标$(\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\eta, \boldsymbol{e}_b)$中，扰动位移取为

$$\boldsymbol{\xi} = \xi\boldsymbol{e}_r + \eta\boldsymbol{e}_\eta + \xi_\parallel\boldsymbol{e}_b,\quad \boldsymbol{\xi}_\perp = \xi\boldsymbol{e}_r + \eta\boldsymbol{e}_\eta.$$

它们和柱坐标$(\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\theta, \boldsymbol{e}_z)$下的扰动位移诸分量以及单位矢量的关系为

$$\xi_\parallel = (\xi_\theta B_\theta + \xi_z B_z)/B,\quad \eta = (\xi_\theta B_z - \xi_z B_\theta)/B.$$

考虑到柱坐标在 θ 方向的周期性，及在 z 方向上的可无限延伸，可

对位移矢量在这两个坐标上作傅氏变换

$$\boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{\xi}(r)\exp[\mathrm{i}(m\theta + kz)].$$

利用上述方程和表达式，下面来逐项化开 δW_F^{N}. 首先来看第一项，因为其中

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{B}_0\cdot\nabla\boldsymbol{\xi}_\perp &= \boldsymbol{B}\cdot\nabla\boldsymbol{\xi}_\perp = B\boldsymbol{e}_b\cdot(\boldsymbol{e}_b\nabla_\parallel)\boldsymbol{\xi}_\perp \\
&= \left(\frac{B_\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + B_z\frac{\partial}{\partial z}\right)(\xi\boldsymbol{e}_r + \eta\boldsymbol{e}_\eta) \\
&= \left(\frac{B_\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + B_z\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(\xi\boldsymbol{e}_r + \frac{B_z\xi_\theta - B_\theta\xi_z}{B}\,\frac{B_z\boldsymbol{e}_\theta - B_\theta\boldsymbol{e}_z}{B}\right) \\
&= \frac{\mathrm{i}mB_\theta}{r}\xi\boldsymbol{e}_r + \frac{B_\theta}{r}\xi\frac{\partial\boldsymbol{e}_r}{\partial\theta} + \mathrm{i}kB_z\xi\boldsymbol{e}_r + \frac{\mathrm{i}m}{r}\eta\,\frac{B_z\boldsymbol{e}_\theta - B_\theta\boldsymbol{e}_z}{B} \\
&\quad + \frac{B_\theta B_z}{rB}\frac{\partial\boldsymbol{e}_\theta}{\partial\theta}\eta + \mathrm{i}kB_z\eta\,\frac{B_z\boldsymbol{e}_\theta - B_\theta\boldsymbol{e}_z}{B} \\
&= \left[\mathrm{i}F\xi - \frac{B_\theta B_z}{Br}\eta\right]\boldsymbol{e}_r + \left[\mathrm{i}F\frac{B_z}{B}\eta + \frac{B_\theta}{r}\xi\right]\boldsymbol{e}_\theta + F\frac{B_\theta}{B}\eta\boldsymbol{e}_z,
\end{aligned}$$

其中

$$F = \frac{mB_\theta}{r} + kB_z.$$

所以式(E.1)被积函数中的第一项可写成

$$|\boldsymbol{B}\cdot\nabla\boldsymbol{\xi}_\perp|^2 = F^2|\xi|^2 + \frac{B_\theta^2B_z^2}{B^2r^2}|\eta|^2 + F^2\frac{B_z^2}{B^2}|\eta|^2 + \frac{B_\theta^2}{r^2}|\xi|^2 + F^2\frac{B_\theta^2}{B^2}|\eta|^2 + \mathrm{i}\,\frac{2B_\theta B_z}{Br}F(\xi^*\eta - \xi\eta^*). \tag{E.2}$$

再看式(E.1)被积函数的第二项，其中

$$\begin{aligned}
\nabla\cdot\boldsymbol{\xi}_\perp &= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(\xi r) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{B_z}{B}\eta\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{B_\theta}{B}\eta\right) \\
&= \xi' + \frac{\xi}{r} + \mathrm{i}\,\frac{1}{B}\left(\frac{mB_z}{r} - kB_\theta\right)\eta \\
&= \xi' + \frac{\xi}{r} + \mathrm{i}\,\frac{G}{B}\eta.
\end{aligned}$$

上式中的简化符号

$$G=\frac{mB_z}{r}-kB_\theta.$$

又利用定义

$$\kappa=(e_b\cdot\nabla)e_b,\quad e_b=(B_\theta e_\theta+B_z e_z)/B,$$

可有

$$\kappa=-\frac{B_\theta^2}{B^2 r}e_r. \tag{E.3}$$

故

$$\nabla\cdot\xi_\perp+2\xi_\perp\cdot\kappa=\xi'+\frac{\xi}{r}-\frac{2B_\theta^2}{B^2 r}\xi+\mathrm{i}\frac{G}{B}\eta$$
$$=\xi'+\frac{B^2-2B_\theta^2}{B^2}\frac{\xi}{r}+\mathrm{i}\frac{G}{B}\eta.$$

所以第二项可以写成

$$B^2|\nabla\cdot\xi_\perp+2\xi_\perp\cdot\kappa|^2=B^2|\xi'|^2+\frac{(B^2-2B_\theta^2)^2}{B^2r^2}|\xi|^2+G^2|\eta|^2$$
$$+\frac{B^2-2B_\theta^2}{r}(\xi'^*\xi+\xi^*\xi')+\mathrm{i}GB(\eta\xi'^*-\eta^*\xi')$$
$$+\mathrm{i}(B^2-2B_\theta^2)\frac{G}{Br}(\eta\xi^*-\eta^*\xi). \tag{E.4}$$

接下来在第三项中的

$$\nabla\hat{P}_0\equiv\nabla\left(P_0+\frac{B_0^2}{2\mu}\right)=B_0^2\kappa=-\frac{B_\theta^2}{r}e_r.$$

故

$$(\xi_\perp\cdot\nabla)\nabla\hat{P}_0=\left(\xi\frac{\partial}{\partial r}+\frac{B_z}{B}\frac{\eta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}-\frac{B_\theta}{B}\eta\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(-\frac{B_\theta^2}{r}e_r\right)$$
$$=\frac{B_\theta^2}{r^2}\xi e_r-\frac{2B_\theta B_\theta'}{r}\xi e_r-\frac{B_zB_\theta^2}{Br^2}\eta e_\theta.$$

所以这第三项可表示成

$$\xi_\perp^*\cdot(\xi_\perp\cdot\nabla)\nabla\hat{P}_0$$

$$=(\xi^*e_r+\eta^*e_\eta)\cdot\left(\frac{B_\theta^2}{r^2}\xi e_r-\frac{2B_\theta B_\theta'}{r}\xi e_r-\frac{B_zB_\theta^2}{Br^2}\eta e_\theta\right)$$
$$=\frac{B_\theta^2}{r^2}|\xi|^2-\frac{2B_\theta B_\theta'}{r}|\xi|^2-\frac{B_z^2B_\theta^2}{B^2r^2}|\eta|^2. \tag{E.5}$$

其中用到了

$$e_\eta\cdot e_\theta=\left(\frac{B_z}{B}e_\theta-\frac{B_\theta}{B}e_z\right)\cdot e_\theta=\frac{B_z}{B}.$$

而在式(E.1)被积函数最后一项中，由(E.3)式可知

$$\xi_\perp\cdot\kappa=(\xi e_r+\eta e_\eta)\cdot\left(-\frac{B_\theta^2}{B^2r}e_r\right)=-\frac{B_\theta^2}{B^2r}\xi.$$

所以这项可表示成

$$-4B^2|\xi_\perp\cdot\kappa|^2=-\frac{4B_\theta^2}{B^2r^2}|\xi|^2. \tag{E.6}$$

最后通过把这四项相加，(E.2)+(E.4)+(E.5)+(E.6)，可将式(E.1)的被积函数改写成

$$I(\xi,\eta)=|\xi|^2\left(F^2+2\frac{B_\theta^2}{r^2}-\frac{4B_\theta^2}{B^4r^2}+\frac{B^2-2B_\theta^2}{B^2r^2}-\frac{2B_\theta B_\theta'}{r}\right)$$
$$+B^2|\xi'|^2+|\eta|^2(F^2+G^2)$$
$$+\mathrm{i}\frac{B}{r}(\xi^*\eta-\xi\eta^*)(G+2kB_\theta)$$
$$+\frac{B^2-2B_\theta^2}{r}(\xi'^*\xi+\xi^*\xi')$$
$$+\mathrm{i}GB(\eta\xi'^*-\eta^*\xi'). \tag{E.7}$$

这就是第四章箍缩一节在对扰动势能作第二次极小化时所用的被积函数表达式. 如果从 δW_F^{I} 出发也能得到(E.7)式，只是其中 $|\xi|^2$ 的系数略有不同，但可以证明：式(E.7)中 $|\xi|^2$ 系数的以下三项等价于从 δW_F^{I} 所导出的如下二项（所以从两种 δW_F 导出的 I 是相同的）

$$\frac{2B_\theta^2}{r^2}-\frac{4B_\theta^2}{B^2r^2}-\frac{2B_\theta B_\theta'}{r}=\frac{2B_\theta B_z}{Br}\beta+\frac{2B_\theta^2}{B^2}\frac{P'}{r}. \tag{E.8}$$

在导出上式时利用了简化符号

$$\beta=\frac{1}{B}\left(\frac{2B_\theta B_z}{r}+B_\theta B_z'-B_\theta' B_z\right)$$

$$=\frac{1}{B}\left(\frac{2B_\theta B_z}{r}-\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{B}\right)=\frac{1}{B}\left(\frac{B_\theta B_z}{r}-\frac{B_\theta}{B_z}P'-\frac{B_\theta^2}{B_z}J_z-B_zJ_z\right),$$

其中用到

$$J_\theta B_\theta=\frac{B_\theta}{B_z}(P'+J_zB_\theta),\quad J_z=\frac{1}{r}(rB_\theta)'=\frac{B_\theta}{r}+B_\theta'.$$

于是

$$\frac{2B_\theta B_z}{Br}\beta+\frac{2B_\theta^2}{B^2}\frac{P'}{r}=\frac{4B_\theta^2B_z^2}{B^2r^2}-\frac{2B_\theta^2}{r^2}-\frac{2B_\theta B_\theta'}{r}$$

$$=\frac{2B_\theta^2}{r^2}\left(\frac{2B_z^2}{B^2}-1\right)-\frac{2B_\theta B_\theta'}{r}$$

$$(B^2=B_z^2+B_\theta^2)$$

$$=\frac{2B_z^2B_\theta^2}{B^2r^2}-\frac{4B_\theta^4}{B^2r}-\frac{2B_\theta B_\theta'}{r}$$

$$\approx\frac{2B_\theta^2}{r^2}-\frac{4B_\theta^4}{B^2r}-\frac{2B_\theta B_\theta'}{r}.$$

其中最后一步中，用到了近似 $B^2\approx B_z^2$；它所产生的误差是二阶小量 $B_\theta^2/B^2=\epsilon^2$，这样就完成了式(E.7)的改写.

在式(E.7)中，η 以代数项的形式出现，故用它来对 $I(\xi,\eta)$ 作极小化比较方便. 由式(E.7)，及

$$\frac{\partial I(\xi,\eta)}{\partial\eta}=0,$$

可得

$$(F^2+G^2)\eta^*+\mathrm{i}\frac{B}{r}(G+2kB_\theta)\xi^*+\mathrm{i}GB\xi'^*=0.$$

于是有

$$\eta^*=\frac{-\mathrm{i}}{F^2+G^2}\left[\frac{B}{r}(G+2kB_\theta)\xi^*+GB\xi'^*\right]$$

$$=\frac{-\mathrm{i}}{k_0^2B^2}\frac{B}{r}[2kB_\theta\xi^*+G(r\xi^*)'],$$

以及

$$\eta=\frac{\mathrm{i}}{k_0^2Br}[2kB_\theta\xi+G(r\xi)'].\tag{E.9}$$

这就是第四章的(4.39)式. 其中

$$k_0^2B^2=F^2+G^2=\left(k^2+\frac{m^2}{r^2}\right)B^2,\quad k_0^2=k^2+\frac{m^2}{r^2}=k_z^2+k_\theta^2.$$

下一步是将式(E.9)给出的使 $I(\xi,\eta)$ 取极小的 η 值代入 $I(\xi,\eta)$ 的表达式(E.7)，以得出完全用 ξ 表示的被积函数 $I(\xi)$ 来. 通过直接但略微冗长的代数运算可得

$$I(\xi)=|\xi|^2\left(F^2+\frac{2B_\theta B_z}{Br}\beta+\frac{(B^2-2B_\theta^2)^2}{B^2r^2}+2\frac{B_\theta^2}{B^2}\frac{P'}{r}\right)$$

$$-\frac{(G+2kB_\theta)^2}{k_0^2r^2}|\xi|^2+\frac{F^2}{k_0^2}|\xi'|^2+\frac{Fh}{k_0^2}\frac{\xi'\xi^*+\xi'^*\xi}{r},$$

其中

$$h=kB_z-\frac{m}{r}B_\theta.$$

而上面 $I(\xi)$ 的最后一项可以通过分部积分进一步化成 $|\xi|^2$ 项

$$\int_0^a\frac{Fh}{k_0^2}\frac{\xi'\xi^*+\xi'^*\xi}{r}r\mathrm{d}r=\int_0^a\frac{Fh}{k_0^2}(\xi^*\xi)'\mathrm{d}r$$

$$=\frac{Fh}{k_0^2}|\xi|^2\Big|_0^a-\int_0^a|\xi|^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{Fh}{k_0^2}\right)\mathrm{d}r$$

$$=\left(\frac{Fh}{k_0^2}\right)\Big|_a|\xi(a)|^2-\int_0^a|\xi|^2\left(\frac{Fh}{k_0^2}\right)'\mathrm{d}r.$$

上式中的第一项是磁流体表面的扰动势能，而积分项相当于在 $I(\xi)$ 中的以下项

$$-\frac{1}{r}\left(\frac{Fh}{k_0^2}\right)'|\xi|^2.$$

这样总扰动势能由两部分(体积部分和表面部分)组成

$$\frac{\delta W_F}{L}=\pi\int_0^a \mathrm{d}r(f|\xi'|^2+g|\xi|^2)+\pi\left(\frac{Fh}{k_0^2}\right)\bigg|_a|\xi(a)|^2,\tag{E.10}$$

这就是第四章中的(4.40)式. 其中

$$f=\frac{rF^2}{k_0^2},\tag{E.11}$$

这就是第四章的(4.42)式. 而 g/r 的表达式是

$$\frac{g}{r}=F^2+\frac{2B_\theta B_z}{Br}\beta+\frac{(B^2-2B_\theta^2)^2}{B^2r^2}+\frac{2B_\theta^2}{B^2}\frac{P'}{r}$$
$$-\frac{(G+2kB_\theta)^2}{r^2k_0^2}-\frac{1}{r}\left(\frac{Fh}{k_0^2}\right)'.\tag{E.12}$$

此式比较复杂,还需进一步的整理,下面对其中一些项逐个处理. 首先讨论上式中右面的第二项

$$\frac{2B_\theta B_z}{B}\beta=\frac{2B_\theta B_z}{B^2}\left(\frac{2B_\theta B_z}{r}-J_\theta B_\theta-J_zB_z\right).\tag{E.13}$$

利用平衡方程

$$(\nabla P)_r=(\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{B})_r=J_\theta B_z-J_zB_\theta,$$
$$\Longrightarrow J_\theta B_\theta=\frac{B_\theta}{B_z}(P'+J_zB_\theta),$$

于是有

$$\frac{2B_\theta B_z}{B}\beta=\frac{2B_\theta B_z}{B^2}\left(\frac{2B_\theta B_z}{r}-\frac{B_\theta}{B_z}P'-\frac{B_\theta^2}{B_z}J_z-B_zJ_z\right)$$
$$=\frac{4B_\theta^2B_z^2}{B^2r}-\frac{2B_\theta^2}{B^2}P'-J_z\frac{2B_\theta B_z}{B^2}\left(\frac{B_\theta^2}{B_z}+B_z\right)$$
$$=\frac{4B_\theta^2B_z^2}{B^2r}-\frac{2B_\theta^2}{B^2}P'-2J_zB_\theta,\quad J_z=\frac{1}{r}(rB_z)'.\tag{E.14}$$

然后是 g 式中右面的倒数第二项

$$-\frac{(G+2kB_\theta)^2}{rk_0^2}=-\frac{((m/r)B_z+kB_\theta)^2}{r(k^2+m^2/r^2)}.\tag{E.15}$$

g 中的最后一项则可以化为

$$\left(\frac{Fh}{k_0^2}\right)'=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{k^2B_z^2r^2-m^2B_\theta^2}{m^2+k^2r^2}\right)$$
$$=-\frac{2k^2r(k^2B_z^2r^2-m^2B_\theta^2)}{(m^2+k^2r^2)^2}$$
$$+\frac{2k^2B_z^2r+2k^2B_zB_z'r^2-2m^2B_\theta B_\theta'}{m^2+k^2r^2}$$
$$=\frac{2k^2(m^2/r^2)B^2}{r(k^2+m^2/r^2)^2}+\frac{2k^2B_zB_z'-2(m^2/r^2)B_\theta B_\theta'}{k^2+m^2/r^2}.\tag{E.16}$$

将(E.14)—(E.16)式代回 g/r 的表达式(E.12)后,得

$$g=F^2r+\frac{4B_\theta^2B_z^2}{B^2r}-2B_\theta J_z+\frac{(B_z^2-B_\theta^2)^2}{B^2r}-\frac{((m/r)B_z+kB_\theta)^2}{r(k^2+m^2/r^2)}$$
$$-\frac{2k^2(m^2/r^2)B^2}{r(k^2+m^2/r^2)^2}-\frac{2k^2B_zB_z'-2(m^2/r^2)B_\theta B_\theta'}{k^2+m^2/r^2}.\tag{E.17}$$

将其中第二、四项相加可得 B^2/r,再将它和上式中的第六项相加后又可合并成

$$\frac{B^2}{r}-\frac{2k^2(m^2/r^2)B^2}{r(k^2+m^2/r^2)^2}=\frac{B^2}{r}\frac{k^4+m^4/r^4}{(k^2+m^2/r^2)^2}.$$

而(E.17)式中的第三项和最后一项也可以合并成

$$-2B_\theta J_z+\frac{2(m^2/r^2)B_\theta B_\theta'}{k^2+m^2/r^2}=-\frac{2B_\theta^2}{r}-2B_\theta B_\theta'$$
$$+2B_\theta B_\theta'\frac{m^2/r^2}{k^2+m^2/r^2}$$
$$=-\frac{2B_\theta^2}{r}-2B_\theta B_\theta'\frac{k^2}{k^2+m^2/r^2}.$$

把它们都代入(E.17)式,有

$$g=F^2r+\frac{B^2}{r}\frac{k^4+m^4/r^4}{(k^2+m^2/r^2)^2}-2\frac{B_\theta^2}{r}$$
$$-\frac{2k^2}{k^2+m^2/r^2}(B_zB_z'+B_\theta B_\theta')-\frac{((m/r)B_z+kB_\theta)^2}{r(k^2+m^2/r^2)}.\tag{E.18}$$

再利用平衡方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}[P + (B_z^2 + B_\theta^2)/2] + B_\theta^2/r = 0,$$

$$P' + B_\theta B_\theta' + B_z B_z' + B_\theta^2/r = 0,$$

结果有

$$B_\theta B_\theta' + B_z B_z' = - P' - B_\theta^2/r.$$

把它代入(E. 18)式后，得

$$g = F^2 r + \frac{2k^2}{k_0^2}P' + \hat{g}. \tag{E. 19}$$

其中

$$\begin{aligned}\hat{g} &= \frac{B^2}{r}\frac{k^4 + m^4/r^4}{(k^2 + m^2/r^2)^2} - \frac{2B_\theta^2}{r} + \frac{2B_\theta^2}{r}\frac{k^2}{k^2 + m^2/r^2} \\ &\quad - \frac{((m/r)B_z + kB_\theta)^2}{r(k^2 + m^2/r^2)} \\ &= \frac{B^2}{r}\frac{k^4 + m^4/r^4}{(k^2 + m^2/r^2)^2} - \frac{2B_\theta^2}{r}\frac{m^2/r^2}{k^2 + m^2/r^2} \\ &\quad - \frac{(m/r)^2 B_z^2 + (kB_\theta)^2 + 2k(m/r)B_z B_\theta}{r(k^2 + m^2/r^2)} \\ &= \frac{1}{r(k^2 + m^2/r^2)^2}\left[k^4 B^2 + \frac{m^4}{r^4}B^2 - 2B_\theta^2 \frac{m^2}{r^2}\left(k^2 + \frac{m^2}{r^2}\right)\right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{m}{r}B_z + kB_\theta\right)^2\left(k^2 + \frac{m^2}{r^2}\right)\right],\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}\left(\frac{m}{r}B_z + kB_\theta\right)^2 &= \left(kB_z + \frac{m}{r}B_\theta\right)^2 - \left(k^2 - \frac{m^2}{r^2}\right)(B_z^2 - B_\theta^2) \\ &= F^2 - \left(k^2 - \frac{m^2}{r^2}\right)(B_z^2 - B_\theta^2).\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}\hat{g} &= -\frac{F^2}{rk_0^2} + \frac{1}{r(k^2 + m^2/r^2)^2}\left[k^4 B^2 + \frac{m^4}{r^4}B^2 - 2B_\theta^2 \frac{m^2}{r^2}k^2\right. \\ &\quad \left. - 2B_\theta^2 \frac{m^4}{r^4} + \left(k^4 - \frac{m^4}{r^4}\right)(B_z^2 - B_\theta^2)\right].\end{aligned} \tag{E. 20}$$

而其中的方括号项又可进一步简化. 因为

$$k^4 B^2 + k^4 B_z^2 - k^4 B_\theta^2 = 2k^4 B_z^2,$$

$$\frac{m^4}{r^4}(B^2 - 2B_\theta^2 - B_z^2 + B_\theta^2) = 0,$$

故(E. 20)式方括号中的项可进一步表示成

$$\begin{aligned}[\cdots] &= 2k^4 B_z^2 - 2k^2 \frac{m^2}{r^2}B_\theta^2 \\ &= 2k^2\left(kB_z + \frac{m}{r}B_\theta\right)\left(kB_z - \frac{m}{r}B_\theta\right) \\ &= 2k^4 Fh.\end{aligned}$$

把这结果代入(E. 20)后，再代入(E. 19)，最后可得

$$\begin{aligned}g &= F^2 r + \frac{2k^2}{k_0^2}P' - \frac{F^2}{rk_0^2} + \frac{2k^2 Fh}{rk_0^4} \\ &= \frac{2k^2}{k_0^2}P' + \left(\frac{k_0^2 r^2 - 1}{k_0^2 r^2}\right)rF^2 + \frac{2k^2}{rk_0^4}Fh.\end{aligned} \tag{E. 21}$$

这就是第四章中给出的(4. 43)式. 下面把其中的简化符号再写一遍，

$$k_0^2 = k^2 + \frac{m^2}{r^2}, \quad F = kB_z + \frac{m}{r}B_\theta, \quad h = kB_z - \frac{m}{r}B_\theta.$$

附录 F　直柱 tokamak 中 δW_p 的推导

本附录将给出按 tokamak 量级展开的磁流体扰动势能表达式，这就是第四章中的 δW_{p2}，δW_{p4}和 $\delta W_a^{(2)}$（式(4.60)—(4.64)）。推导的出发点是螺旋箍缩的内部扰动势能表达式(4.40)—(4.42)或式(E.10)及(E.21)，以及表面扰动势能表达式(4.55)。

$$\delta W = \delta W_p + \delta W_a,$$

$$\delta W_p = \pi L\int_0^a (f|\xi'|^2 + g|\xi|^2)\mathrm{d}r,$$

$$f = \frac{rF^2}{\mu k_0^2},$$

$$g = \frac{2k^2}{k_0^2}P' + \frac{1}{\mu}\left(\frac{k_0^2r^2-1}{k_0^2r^2}\right)rF^2 + \frac{1}{\mu}\frac{2k^2}{rk_0^4}Fh,$$

$$\delta W_a = \frac{\pi L}{\mu}\left(\frac{Fh}{k_0^2}\bigg|_a \xi_a^2 + \frac{\lambda}{m}r^2F^2|_a\xi_a^2\right).$$

tokamak 等离子体中的量级关系为

$$\frac{a}{R}\sim\varepsilon\ll 1,\quad \frac{B_\theta}{B_z}\sim\varepsilon,\quad \frac{P}{B_z^2}\sim\varepsilon^2.$$

先来看(下面为了简单，令 $\mu=1$)

$$f = \frac{rF^2}{k_0^2} = \frac{r(rF)^2}{k_0^2r^2} = \frac{r(mB_\theta + krB_z)^2}{m^2+k^2r^2} = \frac{rB_\theta^2(m-nq)^2}{m^2+n^2(r/R)^2}.$$

其中

$$n=-kR,\quad k_0^2r^2 = k^2r^2+m^2 = m^2+n^2(r/R)^2,$$

$$q=(r/R)(B_z/B_\theta).$$

下面来展开 f. 因为

$$f = \frac{rB_\theta^2q^2(m/q-n)^2}{m^2+(r/R)^2n^2} \approx \frac{B_z^2}{R^2}r^3\left(\frac{1}{q}-\frac{n}{m}\right)^2\left[1-\frac{n^2}{m^2}\left(\frac{r}{R}\right)^2\right],$$

所以它的数量级就很容易分开了

$$f^{(2)} = \frac{B_z^2}{R^2}r^3\left(\frac{1}{q}-\frac{n}{m}\right)^2 \approx \frac{B_0^2}{R^2}r^3\left(\frac{1}{q}-\frac{n}{m}\right)^2, \tag{F.1}$$

$$f^{(4)} = -\frac{B_0^2}{R^4}r^5\frac{n^2}{m^2}\left(\frac{1}{q}-\frac{n}{m}\right)^2. \tag{F.2}$$

再来展开

$$g = \frac{2k^2r^2}{m^2+k^2r^2}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}r} + \frac{B_\theta^2}{r}\left[\frac{m^2-1+k^2r^2}{m^2+k^2r^2}(m-nq)^2 + \frac{2k^2r^2[(nq)^2-m^2]}{(m^2+k^2r^2)^2}\right].$$

其中第一项是四阶的，

$$g_1^{(4)} = \frac{2n^2r^2/R^2}{m^2+n^2r^2/R^2}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}r} \approx \frac{2n^2}{m^2}\frac{r^2}{R^2}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}r},$$

而第二项则包含二阶和四阶项，

$$g_2 = \frac{B_\theta^2}{r}q^2\left[\frac{m^2-1+n^2r^2/R^2}{m^2+n^2r^2/R^2}\left(\frac{m}{q}-n\right)^2 + \frac{2n^2r^2/R^2(n^2-m^2/q^2)}{m^4+2m^2n^2r^2/R^2+n^4r^4/R^4}\right]$$

$$\approx \frac{B_0}{r}\frac{r^2}{R^2}\left[\frac{m^2-1+n^2r^2/R^2}{1+(n^2/m^2)(r^2/R^2)}\left(\frac{1}{q}-\frac{n}{m}\right)^2 + 2\frac{n^2}{m^2}\frac{r^2}{R^2}\left(\frac{n^2}{m^2}-\frac{1}{q^2}\right)+\cdots\right]$$

$$\approx \frac{B_0^2}{R^2}r\left[(m^2-1+n^2r^2/R^2)\left(\frac{1}{q}-\frac{n}{m}\right)^2 \times[1-(n^2/m^2)(r^2/R^2)] + 2\frac{n^2}{m^2}\frac{r^2}{R^2}\left(\frac{n^2}{m^2}-\frac{1}{q^2}\right)\right],$$

其中已略去了高于四阶的小量. 于是数量级就容易区别开来了

$$g_2^{(2)} = \frac{B_0^2}{R^2}r(m^2-1)\left(\frac{1}{q}-\frac{n}{m}\right)^2. \tag{F.3}$$

$$g_2^{(4)}=\frac{B_0^2}{R^2}r\left\{\left[(m^2-1)\left(-\frac{n^2}{m^2}\frac{r^2}{R^2}\right)+n^2\left(\frac{r}{R}\right)^2\right]\left(\frac{1}{q}-\frac{n}{m}\right)^2+2\frac{n^2}{m^2}\frac{r^2}{R^2}\left(\frac{n^2}{m^2}-\frac{1}{q^2}\right)\right\}$$

$$=\frac{B_0^2}{R^2}r\left[\frac{n^2}{m^2}\frac{r^2}{R^2}\left(\frac{1}{q}-\frac{n}{m}\right)^2+2\frac{n^2}{m^2}\frac{r^2}{R^2}\left(\frac{n^2}{m^2}-\frac{1}{q^2}\right)\right]$$

$$=\frac{B_0^2}{R^4}r^3\frac{n^2}{m^2}\left(\frac{n}{m}-\frac{1}{q}\right)\left(3\frac{n}{m}+\frac{1}{q}\right). \quad (\text{F. }4)$$

特别当 $m=n=1$ 时，有

$$g_2^{(4)}|_{n=m=1}=\frac{B_0^2}{R^4}r^3\left(1-\frac{1}{q}\right)\left(3+\frac{1}{q}\right). \quad (\text{F. }5)$$

所以最后可得磁流体内的二阶扰动势能

$$\delta W_{p2}=\pi L\int_0^a \mathrm{d}r(f^{(2)}\xi'^2+g^{(2)}\xi^2)$$

$$=L\frac{\pi B_0^2}{R^2}\int_0^a r\mathrm{d}r\left[r^2\left(\frac{1}{q}-\frac{n}{m}\right)^2\xi'^2+(m^2-1)\left(\frac{1}{q}-\frac{n}{m}\right)^2\xi^2\right].$$

即

$$\frac{\delta W_{p2}}{L}=\frac{\pi B_0^2}{R^2}\int_0^a r\mathrm{d}r\left(\frac{n}{m}-\frac{1}{q}\right)^2[r^2\xi'^2+(m^2-1)\xi^2]. \quad (\text{F. }6)$$

这正是第四章的(4.61)式. 而磁流体内的四阶扰动势能则是

$$\frac{\delta W_{p4}}{L}=\frac{\pi B_0^2}{R^2}\int_0^a r\mathrm{d}r\left\{-\frac{r^4}{R^2}\frac{n^2}{m^2}\left(\frac{1}{q}-\frac{n}{m}\right)^2\xi'^2+\xi^2\left[r\frac{n^2}{m^2}\frac{2P'}{B_0^2}+\frac{r^2}{R^2}\frac{n^2}{m^2}\left(\frac{n}{m}-\frac{1}{q}\right)\left(3\frac{n}{m}+\frac{1}{q}\right)\right]\right\},$$

也即

$$\frac{\delta W_{p4}}{L}=\frac{\pi B_0^2}{R^2}\frac{n^2}{m^2}\int_0^a r\mathrm{d}r\left\{-\frac{r^4}{R^2}\left(\frac{n}{m}-\frac{1}{q}\right)^2\xi'^2+\left[r\beta'+\frac{r^2}{R^2}\left(\frac{n}{m}-\frac{1}{q}\right)\left(3\frac{n}{m}+\frac{1}{q}\right)\right]\xi^2\right\}, \quad (\text{F. }7)$$

这就是第四章的(4.62)式. 当 $n=m=1$ 时则退化成

$$\left.\frac{\delta W_{p4}}{L}\right|_{n=m=1}=\frac{\pi B_0^2}{R^2}\int_0^a r\mathrm{d}r\left\{-\frac{r^4}{R^2}\left(1-\frac{1}{q}\right)^2\xi'^2+\left[r\beta'+\frac{r^2}{R^2}\left(1-\frac{1}{q}\right)\left(3+\frac{1}{q}\right)\right]\xi^2\right\}, \quad (\text{F. }8)$$

这正是第四章的(4.63)式.

表面势能不须展开，直接就是二阶的. 下面从螺旋箍缩中的表面势能表达式(4.55)出发，略作变形以给出(4.64)式，

$$\delta W_a=L\pi\xi_a^2\left[\frac{hF}{k_0^2r}+\frac{\lambda}{m}r^2F^2\right]_a$$

$$=L\pi\xi_a^2\left[\frac{k^2r^2B_z^2-m^2B_\theta^2}{m^2+k^2r^2}+\frac{\lambda}{m}(krB_z+mB_\theta)^2\right]_a$$

$$=L\pi\xi_a^2B_\theta^2(a)\left[\frac{(n^2r^2/R^2)(B_z^2/B_\theta^2)-m^2}{m^2+n^2r^2/R^2}+\frac{\lambda}{m}\left(m-n\frac{r}{R}\frac{B_z}{B_\theta}\right)^2\right]_a$$

$$=L\pi\xi_a^2B_\theta^2(a)q^2(a)\left[\frac{n^2}{m^2}-\frac{1}{q^2}+\lambda m\left(\frac{n}{m}-\frac{1}{q}\right)^2\right]_a$$

$$\approx L\frac{\pi B_0^2}{R^2}\xi_a^2a^2\left[\left(\frac{n}{m}-\frac{1}{q}\right)^2(1+\lambda m)+\frac{2}{q}\left(\frac{n}{m}-\frac{1}{q}\right)\right]_a,$$

这是对任意 a/b 比都正确的. 而当 $b\to\infty,\lambda\to1$ 时，其简化表达式为

$$\frac{\delta W_a^{(2)}}{L}=\frac{\pi B_0^2}{R^2}\xi_a^2a^2\left[(m+1)\left(\frac{n}{m}-\frac{1}{q}\right)^2+\frac{2}{q}\left(\frac{n}{m}-\frac{1}{q}\right)\right]_a, \quad (\text{F. }9)$$

就是式(4.64).

索　引

E

F

G

H

J

K

L

M

N

V

W

X

Y

Z

北京大学物理学丛书

（已出书目）

1. 广义相对论引论(第二版)	俞允强
2. 量子力学导论(第二版)	曾谨言
3. 近代光学信息处理	宋菲君 S. Jutamulia
4. 理论物理基础	彭桓武 徐锡申
5. 高温超导物理	韩汝珊
6. 数学物理方法(第二版)	吴崇试
7. 原子核理论——它的深化与扩展	张启仁
8. 李代数李超代数及在物理中的应用	韩其智 孙洪洲
9. 电动力学简明教程	俞允强
10. 特殊函数概论	王竹溪 郭敦仁
11. 物理学中的非线性方程	刘式适 刘式达
12. 固体物理基础(第二版)	阎守胜
13. 现代半导体物理	夏建白
14. 热大爆炸宇宙学	俞允强
15. 数理物理基础	彭桓武 徐锡申
16. 近代半导体材料的表面科学基础	许振嘉
17. 物理宇宙学讲义	俞允强
18. 量子力学原理	王正行
19. 电动力学及狭义相对论(第二版)	张宗燧
20. 热力学(第二版)	王竹溪
21. 超弦史话	李 淼
22. 等离子体理论基础	胡希伟